Weissenborn

Die

Projection in der Ebene.

Von

Dr. Hermann Weißenborn.

Nebst 22 Figurentafeln.

Berlin, 1862.
Verlag der Weidmannschen Buchhandlung.

Vorrede.

Derjenige Theil der Geometrie, welcher gegenwärtig am meisten die Aufmerksamkeit der Freunde dieser Wissenschaft auf sich zieht, dürfte wohl der sein, welcher die Lehre von den Punktreihen und Strahlbüscheln, der anharmonischen und harmonischen Theilung, der Involution, der Verwandtschaft, der Erzeugung der Kegelschnitte durch Punktreihen und Strahlbüschel, der Polarität und Reciprocität, u. a. umfaßt. Bereits ist dieser, verhältnißmäßig junge, Zweig der Geometrie in größerer oder geringerer Ausdehnung in einer wenn auch nicht gerade großen Anzahl anerkannt tüchtiger Werke behandelt, die freilich rücksichtlich der in ihnen befolgten Methode zum Theil so wesentlich von einander abweichen, daß derjenige, welcher sich selbst eine Meinung gebildet hat, in dieser Beziehung unmöglich allen zugleich beistimmen kann, obschon der Unbefangene, welcher Ansicht er sei, das Einzelne auch da, wo er sich mit dem Grundgedanken nicht einverstanden erklären kann, zu schätzen und zu würdigen wissen wird. Es scheinen mir namentlich folgende drei Fragen zu sein, deren verschiedene Beantwortung den verschiedenen Charakter dieser Werke hervorgerufen hat und die den Standpunkt bestimmt, welchen der Leser ihnen gegenüber einnimmt, nämlich: Ob das Wesen der Geometrie bei der Lösung geometrischer Probleme nur rein geometrische Betrachtungen und Schlüsse zulasse, oder ob auch Sätze der Mechanik, Arithmetik und Analysis angewandt werden können, und in wie weit? Ob und in wie weit der Gebrauch des Zeichenprincips in der reinen Geometrie gerechtfertigt und gestattet sei? Ob es dem Wesen der Geometrie entspreche, bei geometrischen Untersuchungen den Begriff des Imaginären zu Hülfe zu nehmen, es sei dadurch, daß man imaginären und complexen Zahlen eine geometrische Bedeutung unterlegt, oder auf eine andere Weise? Ich brauche, um das Gewicht, welches ich gerade

auf diese Fragen lege, zu begründen, nur die Werke von Möbius[1]), Steiner[2]), Magnus[3]), Chasles[4]), Adams[5]), Seydewitz[6]), von Staudt[7]), Paulus[8]), Witzschel[9]), sowie die Abhandlung von Essen in Grunert's Archiv der Mathematik und Physik[10]) zu erwähnen, und

---

1) Barycentrischer Calcul. Leipzig bei Barth 1827.

Ueber eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen. Berichte der kön. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physische Classe. 1852. Leipzig bei Hirzel 1853.

Theorie der collinearen Involution von Punktenpaaren in einer Ebene und im Raume. Ber. d. kön. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. Mathematisch-physische Classe. Sitzung am 25. October 1856.

Ueber imaginäre Kreise. Ber. d. kön. Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften. Mathematisch-physische Classe. Sitzung am 21. Februar 1857.

Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. Abhandl. d. kön. Sächs. Ges. d. Wissensch. IV.

2) Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin bei Fincke. 1832.

Die geometrischen Konstructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines festen Kreises. Berlin bei Dümmler. 1833.

3) Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. Berlin bei Duncker und Humblot. 1833.

4) Geschichte der Geometrie. Aus dem Französischen übertragen von Sohncke. Halle. Gebauersche Buchhandlung. 1839.

Traité de géométrie supérieure. Paris. Bachelier. 1852.

5) Die Lehre von den Transversalen in ihrer Anwendung auf die Planimetrie. Winterthur. Steinersche Buchhandlung. 1843.

Die harmonischen Verhältnisse. Ein Beitrag zur neueren Geometrie. Winterthur. Steinersche Buchhandlung. 1845.

6) Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene als gemeinschaftliches Princip individueller Eigenschaften der Figuren. Heiligenstadt bei Delion. 1846.

Zahlreiche und werthvolle Abhandlungen desselben Verfassers finden sich in den ersten zehn bis zwölf Theilen des Grunert'schen Archivs.

7) Geometrie der Lage. Nürnberg bei Bauer und Raspe. 1847.

Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg bei Bauer und Raspe. Erstes Heft 1856. Zweites Heft 1857. Drittes Heft (Schlussheft) 1860.

8) Grundlinien der neueren ebenen Geometrie. Stuttgart bei Paulus. 1853.

Ordnungselemente der einförmigen involutorischen Grundgebilde. Grunert's Archiv. Theil 21.

Ueber uneigentliche Punkte und Tangenten der Kegelschnitte. Grunert's Archiv. Theil 22.

Ein Beitrag zum geometrischen Zeichnen. Grunert's Archiv. Theil 23.

9) Grundlinien der neueren Geometrie. Leipzig bei Teubner. 1858.

10) Vorschule der neueren Geometrie, insbesondere eine elementare Darstellung der Verwandtschaft und der Kegelschnitte enthaltend. Grunert's Archiv. Theil 29.

man wird sich überzeugen, wie weit über die oben genannten drei Punkte die Meinungen auseinander gehen.

Indem ich es daher für nothwendig und zweckmäßig erachte, die Ansichten, welche mich bei Abfassung der vorliegenden Schrift geleitet haben, und den Standpunkt anzugeben, von welchem ich dieselbe betrachtet wissen möchte, bemerke ich Folgendes: Obschon ich meine, daß unter Umständen auch die Sätze der Phoronomie und der reinen Mechanik zur Lösung geometrischer Fragen zu Hülfe genommen werden dürfen, wenn nämlich die Natur der Aufgabe selbst darauf hinweist[11]), und obschon ich vollkommen anerkenne, daß es hauptsächlich die Arithmetik und Analysis ist, welche in ihrer Anwendung auf Geometrie allgemeine Gesichtspunkte in letzterer aufzustellen erlaubt, ja die Lösung mancher Aufgaben überhaupt erst ermöglicht, so scheint es mir doch bei der Entscheidung darüber, ob eine Methode naturgemäß sei, nicht darauf anzukommen, wie viele Lehrsätze ihr zufolge zu einem einzigen zusammengefaßt werden können, oder wie viele Lehrsätze sich aus einem anderen ableiten lassen, oder ob ein in ihrem Sinne geführter Beweis kürzer ist, als der, welchen die Zugrundelegung eines anderen Princips erfordert, sondern darauf, ob die Behandlung eine dem Gegenstande entsprechende, ob der Stoff organisch gegliedert, ob nichts Fremdartiges unnöthiger Weise beigemengt ist. In dieser Hinsicht glaube ich allerdings, daß es angemessen ist, bei Behandlung geometrischer Fragen sich so lange als möglich auf dem Boden der reinen Geometrie zu halten, aber auch da, wo die Natur der Sache selbst auf ein fremdartiges Gebiet hinführt, ohne Scheu dasselbe zu betreten. Ich habe mich daher im Hinblick auf die zwei hauptsächlichsten offen stehenden Wege: entweder der Analysis das Uebergewicht einzuräumen und somit an Allgemeinheit der Resultate zu gewinnen, an Anschaulichkeit aber zu verlieren, oder eine möglichst rein geometrische Darstellung vorwiegen zu lassen und somit zwar an Allgemeinheit der Resultate einzubüßen, an Anschaulichkeit aber zu gewinnen, ohne Zaudern für den letzteren entschieden, und hoffe, man werde die Berechtigung desselben anerkennen, wie auch ich den Werth der analytischen Methode wohl zu würdigen weiß[12]). Zugleich folgt aus

---

11) Man vergl. meine Abhandlung: **Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibnitz bis auf Lagrange. Halle bei H. W. Schmidt. 1856. pag. 3.** und **Kap. I.** Ich selbst habe mich der Phoronomie in meiner Schrift: **Die cyclischen Curven. Eisenach bei Bärecke. 1856. § 5.** zur Erforschung der geometrischen Eigenschaften der Cycloiden-Arten bedient, und gerade dieser Theil des Buches ist, mehreren mir zugekommenen Beurtheilungen zufolge, beifällig aufgenommen worden.

12) Ich schließe mich in dieser Beziehung ganz dem an, was Studer in seiner

der untergeordneten Stellung, welche ich der Arithmetik in vorliegenden Blättern eingeräumt habe, daß ich auch des Zeichenprincips, auf welches eine analytische Behandlung der Geometrie nothwendig führen muß, mich nicht bedienen konnte, ganz abgesehen davon, daß die Vorstellung des Gegensatzes der Richtung und Drehung im Grunde eine rein phoronomische ist. Natürlich ist jedoch dadurch, daß der Anwendung der Vorzeichen als Princip nicht Raum gegeben werden konnte, nicht gesagt, daß auch in Rechnungen, welche sich nöthig gemacht haben, keine Rücksicht auf dieselben genommen werden dürfe, vielmehr sind stets, wo es erforderlich war, die Zeichen unter Erwägung des vorliegenden speciellen Falles discutirt worden, indem dieß einen nothwendigen Theil des Calculs ausmacht. Wegen der Nicht-Anwendung des Zeichenprincips endlich war auch zugleich die Frage über den Gebrauch der auf dasselbe basirten geometrischen Deutung der imaginären und complexen Zahlen bei geometrischen Untersuchungen dahin entschieden, daß derselbe nicht statt haben könne. Ebenso wenig mochte ich mich entschließen, das Imaginäre im Sinne des Princips der Continuität oder der zufälligen Relationen als Beweismittel zu benutzen. Obschon Chasles in einem seiner rühmlichst bekannten Werke[13]) in diesem Falle den Gebrauch und die Betrachtung des Imaginären gerechtfertigt findet, so habe ich doch meine Bedenken dagegen nicht zu überwinden und meine Ansicht nicht zu ändern vermocht, daß allerdings ein Unterschied obwalte, ob man z. B. in einem Polygone, welches einem Kreise eingeschrieben ist, die Anzahl der Seiten sich ändern und soweit wachsen läßt, daß das Vieleck als solches zu existiren aufhört und als mit dem Kreise zusammenfallend gedacht werden muß[14]), oder ob man z. B. einen Punkt außerhalb eines Kreises, von welchem Tangenten an letzteren gelegt sind, sich demselben immer mehr nähern und endlich in das Innere desselben rücken läßt, und auch dann noch von den Tangenten spricht, die sich von ihm aus an den Kreis legen lassen. Denn im ersteren Falle bleibt immerhin ein geometrisches Object, wenn auch anderer Art, als das ursprüngliche, über welches Behauptungen ausgesprochen werden können, im letzteren dagegen verschwinden die Tangenten für die geometrische Vorstellung gänzlich, und über sie dann noch etwas aussagen hieße, den Satz: nihili nulla sunt attributa umstoßen, der schon dem Descartes als die

---

vortrefflichen: Einleitung in das Studium der Physik. Bern. Stämpflische Buchhandlung und Zürich bei Schulthess. 1859. pag. 18. über geometrische Analysis und Synthesis sagt.

13) Geschichte der Geometrie; übersetzt von Sohncke. pag. 395.

14) Geschichte der Geometrie; übersetzt von Sohncke. pag. 380.

bekannteste Wahrheit galt. Dagegen stimme ich vollständig den Gründen [15]) bei, welche Chasles veranlaßt haben, sich in seinem Traité de géométrie supérieure des Princips der Continuität ebenfalls nicht zu bedienen. Denn auch ich bin überzeugt, daß ein jeder Satz der Geometrie, der mit Hülfe desselben dargethan wird, sich auch auf rein geometrischem Wege beweisen lassen wird, daß ein solcher Beweis dadurch, daß er tiefer in die specielle Natur des vorliegenden Objects einzugehen nöthigt, eine gründlichere Einsicht in das Wesen desselben gewährt und daß sich deßhalb die etwa aufgewandte Mühe reichlich belohnt. An mehreren Stellen meiner Arbeit habe ich die Richtigkeit dieser Bemerkung zu erproben Gelegenheit gehabt.

Nachdem ich so die allgemeinen Principien, welche mich bei der Redaction dieser Bogen geleitet haben, dargelegt, habe ich mich noch über die Durchführung des befolgten Planes im Einzelnen auszusprechen: Mein Streben ging dahin, die im Eingange erwähnten Lehren und Sätze zu einem systematisch geordneten, organisch gegliederten und abgerundeten Ganzen zusammenzufassen. Zur Grundlage wählte ich die, sich durch Anschaulichkeit empfehlende, von Desargues und Pascal zuerst [16]) angewandte Methode der Perspective oder der Projection, ohne jedoch die Ebene zu verlassen und den Raum zu Hülfe zu nehmen. Denn auch mir schien es, nach dem Vorgange von Paulus, räthlich, bei dem Umfange des Stoffes die ebene Geometrie von der räumlichen zu trennen. So habe ich auch die Kegelschnitte durch rein planimetrische Betrachtungen, ohne auch nur für einen Augenblick die Ebene zu verlassen, und ohne, wie Steiner und Seydewitz, den Kegel zu Hülfe zu nehmen, entwickelt und die Theorie derselben hauptsächlich auf die von Desargues begründete [17]) Lehre von der Involution und auf Pascal's Sechseck [18])

---

15) Traité de géométrie supérieure. Préface VI. pag. XV.

16) Chasles: Geschichte der Geometrie; übersetzt von Sohncke. pag. 71. Anmerkung 26).

17) Chasles: Geschichte der Geometrie; übersetzt von Sohncke. pag. 74., 326. Vergl. auch Chasles: Traité de géométrie supérieure. Discours d'inauguration du cours de géométrie supérieure de la faculté des sciences de Paris. pag. LXII.

18) Die Werke Pascal's (1623—1662) sind unter dem Titel: Oeuvres de Blaise Pascal. A la Haye. Chez Detune, libraire. M. DCC. LXXIX. veröffentlicht worden, ohne daß sich der Herausgeber genannt hätte. Vermuthlich ist derselbe Bossut. Wenigstens sagt Poncelet in seinem berühmten Traité des propriétés projectives des figures. Paris. Bachelier. 1822. Introduction pag. xlj: „L'éditeur des OEuvres de Pascal, que l'on croit être M. l'abbé Bossut"; und auch Chasles bezeichnet in seiner Geschichte der Geometrie; übersetzt von Sohncke. pag. 68 Bossut als den, welcher die vollständige Ausgabe der Werke Pascal's 1779. besorgt habe. Leider sind die geometrischen Werke desselben fast gänzlich verloren gegangen, we-

und Brianchon's Sechsseit gegründet. Auf diese Weise konnten die

---

nigstens bis jetzt nicht wieder aufgefunden. Denn der Herausgeber der Oeuvres de Blaise Pascal sagt in dem Discours ſur la vie et les Ouvrages de Pascal. pag. 34.: „Il y a apparence que ces Ouvrages (nämlich die geometrischen) ſont perdus; du moins, malgré toutes mes recherches, je n'ai pu parvenir à me les procurer: je n'en parle que d'après une indication générale que l'Auteur en donne lui-même, & d'après une Lettre de M. Leibnitz à l'un des fils de M. Périer". Nur eine kleine Abhandlung ist erhalten, welche den Titel führt: „Eſſais pour les coniques". Da die oben genannte Ausgabe der Werke Pascal's ziemlich selten ist, so glaube ich den Freunden der Geometrie und der Geschichte derselben einen Dienst zu erweisen, wenn ich hier eine wortgetreue Kopie dieser Schrift Pascal's, sowie zweier auf seine geometrischen Werke sich beziehenden Briefe folgen lasse, sämmtlich nach den Oeuvres de Blaise Pascal. A la Haye. Chez Detune, libraire. M. DCC. LXXIX. Es heißt daselbst im Tome quatrieme, pag. 1—7. (wobei ich bemerke, daß unter den als Fig. 1., 2., 3. im Folgenden erwähnten Figuren bezüglich die Figuren 201. auf Taf. XII.; 202. auf Taf. X.; 203. auf Taf. XI. zu verstehen sind) folgendermaßen:

ESSAIS

1640. POUR LES CONIQUES

DÉFINITION I.

QUAND pluſieurs lignes droites concourent au même point, ou ſont toutes paralleles entre elles: toutes ces lignes ſont dites de *même ordre* ou de *même ordonnance;* & la multitude de ces lignes, eſt dite *ordre de lignes,* ou *ordonnance de lignes.*

DÉFINITION II.

PAR le mot de *Section* de cône, nous entendons la circonférence du cercle, l'ellipſe, l'hyperbole, la parabole & l'angle rectiligne: d'autant qu'un cône coupé parallélement à ſa baſe, ou par ſon ſommet, ou des trois autres ſens qui engendrent l'ellipſe, l'hyperbole & la parabole, donne dans ſa ſuperficie, ou la circonférence d'un cercle, ou un angle, ou l'ellipſe, ou l'hyperbole, ou la parabole.

DÉFINITION III.

PAR le mot de *droite* mis ſeul, nous entendons la ligne droite.

LEMME I.

Fig. 1. *SI dans le plan* MSQ (Fig. 1.) *du point* M *partent les deux droites* MK, MV, *& du point* S *partent les deux droites* SK, SV; *que* K *ſoit le concours des droites* MK, SK; V *le concours des droites* MV, SV; A *le concours des droites* MA, SA μ *le concours des droites* MV, SK; *& que par deux des quatre points* A, K, μ, V *qui ne ſoient point en même droite avec les points* M, S, *comme par les points* K, V, *paſſe la circonférence d'un cercle coupant les droites* MV, MP, SV, SK *aux points* O, P, Q, N: *je dis que les droites* MS, NO, PQ, *ſont de même ordre.*

LEMME II.

SI par la même droite paſſent pluſieurs plans, qui ſoient coupés par un autre plan, toutes les lignes des ſections de ces plans ſont de même ordre avec la droite par laquelle paſſent leſdits plans.

wesentlichsten Eigenschaften sämmtlicher Kegelschnitte zugleich entwickelt

---

Ces deux Lemmes posés & quelques faciles conséquences d'iceux, nous dé- Fig. 1.
montrerons que les mêmes choses étant posées, qu'au premier Lemme, si par les points *K*, *V* passe une section quelconque de cône qui coupe les droites *MK*, *MV*, *SK*, *SV* aux points *P*, *O*, *N*, *Q*: les droites *MS*, *NO*, *PQ* seront de même ordre. Cela sera un troisieme Lemme.

Ensuite de ces trois Lemmes & de quelques conséquences d'iceux, nous donnerons des éléments coniques complets: savoir, toutes les propriétés des diametres & côtés droits, des tangentes &c., la restitution du cône presque sur toutes les données, la description des sections de cône par points, &c.

Quoi faisant, nous énonçons les propriétés que nous en touchons d'une ma- Fig. 1.
niere plus universelle qu'à l'ordinaire. Par exemple, celle-ci: si dans le plan *MSQ*, dans la section de cône, *PKV*, sont menées les droites *AK*, *AV* atteignantes la section aux points *P*, *K*, *Q*, *V*; & que de deux de ces quatre points qui ne sont point en même droite avec le point *A*, comme par les points *K*, *V*, & par deux points *N*, *O* pris dans le bord de la section, soient menées quatre droites *KN*, *KO*, *VN*, *VO* coupantes les droites *AV*, *AP* aux points *L*, *M*, *T*, *S*: je dis que la raison composée des raisons de la droite *PM* à la droite *MA*, & de la droite *AS* à la droite *SQ*, est la même que la raison composée des raisons de la droite *PL* à la droite *LA* & de la droite *AT* à la droite *TQ*.

Nous démontrerons aussi (*Fig*. 1.) que s'il y a trois droites *DE*, *DG*, *DH* que Fig. 1.
les droites *AP*, *AR* coupent aux points *F*, *G*, *H*, *C*, γ, *B*; & que dans la droite *DC* soit déterminé le point *E*: la raison composée des raisons du rectangle de *EF* en *FG* au rectangle de *EC* en $C\gamma$, & de la droite $A\gamma$ à la droite *AG*, est la même que la composée des raisons du rectangle de *EF* en *EH* au rectangle de *EC* en *CB*, & de la droite *AB* à la droite *AH*; & elle est aussi la même que la raison du rectangle des droites *FE*, *FD*, au rectangle des droites *CE*, *CD*. Partant si par les points *E*, *D* passe une section de cône qui coupe les droites *AH*, *AB* aux points *P*, *K*, *R*, ψ: la raison composée des raisons du rectangle des droites *EF*, *FC*, au rectangle des droites *EC*, $C\gamma$, & de la droite γA à la droite *AG*, sera la même que la composée des raisons du rectangle des droites *FK*, *FP*, au rectangle des droites *CR*, $C\psi$, & du rectangle des droites *AR*, $A\psi$, au rectangle des droites *AK*, *AP*.

Nous démontrerons aussi (*Fig*. 3.) que si quatre droites *AC*, *AF*, *EH*, *EL* Fig. 3.
s'entrecoupent aux points *N*, *P*, *M*, *O*, & qu'une section de cône coupe lesdites droites aux points *C*, *B*, *F*, *D*, *H*, *G*, *L*, *K*: la raison composée des raisons du rectangle de *MC* en *MB*, au rectangle des droites *PF*, *PD*, & du rectangle des droites *AD*, *AF*, au rectangle des droites *AB*, *AC*, est la même que la raison composée des raisons du rectangle des droites *ML*, *MK*, au rectangle des droites *PH*, *PG*, & du rectangle des droites *EH*, *EG*, au rectangle des droites *EK*, *EL*.

Nous démontrerons aussi (*Fig*. 1.) la propriété suivante, dont le premier in- Fig. 1.
venteur est M. Desargues, Lyonnois, un des grands Esprits de ce temps, & des plus versés aux Mathématiques, & entre autres aux Coniques, dont les Écrits sur cette matiere, quoiqu'en petit nombre, en ont donné un ample témoignage à ceux qui auront voulu en recevoir l'intelligence. Je veux bien avouer que je dois le peu que j'ai trouvé sur cette matiere à ses Écrits, & que j'ai tâché d'imiter,

werden, während sie sonst gewöhnlich nur für den Kreis bewiesen und

---

autant qu'il m'a été poſſible, ſa méthode ſur ce ſujet qu'il a traité ſans ſe ſervir du triangle par l'axe, en traitant généralement de toutes les ſections de cône. La propriété merveilleuſe dont eſt queſtion eſt telle: Si dans le plan *MSQ* il y a une ſection de cône *PQV*, dans le bord de la quelle ayant pris les quatre points *K*, *N*, *O*, *V*, ſoient menées les droites *KN*, *KO*, *VN*, *VO*, de ſorte que par un même des quatre points ne paſſent que deux droites, & qu'une autre droite coupe, tant le bord de la ſection aux points *R*, ψ, que les droites *KN*, *KO*, *VN*, *VO* aux points *X*, *Y*, *Z*, δ; je dis que comme le rectangle des droites *ZR*, $Z\psi$ eſt au rectangle des droites *YR*, $\gamma\psi$, ainſi le rectangle des droites δR, $\delta\psi$ eſt au rectangle des droites *XR*, $X\psi$.

Fig. 2. Nous démontrerons auſſi (*Fig*. 2.) que ſi dans le plan de l'hyperbole ou de l'ellipſe, ou du cercle *AGTE*, dont le centre eſt *C*, on mene le droite *AB* touchante au point *A* la ſection, & qu'ayant mené le diametre *AT*, on prenne la droite *AB*, dont le quarré ſoit égal au quart du rectangle de la figure(1), & qu'on mene *CB*; alors quelque droite qu'on mene, comme *DE*, parallele à la droite *AB*, coupante la section en *E* & les droites *AC*, *CB* aux points *D*, *F*: ſi la ſection *AGE* eſt une ellipſe ou un cercle, la ſomme des quarrés des droites *DE*, *DF* ſera égale au quarré de la droite *AB*; & dans l'hyperbole, la différence des mêmes quarrés des droites *DE*, *DF*, ſera égale au quarré de la droite *AB*.

Fig. 2. Nous déduirons auſſi quelques problêmes; par exemple, d'*un point donné mener une droite touchante une ſection de cône donnée.*

Trouver deux diametres conjugués en angle donné.

Trouver deux diametres en angle donné & en raiſon donnée.

Nous avons pluſieurs autres problêmes & théorêmes, & pluſieurs conſéquences des précédents; mais la défiance que j'ai de mon peu d'expérience & de capacité, ne me permet pas d'en avancer davantage avant qu'il ait paſſé à l'examen des habiles gens qui voudront nous obliger d'en prendre la peine: après quoi ſi l'on juge que la choſe mérite d'être continuée, nous eſſaierons de la pouſſer juſqu' où Dieu nous donnera la force de la conduire.

Man bemerkt sogleich, daß das Lemme I. den Satz über Pascal's Sechseck für den Kreis enthält; denn nach demselben sind die Linien MS, NO, PQ de même ordre, d. h. nach Définition I., sie schneiden sich in einem und demselben Punkte, oder sind parallel (in der zugehörigen Fig. 1. oder 201. ist, wie es scheint, das letztere angenommen); allgemein also schneiden sie sich in einem und demselben endlich oder unendlich entfernten Punkte. Es liegt also der Durchschnittspunkt von NO und PQ auf MS; oder: der Punkt M, der Punkt S und der Durchschnittspunkt von NO und PQ liegen auf einer und derselben Geraden. Es sind aber in dem eingeschriebenen Sechseck PKNOVQ, wenn PK, KN, NO, OV, VQ, QP bezüglich als 1., 2., 3., 4., 5., 6. Seite angesehen wird, die Punkte M, S, und der Durchschnittspunkt von NO und PQ bezüglich die Durchschnittspunkte der 1. und 4., 2. und 5., 3. und 6. Seite.

---

(1) Par le *rectangle de la figure*, l'Auteur entend le produit d'un diametre par ſon parametre.

Anmerkung des Herausgebers (Bossut).

sodann in Folge des Satzes, daß alle Kegelschnitte unter einander, daß

Es enthält also das Lemme I. den Pascal'schen Satz für den Kreis (indem man sich hier unter dem Kegelschnitt in Fig. 1. oder 201. einen Kreis vorzustellen hat). In dem auf Lemme II. folgenden Absatz, der den Inhalt eines dritten Lemma's enthält, wird derselbe dann auf alle Kegelschnitte ausgedehnt. Was die neueren Arbeiten über das hexagrammum mysticum betrifft, so ist es mir erst ganz vor Kurzem möglich gewesen, da sich dieselben meistens in Zeitschriften niedergelegt finden, mir genaue Citate zu verschaffen, so daß ich sie einsehen konnte. Man findet die einschlagenden Sätze außer in Steiner's Systematischer Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. pag. 311. und 312. 54) und 55), in Gergonne's Annales de Mathématiques pures et appliquées. Tome Dix-huitième. 1827 und 1828. pag. 339: Steiner: Théorèmes sur l'Hexagrammum mysticum; in Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 24. Erstes Heft pag. 40.: Hesse: Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid, und Band 41. Drittes Heft pag. 269: Hesse: Einige Bemerkungen zum Pascal'schen Theorem; in Crelle's Journal Band 41. Erstes Heft pag. 66. Cayley: Note sur quelques théorèmes de la géométrie de position; im Cambridge and Dublin mathematical journal. Vol. V. 1850. pag. 185. Kirkman: On the complete hexagon inscribed in a conic section. Den Band 5. von Crelle's Journal, der eine das Sechseck betreffende Arbeit Plücker's enthält, habe ich leider nicht einsehen können. Eine Zusammenstellung der betreffenden Sätze findet sich endlich in dem vortrefflichen Werke: Analytische Geometrie der Kegelschnitte von George Salmon. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. Leipzig. B. G. Teubner. 1860. pag. 580.; auch wird man bemerken, daß die Untersuchungen des § 11. die Beweise mehrerer Eigenschaften des Pascal'schen Sechsecks enthalten, und daß die der übrigen leicht aus ihnen abgeleitet werden können. Es dürfte sich jedoch die daselbst von mir gegebene Darstellung nicht unwesentlich von der in den genannten Stellen angewandten unterscheiden, wie denn überhaupt die in § 11. enthaltene Betrachtung ganz unabhängig von den angeführten Werken entstanden und durchgeführt ist; namentlich sind hiebei die Eigenschaften des mystischen Sechsecks nicht selbst Zweck, sondern nur Mittel zum Zweck, nämlich zur Entwickelung der Kegelschnitte.

Es mag hier noch bemerkt werden, daß auffallender Weise als Titel der obigen Abhandlung, so viel ich weiß, immer entweder: Essai pour les coniques oder Essai sur les coniques citirt wird. So citirt Poncelet in seinem Traité des propriétés projectives des figures. pag. 109: „*Pascal* dans son *Essai sur les Coniques.* (148. note)“, und in art. 148. note oder Anmerkung zu Seite 79. heißt es: (*) „On doit à *Pascal* un théorème qui revient à celui-ci, pour le cas particulier où l'on ne considère que le système de quatre droites dans le plan d'une section conique. Voyez son *Essai pour les Coniques,* qui a paru en 1640, et qui se trouve imprimé parmi ses *OEuvres.* tom. IV. éd. de Lahaye. 1779.“ Steiner in seiner: Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. pag. 150. Anmerkung*) citirt: Essai sur les Coniques; Gartz in Ersch und Gruber's: Allgemeiner Encyklopädie der Wissenschaften und Künste. Dritte Section. O — Z. Zwölfter Theil. Leipzig bei Brockhaus 1839. Seite 486. giebt als Titel an: Essai pour les coniques; Chasles in seiner Geschichte der Geometrie, übersetzt von Sohncke. pag. 68., 74., 85., 343., u. a., und in seinem Traité de géo-

also Ellipse, Hyperbel, Parabel dem Kreise collinear sind, auch auf letzte-

---

métrie supérieure. Discours. pag. LXII. hat: Essai pour les coniques. Es steht jedoch in den Oeuvres de Blaise Pascal. A La Haye M. DCC. LXIX. bestimmt, sowohl in der Ueberschrift, als auch dreimal im Columnentitel von Seite 2., 4., 6., und im Inhaltsverzeichniß: „Essais", nicht „Essai"; und in dem unten folgenden Briefe Leibnitzens heißt die betreffende Abhandlung: „Essai des coniques".

Was die übrigen auf die Kegelschnitte bezüglichen Schriften, die Pascal verfaßt hat, die aber, wie es scheint, spurlos verschwunden sind, sowie seine Arbeiten über Wahrscheinlichkeit u. s. w. betrifft, so ist ein von Pascal selbst in einem Briefe gegebenes Verzeichniß (dasselbe, welches der Herausgeber der Oeuvres de Blaise Pascal in dem Discours ſur la vie et les Ouvrages de Blaise Pascal. pag. 34. erwähnt, s. o.) von Interesse, in welchem er dieselben aufzählt. Es heißt nämlich in demselben: Oeuvres de Blaise Pascal. Tome quatrieme pag. 408. bis 411. folgendermaßen:

CELEBERRIMÆ

MATHESEOS

ACADEMIÆ PARISIENSI (1).

HÆc vobis doctiſſimi & celeberrimi viri, aut dono, aut reddo: veſtra enim eſſe fateor quæ non, niſi inter vos educatus, mea feciſſem; propria autem agnoſco quæ adeò præcellentibus Geometris indigna video. Vobis enim nonniſi magna ac egregia demonſtrata placent. Paucis verò genium audax inventionis, paucioribus (ut reor) genium elegans demonſtrationis, pauciſſimis utrumque. Silerem itaque, nihil vobis congruum habens, niſi ea benignitas quæ me à junioribus annis in erudito Lyceo ſuſtinuit, hæc oblata qualiacunque ſint, exciperet.

Horum Opuſculorum primum, magna ex parte agit de ambitibus, ſeu peripheriis numerorum quadratorum, cuborum, quadrato quadratorum & in quocunque gradu conſtitutorum; & ideò *de numericarum poteſtatum ambitibus* inſcribitur.

Secundum circa numeros aliorum multiplices verſatur, & ut ex ſola additione characterum numericorum agnoſcantur methodum tradit.

Deinceps autem, ſi juvat Deus, prodibunt & alii tractatus quos omninò paratos habemus, & quorum ſequuntur tituli:

De numeris magico magicis; ſeu methodus ordinandi numeros omnes in quadrato numero contentos, ita ut non ſolùm quadratus totus ſit magicus; ſed, quod difficilius ſane eſt, ut ablatis ſingulis ambitibus reliquum ſemper magicum remaneat, idque omnibus modis poſſibilibus, nullo omiſſo.

---

(1) On doit entendre par le mot *Academiæ*, la ſociété des Savants qui s'aſſembloient dans ce temps-là librement les uns chez les autres, & non pas l'Académie des Sciences, qui ne fut fondée qu'en 1666.

Anmerkung des Herausgebers (Bossut).

In dem oben angeführten Bande von Ersch und Gruber's Encyklopädie Seite 476. Anmerkung heißt es: „Diese Gesellschaft, bestehend aus Mersenne, de Roberval, Mydorge, Carcavi, Le Pailleur u. A., war die Wiege der königlichen Akademie der Wissenschaften, welche im Jahre 1666. höheren Orts bestätigt wurde".

ren übertragen werden. Ich habe dieses Verfahren nicht befolgt aus

---

Promotus Apollonius Gallus; id eſt tactiones circulares, non ſolùm quales veteribus notæ, & à Vietâ repertæ, ſed & adeò ulterius promotæ ut vix eundem patiantur titulum.

Tactiones ſphæricæ, pari amplitudine dilatæ, quippe eâdem methodo tractatæ. Utrarumque autem methodus ſingula earum problemata per plana reſolvens ex ſingulari conicarum ſectionum proprietate oritur, quæ aliis multis difficillimis problematibus ſuccurrit; & vix unicam adimplet paginam.

Tactiones etiam conicæ: ubi ex quinque punctis & quinque rectis datis, quinque quibuſlibet, &c.

Loci ſolidi, cum omnibus caſibus & omni ex parte abſolutiſſimi.

Loci plani: non ſolùm illi quos à veteribus tempus abripuit, nec ſolùm illi quos his reſtitutis perilluſtris hujus ævi Geometra ſubjunxit, ſed & alii huc uſque non noti, utroſque complectentes, & multò latiùs exuberantes, methodo, ut conjicere eſt, omninò novâ, quippe nova praeſtante, viâ tamen longè breviori.

Conicorum opus completum, & conica Apollonii & alia innumera unicâ ferè propoſitione amplectens; quod quidem nondum ſex decimum ætatis annum aſſecutus excogitavi, & deindè in ordinem congeſſi.

Perſpectivæ methodus, quâ nec inter inventas, nec inter inventu poſſibiles ulla compendioſior eſſe videtur; quippe quæ puncta ichnographiæ per duarum ſolummodò rectarum interſectionem præſtet, quo ſanè nihil brevius eſſe poteſt.

Noviſſima autem ac penitùs intentatæ materiæ tractatio, ſcilicet de *compoſitione aleæ in ludis ipſi ſubjectis,* quod gallico noſtro idiomate dicitur (*faire les partis des jeux*): ubi anceps fortuna æquitate rationis ita reprimitur ut utrique luſorum quod jure competit exactè ſemper aſſignetur. Quod quidem eo fortiùs ratiocinando quærendum, quo minus tentando inveſtigari poſſit: ambigui enim ſortis eventus fortuitæ contingentiæ potius quàm naturali neceſſitati meritò tribuuntur. Ideò res hactenus erravit incerta; nunc autem quæ experimento rebellis fuerat, rationis dominium effugere non potuit: eam quippe tantâ ſecuritate in artem per Geometriam reduximus, ut certitudinis ejus particeps facta, jam audacter prodeat; & ſic Matheſeos demonſtrationes cum aleæ incertitudine jungendo, & quæ contraria videntur conciliando, ab utraque nominationem ſuam accipiens ſtupendum hunc titulum jure ſibi arrogat: *aleæ Geometria.*

Non de *Gnomoniâ* loquor, nec de innumeris *miſcellaneis,* quæ ſatis in prompu (ſoll jedenfalls heißen: in promptu) habeo; verum nec parata, nec parari digna.

De vacuo quoque ſubticeo, quippè brevi typis mandandum, & non ſolùm vobis (ut iſta) ſed & cunctis proditurum: non tamen ſine nutu veſtro, quem ſi mereatur, nihil metuendum: quod equidem aliquandò alias expertus ſum, maximè in inſtrumento illo arithmetico quod timidus inveneram, & vobis hortantibus exponens, agnovi approbationis veſtræ pondus.

Illi ſunt Geometriæ noſtræ maturi fructus: felices & immane lucrum facturi, ſi hos impertiendo quoſdam ex veſtris reportemus. B. Pascal.

Datum Pariſiis. 1654.

Endlich iſt noch ein Brief Leibnitzens merkwürdig, der beweiſt, daß noch im Jahre 1676. **Pascal's** geometriſche Werke, großentheils vollendet, vorhanden waren. Es iſt zugleich derjenige Brief, auf den ſich in der oben angezogenen Stelle der

denjenigen Gründen, welche ich Seite 393. in der Anmerkung angeführt

---

Herausgeber der Oeuvres de Blaise Pascal in dem Discours sur la vie et les Ouvrages de Pascal. pag. 34. bezieht; überhaupt wird er auch von Poncelet und Chasles öfter angeführt. Er findet sich in den Oeuvres de Blaise Pascal. Tome cinquieme. pag. 459. bis 462. und lautet folgendermaßen:

LETTRE

DE M. LEIBNITZ

A M. PÉRIER,

Conseiller à la Cour des Aides de Clermont-Ferrand,
Neveu de M. Pascal.

MONSIEUR,

Vous m'avez obligé sensiblement, en me communiquant les manuscripts (1) qui restent de feu M. Pascal, touchant les Coniques. Car, outre les marques de votre bienveillance, que j'estime beaucoup, vous me donnez moyen de profiter par la lectnre des méditations d'un des meilleurs esprits du siecle: je souhaiterois pourtant d'avoir pu les lire avec un peu plus d'application; mais le grand nombre de distractions qui ne me laissent pas disposer entiérement de mon temps, ne l'ont pas permis. Néanmoins je crois les avoir lues assez pour pouvoir satisfaire à votre demande, & pour vous dire que je les tiens assez entieres & finies, pour paroître à la vue du public; & afin que nous puissiez juger si je parle avec fondement, je veux vous faire un récit des pieces dont elles sont composées, & de la maniere que je crois qu'on peut les ranger.

I. Il faut commencer par la piece dont l'inscription est: *Generatio coni sectionum tangentium & secantium, seu projectio peripheriæ, tangentium, & secantium circuli, in quibuscunque oculi, plani ac tabellæ positionibus.* Car c'est le fondement de tout le reste.

II. Après avoir expliqué la génération des sections du cône, faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cône des rayons, il explique les propriétés remarquables d'une certaine figure, composée de six lignes droites, qu'il appelle, *Hexagramme mystique.* J'ai mis au-devant ces mots, *de hexagrammo mystico & conico:* une partie de cette piece se trouve répétée & insérée mot à mot dans une autre, savoir, les définitions (avec leurs corollaires); & les propositions (mais sans les démonstrations) qui se trouvent répétées dans le Traité *de loco solido*, suppléeront au défaut de quelques-unes qui manquent dans celui-ci *de hexagrammo.*

Le III^e Traité doit être, à mon avis, celui qui porte cette inscription: *De quatuor tangentibus, & rectis puncta tactuum jungentibus, undè rectarum harmonicè sectarum & diametrorum proprietates oriuntur.* Car c'est là-dedans que

---

1) J'ai écrit, & fait écrire de tous côtés pour me procurer ces Ouvrages de Pascal, dont parle Leibnitz; mais jusqu'à présent mes recherches à ce sujet ont été presque inutiles.
Anmerkung des Herausgebers (Bossut).

habe. Erst nachdem dieselbe bereits gedruckt war, bemerkte ich, daß auch

l'usage de l'hexagramme paroît, & que les propriétés des centres & des diametres des sections coniques sont expliquées. Je crois qu'il n'y manque rien.

Le IV[e] Traité est: *de proportionibus segmentorum secantium & tangentium.* Car les propriétés fondamentales des sections coniques, qui dépendent de la connoissance du centre & des diametres, étant expliquées dans le Traité précédent, il falloit donner quelques belles propriétés universellement conçues, touchant les proportions des droites menées à la section conique; & c'est de-là que dépend tout ce qu'on peut dire des ordonnées. Les figures y sont aussi, & je ne vois rien qui manque. J'ai mis après ce Traité une feuille, qui porte pour titre ces mots: *De correspondentibus diametrorum*, dont la troisieme page traite *de summâ & differentiâ laterum seu de focis.*

Le V[e] Traité est: *de tactionibus conicis*, c'est-à-dire (afin que le titre ne trompe pas), *de punctis & rectis quas sectio conica attingit;* mais je n'en trouve pas toutes les figures.

Le VI[e] Traité sera, *de loco solido:* j'y ai mis ce titre, parce qu'il n'y en a point: c'est pour ce sujet que Messieurs Descartes & Fermat ont travaillé, quand ils ont donné la composition du lieu solide, chacun à sa mode, Pappus leur en ayant donné l'occasion. Or je crois que M. Pascal a voulu donner ce Traité a part, ou le communiquer au moins à ses amis, parce qu'il y répete beaucoup de choses du deuxieme Traité, mot à mot & assez au long; c'est pourquoi il commence par ceci: *Definitiones excerptæ ex conicis;* savoir, du deuxieme Traité susdit, où il explique ce qu'il entend par ces mots, *hexagrammum mysticum, conicum*, &c. On peut juger par-là que le premier, le second, le troisieme & peut-être le cinquieme Traité, doivent faire proprement les coniques; & ce mot se trouve aussi au dos du premier Traité. Les grandes figures appartiennent à ce sixieme Traité.

J'ai mis ensemble quelques fragments. Il y a un papier imprimé (1) dont le titre est: *Essai des coniques;* & comme il s'y trouvent deux fois tout de même, j'espere que vous permettrez, Monsieur, que j'en retienne un. Il y a un fragment, *de restitutione coni*; savoir, les diametres & parametres étant donnés, retrouver les sections coniques. Ce discours paroît entier & a ses figures. Il y a un autre fragment où se trouvent ces mots au commencement, *magnum problema;* & je crois que c'est celui-ci qui y est compris: *Dato puncto in sublimi, & solido conico ex eo descripto, solidum ita secare, ut exhibeat sectionem conicam datæ similem:* mais cela n'est pas mis au net.

Il y a quelques problêmes sur une autre feuille, qui sont cotés; mais il en manque le premier; on en dira ce qu'on pourra en forme d'Appendice; mais le corps de l'Ouvrage, composé des six premiers Traités, me paroît assez net & achevé.

Il conclus que cet Ouvrage est en état d'être imprimé; & il ne faut pas demander s'il le mérite; je crois même qu'il est bon de ne pas tarder davantage,

(1) Cet Écrit, le seul de tous ceux dont parle Leibnitz, que j'aie pu me procurer, est imprimé à la tête du quatrieme Volume de cette édition.
Anmerkung des Herausgebers (Bossut). Es ist die obige Schrift: Essais pour les coniques.

Chasles in ganz ähnlicher Weise über denselben Gegenstand sich aus-

---

parce que je vois paroître des Traités qui ont quelque rapport à ce qui eſt dans une partie de celui-ci: c'eſt pourquoi je crois qu'il eſt bon de le donner au plutôt, avant qu'il perde la grace de la nouveauté. J'en ai parlé plus amplement à M.M. vos freres, dont je vous dois la connoiſſance, & que j'ai priés de me conſerver l'honneur de votre bienveillance. J'avois eſpéré de vous revoir un jour ici; mais je vois que vos affaires ne l'ont pas encore permis, & j'ai peu d'eſpérance de paſſer par Clermont. Je ſouhaiterois de pouvoir vous donner des marques plus convaincantes de l'eſtime que j'ai pour vous, & de la paſſion que j'ai pour tout ce qui regarde feu M. Paſcal; mais je vous ſupplie de vous contenter cependant de celle-ci. Je ſuis, Monſieur, votre très-humble & très-obéiſſant ſerviteur, Leibnitz.

A Paris, le 30. Aoùt 1676.

Offenbar ist dieß der Brief Leibnitzens, welchen Poncelet in seinem Traité des propriétés projectives des figures. Introduction. pag. xlj. Anmerkung meint, wenn er daselbst sagt: „Nous transcrivons ici ces titres, d'après la lettre de Leibnitz, inserée dans les OEuvres de Pascal. (Tom. 4. Ed. de 1779), et dont la date est du 30. Août 1676", worauf die Titel der oben unter I. bis VI. angeführten Werke folgen. Vielleicht ist dabei an den oben mitgetheilten Brief Pascal's an die Pariser gelehrte Gesellschaft gedacht worden, und so auf tom. 4., statt auf tom. 5. verwiesen worden. Auch sagt Poncelet, ebenfalls in dem Traité des propriétés projectives des figures pag 109: „Au rapport du célèbre *Leibnitz*(**), cette propriété n'est autre que celle de l'*hexagrammum mysticum*, sur laquelle *Pascal* composa ensuite un traité complet des sections coniques, qui ne nous est pas parvenu", und die zu *Leibnitz* gehörige Anmerkung lautet: „Voyez une lettre de *Leibnitz* à M. Perrier imprimée dans le tom. V. des *OEuvres* de *Pascal*.

Man wird insbesondere im Hinblick auf vorliegenden Brief Leibnitzens wohl nicht allzu weit sich von der Wahrheit entfernen, wenn man nach ihm schließt, daß Pascal sich einer Methode bedient haben muß, die nicht sehr verschieden von derjenigen gewesen sein kann, welche von Steiner in seiner: Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander angewandt und meisterhaft durchgeführt worden ist. Je interessanter es ist, zu bemerken, wie zwei Geometer ersten Ranges unabhängig von einander dasselbe Fundamental-Princip zum Ausgangspunkt der Lehre von den Kegelschnitten nehmen, um so wünschenswerther muß es sein, daß die bisjetzt spurlos verschwundenen Werke Pascal's — vielleicht durch einen glücklichen Zufall — wieder aufgefunden werden möchten. Leider ist jedoch keine Hoffnung, daß dieß geschehen werde. Denn auch in der neuesten Ausgabe der Werke Pascal's: „Œuvres complètes de Blaise Pascal. Édition de Ch. Lahure et Cie., imprimeurs à Paris. Paris. Librairie de L. Hachette et Cie. Rue Sarrazin, No. 14. 1860." in 2 Bänden wird (Avertissement. pag. III.) erwähnt, daß von Pascal's Werke über die Kegelschnitte nur ein Fragment über das eingeschriebene Sechseck und eine kurze Notiz Leibnitzens übrig sei. Es enthält daher auch diese Ausgabe über die Kegelschnitte nichts Neues; und wenn sie (Avertissement. pag. VII.) „vollständiger als die Bossut's" genannt wird, so hat dieß seinen Grund darin, weil seit dem Erscheinen dieser (1779) durch Cousin in der Bibliothèque royale mehrere zu den Pensées gehörige Blätter entdeckt, von Faugère und Havet publicirt und die Arbeiten dieser in der Lahure'schen

spricht, indem er sagt[19]): „Nous ne ferons donc point usage dans le cours de cet ouvrage, de la théorie des figures corrélatives, ni même de celle des figures homographiques. Celle-ci a le même défaut que la première; elle laisse ignorer, généralement, comment une proposition que l'on a découverte par son secours se rattache à une théorie et s'y peut démontrer directement. Par exemple, quand par cette méthode on conclut d'une simple propriété du cercle, un théorème des sections coniques, la démonstration relative au cercle est peu propre, en général, à répandre quelque jour sur la marche qu'il faudra suivre pour démontrer directement le théorème sur la section conique"; ein Urtheil, welchem ich vollkommen beitrete. Außerdem bestimmte mich auch der Umstand, den von mir eingeschlagenen Weg zu verfolgen, daß den Gesetzen der Collineation zufolge nur die auf Conformität beruhenden Eigenschaften des Kreises auf die Kegelschnitte übertragen werden dürfen, und es nicht überall leicht sein möchte, zu entscheiden, ob ein Satz der Kreislehre auf Conformität beruhe oder nicht.

Die Benennung „conform" habe ich von Paulus entlehnt; die Einführung dieses Begriffes scheint mir in der That ein Fortschritt zu sein. Ebenso ist von mir das Zeichen $\overline{\wedge}$ für „conform", dasselbe welches von Staudt für „projectivisch" braucht, nach dem Vorgange von Paulus angewandt worden. Deßgleichen habe ich von demselben den Namen „Punktreihe" aufgenommen, habe mich dagegen nicht entschließen können, mich des von ihm eingeführten Ausdrucks „Vielstrahl" statt des sonst üblichen „Strahlbüschel" zu bedienen, denn das Wort „Strahlbüschel" drückt die Analogie mit „Punktreihe" meiner Meinung noch besser aus als „Vielstrahl", indem sich „Punkt" und „Strahl", „Reihe" und „Büschel" wechselseitig entsprechen. Nach Steiner's, Seydewitz's und von Staudt's Vorgange habe ich den auf Strahlbüschel bezüglichen Sätzen eine größere Selbstständigkeit eingeräumt, als Paulus, weil ich glaube, daß die Analogie der Gesetze, die bei Punktreihen, und derer, die bei

Ausgabe benutzt worden sind (Avertissement. pag. VI., VII.). Die oben aus der Bossut'schen (Haager) Ausgabe abgedruckten Schriften Pascal's stehen in der von Lahure besorgten im 2. Theil (der überhaupt die mathematischen und physikalischen Werke Pascal's enthält) Seite 354. — 357., Seite 391. — 392., Seite 638. — 640.; leider aber finden sich in den „Essais pour les coniques", sowie in dem „Lettre de M. Leibnitz à M. Périer" verschiedene, zum Theil das Verständniß sehr erschwerende, Druckfehler; auch heißt es im letzteren: „Essais pour les coniques" statt: „Essai pour les coniques" (s. o.). Die Pariser Ausgabe der Werke Pascal's habe ich nicht gesehen; auch citiren Poncelet und Chasles stets die von mir benutzte Haager Ausgabe, und auch Lahure bezieht sich stets nur auf diese.

19) Chasles: Traité de géométrie supérieure. pag. 435. art. 609.

Strahlbüscheln gelten, besonders lehrreich ist. Die Sinus-Doppelverhältnisse und überhaupt die trigonometrischen Functionen, welche Paulus gänzlich weggelassen hat, wie es scheint, weil er die Anwendung derselben als einer möglichst rein geometrischen Darstellung unangemessen ansieht, mochte ich nicht entbehren, vielmehr habe ich mich im Gebrauche derselben nach Steiner gerichtet und sie als wirklich geometrische Begriffe[20]), wo es nöthig war, angewandt, dagegen, wie ich schon oben andeutete, den von Paulus und von Staudt gemachten Gebrauch des Imaginären aus den Gründen vermieden, welche ersteren die trigonometrischen Functionen verwerfen ließen. Die Darstellung so ausschließlich geometrisch zu halten, wie es von Staudt gethan, schien mir nicht natürlich, ich habe daher auch Rechnungen, wo der Gedankengang selbst darauf hinführte, ohne Bedenken aufgenommen. Desgleichen kann ich mich der Meinung nicht anschließen, daß es einem geometrischen Werke zum Vorzuge gereiche, wenn es, wie das von Staudt'sche, gar keine Figuren enthält. Vielmehr habe ich deren möglichst viele beigegeben[21]), da ich, ganz abgesehen von der wesentlichen Erleichterung, die für das Studium des Buches daraus erwächst, glaube, daß der hauptsächlichste Vortheil der geometrischen Methode eben in der Anschaulichkeit beruht, welche durch ein Weglassen der Figuren, die selbst zu verzeichnen dem Leser nicht füglich zugemuthet werden kann, verloren geht. Was endlich den Titel betrifft, so konnte ich einestheils die Bezeichnung: „Geometrie der Lage", die von Staudt angewandt, nicht gebrauchen, da meine Auffassung von der seinigen verschieden ist; anderntheils wollte mir die Benennung: „neuere Geometrie" nicht gefallen, denn sie läßt — ganz abgesehen davon, wie relativ die Begriffe: „alt", „neu", „neuer" sind — da sie von der Zeit hergenommen, die Zeit an sich aber für die Felder der Wissenschaft, die angebaut werden, etwas ganz Unwichtiges ist, nichts vom Wesen desjenigen Zweiges der Geometrie ahnen, den sie bezeichnen soll. Eben dieser Unbestimmtheit wegen könnte der Namen: „neuere Geometrie",

---

20) Vergl. Steiner: **Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander.** § 3. Seite 5.

21) Da durch ein Versehen in der lithographischen Anstalt, unter Umständen, welche eine Aenderung leider unmöglich machten, auf den im Uebrigen möglichst genau und correct ausgeführten Figurentafeln von Taf. V. an statt der von mir durchgehends gebrauchten deutschen Buchstaben lateinische Schreibe-Schrift angewandt worden war, eine solche aber von einer zu den Typen, mit welchen der Text gedruckt worden, passenden Größe nicht gefunden werden konnte, so mußte die auf Taf. V. bis XXII. vorkommende lateinische Schreibe-Schrift im Text durch Ronde-Schrift wiedergegeben werden.

wenn man nämlich das Wesen einer Wissenschaft nur in den Resultaten, nicht in den Resultaten und der Methode sucht, allen Werken zum Titel dienen, welche die oben erwähnten Lehren zum Gegenstande haben, auch wenn sie, wie z. B. die von Paulus und Witzschel, auf ganz verschiedene Principien basirt sind, denn alle enthalten in größerer oder geringerer Vollständigkeit dieselben Resultate. Freilich würde ein solcher Name nach verschiedenen Seiten hin ausgelegt werden können, wenn er nicht durch Zusätze, die aber oft schwerfällig und schleppend sein würden, erläutert wird. Diese Umstände, sowie der, daß ich es für Pflicht halte, auch äußerlich den Inhalt eines Buches nach Resultaten und Methode so genau anzugeben, als es in der Kürze möglich ist, bestimmte mich, den Titel: „Projection in der Ebene" zu wählen. Ich fürchte nicht, daß man es tadeln wird.

Schließlich habe ich die im Eingange erwähnten Werke, sowie die „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der Planimetrie von Gandtner und Junghans. Berlin. Weidmannsche Buchhandlung. 1856 und 1859", die „Elemente der Projectionslehre mit Anwendungen der Perspective auf die Geometrie, von Anger. Danzig. 1858, bei Kafemann", und das „Mémoire sur les lignes du second ordre; par C. J. Brianchon, Capitaine d'Artillerie, ancien élève de l'École Polytechnique. À Paris, chez Bachelier, libraire, quai des Augustins, No. 55. 1817", als diejenigen, durch welche ich bei Abfassung vorliegender Bogen unterstützt und gefördert worden bin, mit schuldigem Danke zu nennen. Unter ihnen wieder waren es die oben erwähnten ausgezeichneten Arbeiten von Steiner, Seydewitz, Essen, Paulus, — auf des Letzteren: Grundlinien der neueren ebenen Geometrie verweise ich auch deswegen, weil man daselbst die Lehre von den Berührungen, die ich unterdrücken mußte, um den Umfang des Buches nicht zu sehr zu vergrößern, vollständig, wenn auch mittelst der Theorie des Imaginären, entwickelt findet — welche mir vorzugsweise nützten, denn die Auffassung, welche mich leitete, nähert sich am meisten den in diesen Werken durchgeführten Methoden, wenn sie sich auch in wesentlichen Punkten von ihnen unterscheidet. Letzterer Umstand veranlaßte mich, an verschiedenen Stellen eigene Wege einzuschlagen und dieselben auf längere Strecken zu verfolgen, um den Stoff zu einem systematisch geordneten und organisch gegliederten Ganzen zusammenzuarbeiten. In wie weit ich dieses Ziel, welches ich mir gesteckt, erreicht habe, das überlasse ich unbefangenen Sachverständigen, auch wenn sie den Standpunkt, von welchem aus ich vorliegende Blätter betrachtet wünschte, nicht zu dem ihrigen machen zu können glauben, zu beurtheilen. Wenigstens habe ich, wenn ich auch weit davon

entfernt bin, zu meinen, daß das Geleistete vollkommen und untadelhaft sei, das Bewußtsein, überall und stets Wahrheit und Gründlichkeit, nirgends bloßen äußern Schein im Auge gehabt zu haben. Möge es mir gelungen sein, etwas zu einer naturgemäßen und ungekünstelten Darstellung geometrischer Lehren beizutragen!

Eisenach, am 23. November 1861.

H. Weißenborn.

Inhalt.

Bemerkung.

Der lateinischen Schreibe-Schrift auf den Figurentafeln V. bis XXII. entspricht Ronde-Schrift im Text.

Verbesserungen.

Seite 19. Zeile 10. von unten lies: $\frac{\mathrm{B}\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}}$ statt: $\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}}$.

„ 36. „ 1. und 2. von oben sind die in der linken Spalte stehenden Worte: „jeden drei übrigen, z. B. b und b′, c“ in die rechte Spalte zu versetzen, so daß der zweite Theil der Erklärung 5. lautet:

oder auch:
Zwei Punktreihen s,ABCDE .... und s′,A′B′C′D′E′ .... von der Beschaffenheit, daß jede zwei Punkte, z. B. A und A′, mit jeden drei übrigen, z. B. B und B′, C und C′, D und D′, gleiche Doppelverhältnisse bilden, so daß also

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$$

ist, heißen conform. Fig. 23*).

oder auch:
Zwei Strahlbüschel S,abcde .... und S′,a′b′c′d′e′ .... von der Beschaffenheit, daß jede zwei Strahlen, z. B. a und a′, mit jeden drei übrigen, z. B. b und b′, c und c′, d und d′ gleiche Sinus-Doppelverhältnisse bilden, so daß also

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} : \frac{\sin a'd'}{\sin b'd'}$$

ist, heißen conform. Fig. 23*).

„ 37. „ 7. von unten lies: $\frac{\frac{A'C'}{B'C'}}{k} = \lambda$ statt: $\frac{\frac{A'C'}{B'C'} = \lambda.}{k}$

„ 58. „ 15. von oben lies: unbegrenzt statt: begrenzt.

„ 120. „ 23. von oben lies: ρ, statt: ρ'.

„ 181. „ 10. von oben lies: $\sqrt{c^2 - h'^2_{a'}}$ statt: $\sqrt{c'^2 - h'^2_{a'}}$.

„ 181. „ 14. von oben lies: $\sqrt{c'^2 - h^2_a}$ statt: $\sqrt{c'^2 - h'^2_{a'}}$.

„ 240. „ 4. der Tabelle T_1 lies: $(B_2 - A_2)$ statt: $(B_1 - A_2)$.

„ 240. „ 5. der Tabelle T_1 lies: $(A_2 - B_1)$ statt: $(A_2 - B_2)$.

„ 328. „ 22. von oben lies: Involutionsaxe statt: Involutiosaxe.

„ 348. „ 8. von unten lies: ρ_1 statt: S_1.

„ 414. „ 27. von oben lies: und sie die statt: und die.

„ 448. „ 21. von oben lies: P statt: P′.

Einleitung.

Den Gegenstand der Geometrie der Lage oder, wie sie auch genannt wird, der neueren Geometrie bildet die Auffindung der Gesetze der Projection und die Ableitung der Eigenschaften der die Projection bildenden Figur aus denen der projicirten und umgekehrt. Es sei z. B. ein ebenes Fünfeck abcde Fig. 1.a und eine Ebene MN gegeben, so wird dem in S befindlichen Auge des Beobachters durch das zwischen S und der MN gelegene Fünfeck abcde das Fünfeck ABCDE in der Ebene MN verdeckt; oder auch: es befinde sich in S ein leuchtender Punkt, abcde sei ein undurchsichtiger fünfeckiger Körper von geringer Dicke, so wird er auf die Ebene MN einen Schatten von der Gestalt ABCDE werfen. Die Figur ABCDE nennt man die Projection der abcde, die Ebene MN die Projectionsebene, den Punkt S den Augen- oder Gesichtspunkt, die Geraden SaA, SbB u. s. w. die Projectionsstrahlen. Die Wissenschaft, welche von einer Figur oder einem Körper abcde die Projection ABCDE finden lehrt, heißt Perspective, das Bild ABCDE einer Figur oder eines Körpers entwerfen, heißt ihn projiciren. Es kann letzteres auf verschiedene Weise geschehen. Man kann nämlich den Augenpunkt S 1) in endlicher Entfernung von der Projectionsebene MN annehmen, Fig. 1.a, dann heißt die Projection ABCDE die perspectivische Projection von abcde; man kann den Augenpunkt S 2) in unendlicher Entfernung von der Projectionsebene MN annehmen, so daß alle Projectionsstrahlen SaA, SbB ...., weil S in unendlicher Ferne sich befindet, parallel sind und zwar können sie a) schief auf die Projectionsebene fallen Fig. 1.b, dann heißt die Projection ABCDE die plagiographische Projection, und die Wissenschaft, derartige Bilder zu entwerfen: Militär- oder Cavalierperspective; läßt man b) die Projectionsstrahlen senkrecht auf die Projectionsebene treffen, Fig. 1.c, so heißt ABCDE die orthographische Projection von abcde; wählt man insbesondere für die beliebige Projectionsebene MN α) eine horizontale Ebene, so führt die Projection ABCDE den Namen: Grundriß, ichnographischer Riß, Ansicht aus der Vogelperspective; wählt man als Projectionsebene β) eine verticale Ebene, so wird die Projection ABCDE Aufriß, orthographischer Riß, Profilansicht genannt.

Man sieht aus dem Bisherigen, daß wir es, wenn wir unsere Aufgabe in ihrer ganzen Ausdehnung lösen wollen, mit räumlichen Figuren zu thun haben, mit Bündeln von Strahlen SA, SB, SC...., die in einem in endlicher oder unendlicher Entfernung liegenden Punkte S zusammenlaufen, mit Ebenen MN, die diese Strahlbündel schneiden u. s. w. Es ist jedoch naturgemäß, daß man von dem einfachsten Falle ausgeht und, zu verwickelteren Verhältnissen fortschreitend, dieselben zu beherrschen sucht. Wir wollen uns daher im Folgenden zunächst mit der Projection in der Ebene beschäftigen, deren Gesetze, wie sich zeigen wird, ein wohl abgeschlossenes Ganze bilden.

Kap. I.
Gebilde erster Stufe.

§ 1.
Punktreihe und Strahlbüschel.

Offenbar haben wir, um die Gesetze der Projection zu erforschen, zweierlei Gegenstände einer Betrachtung zu unterwerfen, nämlich:

Die Figuren, welche projicirt werden.	Die Projectionsstrahlen, welche projiciren.

Zunächst beschäftigen wir uns mit der Betrachtung der zu projicirenden Figuren und fangen vom Einfachsten an. Die einfachsten Figuren sind aber Punkte. Es seien also zwei Punkte A und A′ Fig. 2. auf einander zu projiciren. Zu dem Zwecke verbinde man sie durch eine Gerade, sehe diese als Projectionsstrahl an und nehme auf ihr einen beliebigen Punkt S an, so ist dieser offenbar der Gesichtspunkt; und zwar kann man sowohl A′ als Projection von A ansehen, indem man S so annimmt, daß A zwischen A′ und S liegt, als auch A als Projection von A′, indem man S so annimmt, daß A′ zwischen A und S liegt. Es sind aber mit diesen zwei Annahmen die Möglichkeiten für die Lage des Punktes S noch nicht erschöpft, denn augenscheinlich kann derselbe auch zwischen A und A′ gewählt werden. Dann ist allerdings nicht mehr einer der beiden Punkte die Projection des anderen, wenigstens nicht in dem in der Einleitung erwähnten Sinne, denn keiner von ihnen wird dem in S zwischen A und A′ befindlichen Auge durch den anderen verdeckt, wie es geschieht, wenn S sich außerhalb der endlichen Strecke AA′ befindet. Der Grund nämlich, warum im letzteren Falle der eine durch den andern verdeckt wird, liegt in der physikalischen Beschaffenheit und Natur des Lichts, nach welcher ein von einem leuchtenden Punkte ausgehender Strahl sich geradlinig fortbewegt, zugleich aber auch die Eigenschaft hat, durch materielle Körper, auf die er auf seinem Wege trifft, auf mannigfache Weise modificirt, namentlich an Fortsetzung seines geradlinigen Weges verhindert zu werden. An letzteren Umstand denkt man meist im gewöhnlichen Leben, wenn man von „Projection" spricht. Sehen wir

aber hier von der physikalischen Eigenschaft des Lichtes ab, von materiellen Körpern an Verfolgung des geradlinigen Weges verhindert zu werden, denken wir uns auch die vorkommenden Figuren, Punkte, Gerade u. s. w. nicht als materiell, sondern als mathematisch, mit einem Worte, fassen wir den Vorgang der Projection nicht mehr physikalisch, sondern rein mathematisch, also allgemeiner und nennen im Folgenden zwei Punkte: für einen Gesichtspunkt S in Projection stehend, wenn beide auf einer und derselben durch S gehenden geraden Linie liegen, so hindert nichts, auch wenn S zwischen A und A′ liegt, zu sagen, A sei die Projection von A′ oder A′ die von A. Zugleich bemerkt man, daß nach dieser Erklärung, auch wenn S nicht zwischen A und A′ sich befindet, der Unterschied zwischen „projicirtem" und „die Projection bildenden" Punkte ganz wegfällt, weil wir von dem physikalischen Umstand, daß der eine seinen Schatten auf den anderen werfe, oder ihn verdecke, ganz absehen. Ganz dasselbe findet auch Anwendung, wenn nicht mehr von Punkten, sondern von ganzen Figuren, wie z. B. von den Fünfecken ABCDE und abcde, die Rede ist; es kann daher eine jede als projicirte Figur, aber auch als die Projection der anderen angesehen werden.

Gehen wir jetzt zum Projiciren von geraden Linien, die sich in einer und derselben Ebene befinden, über, so erhellt sofort, daß hier eine genauere Bestimmung, was darunter zu verstehen sei, nöthig ist. Der Begriff des Projicirens bleibt nämlich völlig unbestimmt und vage, so lange nicht die Punkte bestimmt sind, welche auf beiden Geraden sich in Projection befinden sollen. Denn wäre ohne diese Bestimmung die Aufgabe gestellt, die Geraden s und s′ Fig. 3 auf einander zu projiciren, so brauchte man nur in derselben Ebene beliebige Gerade zu ziehen, die sich in einem und demselben Punkte S_1 schnitten und die s und s′ bezüglich in A_1, B_1, C_1, D_1; A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, träfen, dann wäre A'_1 die Projection von A_1, C'_1 die von C_1 u. s. w. Nichts aber hinderte, andere Gerade zu ziehen, die sich in einem andern Punkte S_2 schnitten, so daß A'_2 die Projection von A_2, B'_2 die von B_2 u. s. w. wäre. Zöge man nun S_2A_1, so erhielte man im Allgemeinen einen von A_1 verschiedenen Punkt A''_1 der s′ als Projection von A_1 und ebenso, Punkte, die nicht mit B'_1, C'_1, zusammenfielen, als Projectionen von B_1, C_1, D_1, u. s. w. Da man nun Gerade ziehen kann, die sich in jedem beliebigen Punkte S der durch die Geraden s und s′ bestimmten Ebene schneiden, so sieht man, daß die Forderung, in der Form, wie sie gestellt war, eine Gerade auf eine andere zu projiciren, etwas völlig Unbestimmtes enthält und daß die Zahl ihrer Auflösungen unendlich ist. Es ist daher nothwendig, die Aufgabe präciser und schärfer zu stellen. Dies geschieht offenbar dadurch, daß noch verlangt wird, ein oder mehrere Punkte der einen Geraden, z. B. die Punkte A'_1, C'_1, B'_1, D'_1 der s′ sollen die Projectionen der auf s gegebenen Punkte, bezüglich A_1, C_1, B_1, D_1 sein. In diesem Falle würde offenbar die Annahme des Gesichtspunkts in S_2 unrichtig sein. Zugleich bemerkt man

hiebei, daß bei einer solchen Forderung die Gerade in einer Bedeutung auftritt, die sie in der gewöhnlichen Geometrie nicht hat. Bekanntlich nämlich dient die Gerade einmal dazu, um eine Richtung zu bezeichnen, sodann aber auch um die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten anzugeben. Bei der Projection also wird sie in einer aus beiden zusammengesetzten Bedeutung aufgefaßt, einmal als eine gewisse Richtung s, s′ verfolgend, zweitens als die Abstände einer Anzahl von Punkten, die in der Richtung der Geraden auf einander folgen, von einander angebend oder als Träger einer Anzahl von Punkten, die in einer gegebenen Richtung in gegebenen Abständen auf einander folgen.

Offenbar entsteht aber mit dieser Auffassung der Geraden, wie sie der Vorgang des Projicirens verlangt, noch ein anderes, hier zum ersten Male in der Geometrie erscheinendes Gebilde, nämlich eine Menge von Projectionsstrahlen a, c, b, d, .., die sich alle in einem und demselben Punkt S Fig. 4 schneiden. Bekanntlich hat in der gewöhnlichen Geometrie auch der Punkt, wie die Gerade, eine doppelte Bedeutung, einmal einen Ort im Raume zu bezeichnen, zweitens den Scheitel eines Winkels zu bilden, und somit den Richtungsunterschied der in ihm sich schneidenden Geraden anzugeben. Bei der Projection nun kommt der Punkt in einer aus beiden zusammengesetzten Bedeutung vor, indem er einmal als Bezeichnung des Ortes dient, an welchem das Auge des Beobachters sich befinden soll, sodann aber auch indem er den Scheitel der von den Projectionsstrahlen a, c, b, d, .. gebildeten Winkel bildet, oder einen Ort im Raum bezeichnet, von welchem eine Anzahl Projectionsstrahlen ausgeht. Diese aus dem Begriff der Projection hervorgehende Auffassung wird folgerichtig auch durch einen besonderen Namen hervorgehoben.

1. Erklärung. Eine Gerade s, insofern sie Trägerin von Punkten ist, welche projicirt werden sollen, oder die Projectionen anderer bilden, soll im Folgenden: „**Punktreihe**“ genannt werden.

1. Erklärung. Ein Punkt S, insofern er Träger von Strahlen ist, durch welche eine Gerade auf eine andere projicirt wird, soll im Folgenden: „**Strahlbüschel**“ genannt werden.

Punktreihe und Strahlbüschel sollen unter dem gemeinsamen Namen: „**Gebilde erster Stufe**“ oder „**Grundgebilde**“ zusammengefaßt werden.

2. Erklärung. Eine Gerade, insofern sie dazu dient, eine Richtung anzugeben, soll im Folgenden durch einen kleinen Buchstaben a, b, c, ... s, ꝛc. bezeichnet werden. Fig. 4.

2. Erklärung. Ein Punkt, insofern er dazu dient, einen Ort im Raume anzugeben, soll im Folgenden durch einen großen Buchstaben A, B, C, ... S, ꝛc. bezeichnet werden. Fig. 4.

Ist die Richtung einer Geraden durch zwei Punkte A, C, angegeben, und ist es unthunlich, sie mit einem einzigen kleinen Buchstaben zu bezeichnen, so soll sie im Folgenden durch (A−C) bezeichnet werden; es bezeichnet dann also (A−C) die Richtung s ꝛc. Fig. 4.

Die Entfernung zweier Punkte A, C, soll im Folgenden durch AC bezeichnet werden. Fig. 4.

Eine Gerade, insofern sie als Punktreihe, also als Trägerin der Punkte A, C, B, D...., die in der Richtung s auf einander folgen, erscheint, soll im Folgenden durch s,ACBD.... bezeichnet werden. Fig. 4.

Ist der Ort eines Punktes durch den Durchschnitt zweier Geraden a, c angegeben, und ist es unthunlich, ihn mit einem einzigen großen Buchstaben zu bezeichnen, so soll er im Folgenden durch (a·c) bezeichnet werden; es bezeichnet dann also (a·b) den Punkt S ꝛc. Fig. 4.

Der Winkel zwischen zwei Geraden a, c, soll im Folgenden durch ac bezeichnet werden. Fig. 4.

Ein Punkt, insofern er als Strahlbüschel, also als Träger der Strahlen a, c, b, d, ..., die in dem Punkte S zusammenstoßen, erscheint, soll im Folgenden durch S,acbd.... bezeichnet werden. Fig. 4.

Nach diesen Erklärungen wenden wir uns nun auch zu der im Eingange dieses Paragraphen rechts stehenden Aufgabe, die Projectionsstrahlen zu untersuchen. Offenbar ist auch diese Forderung eine sehr unbestimmte; denn selbstverständlich kann es nicht unsere Aufgabe sein, bei zwei in Projection stehenden Geraden oder (nach Erklärung 1) Punktreihen s,ACBD.... und s′,A′C′B′D′.... Fig. 4. aus gegebenen Bestimmungsstücken die Länge der Strecken AS, A′S, CS, C′S ꝛc., oder die Winkel ac, cb ꝛc. zu berechnen; dieses würde eine rein trigonometrische Aufgabe sein. Es fragt sich also, auf welche Weise sonst die Projectionsstrahlen einer mathematischen Betrachtung unterworfen werden können. Darauf führt sogleich die einfache Bemerkung, daß augenscheinlich dieselbe Punktreihe s,ACBD auf beliebig viele andere, z. B. auf s′,A′C′B′D′, oder auf s″,A″C″B″D″ u. s. w. projicirt werden kann Fig. 5., und zugleich auch, daß es beliebig viele Gesichtspunkte und also auch beliebig viele Strahlbüschel giebt, z. B. S,acbd, S′,a′c′b′d′ u. s. w. Diese Strahlbüschel haben die Eigenthümlichkeit, daß die Durchschnittspunkte von je zweien, wie a und a′, c und c′, b und b′ u. s. w. auf einer und derselben Geraden s liegen. Diese Eigenschaft machen wir zum Anhaltspunkt für unsere Untersuchung. Zunächst erinnern wir uns, daß zwei Punktreihen dann als in Projection stehend angesehen werden, wenn die verschiedenen Strecken AC und A′C′, CB und C′B′, u. s. w. unter demselben Winkel, bezüglich ac, cb u. s. w. gesehen werden; jetzt also betrachten wir den umgekehrten Fall, wo dieselben Strecken AC, CB u. s. w. unter

verschiedenen Winkeln, bezüglich ac und a′c′, cb und c′b′ u. s. w. gesehen werden. Wegen der Analogie, die sich demnach zwischen Punktreihe und Strahlbüschel zeigt, wenden wir gleiche Ausdrücke für beide Fälle an und setzen mit Rücksicht auf das Vorige fest:

3. Erklärung. Zwei Punktreihen s,ACBD........ und s′,A′C′B′D′....... heißen: „in Projection stehend", oder „auf einander projicirt", wenn die Verbindungsgeraden (A – A′), (C – C′), (B – B′) u. s. w. sich in einem und demselben Punkte S schneiden. Fig. 5.

3. Erklärung. Zwei Strahlbüschel S,acbd........ und S′,a′c′b′d′.... heißen: „in Projection stehend", oder „auf einander projicirt", wenn die Durchschnittspunkte (a·a′), (c·c′), (b·b′) u. s. w. auf einer und derselben Geraden s liegen. Fig. 5.

Die links bezeichnete Ausdrucksweise ist, wie im Früheren bereits erwähnt wurde, längst im Gebrauch, da die Bedürfnisse des praktischen Lebens zu dieser Auffassung öfter nöthigen, sie ist deswegen auch zum Ausgangspunkte unserer Untersuchung gemacht worden; auf die rechts bezeichnete Ausdrucksweise führt, wie im Vorigen entwickelt wurde, die wissenschaftliche Untersuchung der Projectionsverhältnisse.

Gehen wir jetzt auf dieselbe genauer ein, so entsteht zunächst die Frage:

Wie viel Punkte zweier Punktreihen dürfen oder müssen gegeben sein, damit die eine als Projection der anderen angesehen werden kann; und, wenn sich zeigen sollte, daß dies nicht bei jeder beliebigen Anzahl willkürlich gewählter Punkte möglich ist, unter welchen Bedingungen kann eine Punktreihe als Projection einer anderen angesehen werden?

Wie viel Strahlen zweier Strahlbüschel dürfen oder müssen gegeben sein, damit der eine als Projection des anderen angesehen werden kann; und, wenn sich zeigen sollte, daß dies nicht bei jeder beliebigen Anzahl willkürlich gewählter Strahlen möglich ist, unter welchen Bedingungen kann ein Strahlbüschel als Projection eines anderen angesehen werden?

Wir suchen die Antwort auf diese Frage zu erhalten, indem wir eine Reihe durch diese Frage gestellter Aufgaben, vom Einfachsten zum Zusammengesetzteren fortschreitend, zu lösen suchen. Der einfachste, bei Punktreihen vorkommende Fall ist der, daß sie je zwei Punkte enthalten, bei Strahlbüscheln, daß sie je zwei Strahlen enthalten. Wir kommen also auf die

4. Aufgabe. Gegeben zwei, aus je zwei Punkten bestehende Punktreihen s,AB und s′,A′B′; dieselben sollen der Art auf einander projicirt werden, daß A′ die Projec-

4. Aufgabe. Gegeben zwei, aus je zwei Strahlen bestehende Strahlbüschel S,ab und S′,a′b′; dieselben sollen der Art aufeinander projicirt werden, daß a′ die Pro-

tion von A, B′ die Projection von B ist. Fig. 6.

jection von a, b′ die Projection von b ist. Fig. 7.

Auflösung. Wir wenden uns zunächst zur Aufgabe links. Die einfachste Art, sie zu lösen, würde unstreitig die sein, daß man beide Punktreihen so legte, daß A′ mit A, oder B′ mit B zusammenfiele, dann könnte man offenbar jeden beliebigen Punkt der Geraden (B — B′) oder (A — A′) als Gesichtspunkt ansehn. Wir können aber auch anders verfahren, nämlich so: Man verbinde A und A′, B und B′ durch die Geraden (A — A′), (B — B′), oder a,b, Fig. 6., die sich in einem Punkte S schneiden, so kann man S als Gesichtspunkt, und a,b als Projectionsstrahlen ansehn. Zugleich sieht man, daß man auch, wenn man a und b über S hinaus verlängert und SA″ = SA′, SB″ = SB′ macht und (A″ — B″), oder s″ zieht, die Strecke A″B″ = A′B′ wird; es kann also die Punktreihe s′,A′B′ auch in die Lage s″,A″B″ gebracht werden, und bleibt dennoch in Projection mit s,AB. Zugleich sieht man, daß man auch den beiden Punktreihen s,AB und s′,A′B′ eine andere Lage gegen einander hätte geben können, so daß sich dann die Projectionsstrahlen a′,b′ in einem Punkt S′ geschnitten hätten, und daß der Winkel A′S′B′ oder a′b′ ein anderer geworden wäre als ASB oder ab, und daß auch hier s′,A′B′ nach s″,A″B″ hätte gelegt werden können. — Auch die Aufgabe rechts würde am einfachsten gelöst, indem man die Strahlbüschel S,ab und S′,a′b′ so auf einander legte, daß a′ mit a, oder b′ mit b zusammenfiele; dann könnte man offenbar jede durch (b · b′) oder (a · a′) gehende Gerade als diejenige ansehn, auf der sich die Durchschnitte von a und a′, b und b′, befinden. Man kann aber auch Fig. 7. die Durchschnittspunkte von a und a′, b und b′, also die Punkte (a · a′) und (b · b′) oder A und B suchen und (A — B) oder s ziehn, so stehn S,ab und S′,a′b′ für diese Gerade in Projection. Offenbar hätte man auch von S′ auf s ein Loth fällen, dieses auf der anderen Seite von s fortsetzen, die jenseitige Strecke gleich der diesseitigen machen, und von dem so erhaltenen Punkte S″ die Geraden (S″ — A), (S″ — B) oder a″,b″ ziehn können, so wäre Winkel a″b″ = a′b′, und also Strahlbüschel S″,a″b″ gleich S′,a′b′ geworden; es hätte sich also S′,a′b′ auch in die Lage S″,a″b″ bringen lassen und würde auch dann mit S,ab in Projection stehn. Ferner sieht man, daß man den Strahlbüschel S′,a′b′ in eine andere Lage, als die ursprünglich gegebene hätte bringen können, wodurch man eine andere Gerade s′ erhalten hätte, für welche S,ab und S′,a′b′ in Projection stehn, und daß man auch hier S′,a′b′ nach S″,a″b″ hätte legen können, es stände dann S′,a′b′ mit S,ab für die von AB verschiedene Strecke A′B′ in Projection. Man erhält also den

5. Lehrsatz. Zwei, je zwei Punkte enthaltende Punktreihen s,AB und s′,A′B′ lassen sich jederzeit so auf ein-

5. Lehrsatz. Zwei, je zwei Strahlen enthaltende Strahlbüschel S,ab und S′,a′b lassen sich jederzeit so auf

ander projiciren, daß A' die Projection von A, B' die Projection von B wird; und zwar kann dies so geschehen, daß die Verbindungsgeraden a,b; a',b' jeden beliebigen Winkel mit einander bilden. Für jeden solchen Winkel aber giebt es eine doppelte Lage der Punktreihen, es kann nämlich sein Scheitel S entweder innerhalb des von den Geraden s und s''; s und s' eingeschlossenen spitzen Winkels, oder innerhalb dessen Nebenwinkel liegen. Fig. 6.

einander projiciren, daß a' die Projection von a, b' die Projection von b wird; und zwar kann dies so geschehen, daß die Durchschnittspunkte A,B, A',B' jede beliebige Entfernung von einander haben. Für jede solche Gerade aber giebt es eine doppelte Lage der Strahlbüschel; es kann nämlich der Durchschnittspunkt der Geraden s mit der Geraden $(S-S'')$, $(S-S')$ entweder innerhalb der endlichen Strecke SS'', oder auf der Verlängerung von SS' liegen. Fig. 7.

Wir gehen nun über zur nächsten

6. Aufgabe. Gegeben zwei, je drei Punkte enthaltende Punktreihen s,ACB und $s',A'C'B'$; dieselben sollen so auf einander projicirt werden, daß A' die Projection von A, C' die Projection von C, B' die Projection von B ist. Fig. 8.

6. Aufgabe. Gegeben zwei, je drei Strahlen enthaltende Strahlbüschel S,acb und $S',a'c'b'$; dieselben sollen so auf einander projicirt werden, daß a' die Projection von a, c' die Projection von c, b' die Projection von b ist. Fig. 9.

Auflösung, und zwar zunächst der Aufgabe links. Die einfachste wäre wieder die, daß man beide Punktreihen unter einem beliebigen Winkel so auf einander legte, daß ein Paar Punkte, von denen einer die Projection des andern werden soll, z. B. A und A' in ihrem Durchschnittspunkte zusammenfielen Fig. 8.a., und dann $(C-C')$, $(B-B')$ oder c,b zöge, die sich in S schnitten. Eine allgemeinere Auflösung ist folgende: Man ziehe durch A,C,B Fig. 8.b. die Geraden a,c,b, die sich in einem und demselben, übrigens beliebigen Punkte S schneiden, und ziehe durch irgend einen Punkt U einer dieser Geraden, z. B. der b eine Parallele zu einer der anderen, z. B. zu a, welche die dritte Gerade c in T trifft; dann bestimme man auf der b einen Punkt V so, daß sich verhält $SU : VU = A'C' : B'C'$ und verbinde V mit T durch eine Gerade, welche die a in W trifft, so verhält sich wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke VUT und VSW $WT : VT = SU : VU$, also $WT : VT = A'C' : B'C'$. Nun mache man von T aus die Strecke $TR = C'B'$ und ziehe durch R eine Parallele zu $\mathfrak{B}'$, welche die b in c trifft, und ziehe durch $\mathfrak{B}'$ eine Parallele

zu (V — W), so muß, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke VST und $\mathfrak{B}'S\mathfrak{C}'$, WST und $\mathfrak{A}'S\mathfrak{C}'$ sich verhalten $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}' : WT = S\mathfrak{C}' : ST$ und $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' : VT = S\mathfrak{C}' : ST$; also $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}' : WT = \mathfrak{B}'\mathfrak{C}' : VT$ oder $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}' : \mathfrak{B}'\mathfrak{C}' = WT : VT$ oder $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}' : \mathfrak{B}'\mathfrak{C}' = A'C' : B'C'$. Da nun $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' = TR = B'C'$ ist, so muß auch $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}' = A'C'$ sein. Es ist also Punktreihe $\mathfrak{s}', \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\mathfrak{B}'$ gleich der zweiten gegebenen Punktreihe $s', A'C'B'$, oder, letztere liegt, wenn man sie in die Lage $\mathfrak{s}', \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\mathfrak{B}'$ bringt, so, daß die Aufgabe erfüllt ist. Man sieht, daß sie auch jenseits S nach $\mathfrak{s}'', \mathfrak{A}''\mathfrak{C}''\mathfrak{B}''$ gelegt werden könnte, wenn $S\mathfrak{A}'' = S\mathfrak{A}'$, $S\mathfrak{B}'' = S\mathfrak{B}'$ gemacht ist. Wie man aber auch die Geraden a,c,b gewählt haben mag, stets ist die Auflösung möglich. — Auch die Aufgabe rechts könnte am leichtesten gelöst werden, indem man die Strahlbüschel S,acb und S',a'c'b' mit einem Paar Strahlen, deren einer die Projection des anderen werden soll, auf einander legt, z. B. mit a und a' Fig. 9.a. dann würden sie für die Verbindungsgerade der Durchschnittspunkte (c · c'), (b · b') in Projection stehn. Allgemeiner ist folgende Lösung: Man ziehe eine Gerade s, Fig. 9.b., welche die Strahlen des Strahlbüschels S,acb in den beliebigen Punkten A, C, B schneidet. Dann construire man über AC einen Kreisbogen, der den Winkel a'c', und über BC einen Kreisbogen, der den Winkel b'c' faßt. Vom Durchschnittspunkte $\mathfrak{S}'$ der beiden Kreisbogen ziehe man die Geraden ($\mathfrak{S}'$ — A), ($\mathfrak{S}'$ — C), ($\mathfrak{S}'$ — B) oder $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}'$, so ist Winkel $\mathfrak{a}'\mathfrak{c}' = a'c'$, Winkel $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' = b'c'$. Es läßt sich also Strahlbüschel S',a'c'b' in die Lage $\mathfrak{S}', \mathfrak{a}'\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'$ bringen, in der er mit S,acb in Projection ist. Zugleich sieht man, daß er auch in die Lage $\mathfrak{S}'', \mathfrak{a}''\mathfrak{c}''\mathfrak{b}''$ gebracht werden kann, wenn dieselbe Construction auf der anderen Seite von s gemacht ist. Auch diese Construction ist jederzeit möglich. Man erhält also den

7. **Lehrsatz.** Jede zwei, je drei Punkte enthaltende Punktreihen s,ACB und s',A'C'B', lassen sich so auf einander projiciren, daß A' die Projection von A, C' die von C, B' die von B wird; und zwar kann dies für jeden beliebigen Winkel ac, bc geschehen; für jeden so angenommenen Punkt S aber giebt es zwei Lagen für s',A'C'B'. Fig. 8.

7. **Lehrsatz.** Jede zwei, je drei Strahlen enthaltende Strahlbüschel S,acb und S',a'c'b', lassen sich so auf einander projiciren, daß a' die Projection von a, c' die von c, b' die von b wird; und zwar kann dies für jede beliebige Entfernung AC, BC geschehen; für jede so angenommene Gerade s aber giebt es zwei Lagen für S',a'c'b'. Fig. 9.

Es wäre nun der Fall zu untersuchen, wo verlangt wird, zwei Gerade s und s' der Art auf einander zu projiciren, daß von vier auf einer jeden von ihnen gegebenen Punkten jeder die Projection eines vorgeschriebenen Punktes der anderen Punktreihe sei. Man über-

zeugt sich jedoch leicht, daß dies im Allgemeinen zu viel verlangt ist. Denn wären z. B. die Geraden s und s′ Fig. 3. gegeben und auf ihnen bezüglich die Punkte A_1, B_1, C_1, E_1; A'_1, B'_1, C'_1, E'_1, so ist klar, daß, da E_1 rechts von C_1, E'_1 aber links von C'_1 liegt, es absolut unmöglich ist, sie in der verlangten Weise auf einander zu projiciren. Zugleich aber bemerkt man, daß, wenn unter Beibehaltung der ersten drei Punkte, verlangt worden wäre, nicht E_1 und E'_1, sondern D_1 und D'_1 sollten in Projection stehn, die Aufgabe zu lösen möglich wäre. Es müssen also, wenn die Aufgabe gestellt ist, zwei Punktreihen so auf einander zu projiciren, daß von vier gegebenen Punkten der einen Punktreihe jeder die Projection eines bestimmten Punktes der anderen werden soll, gewisse Bedingungen erfüllt sein, unter denen die Lösung der Aufgabe möglich ist. Ebenso überzeugt man sich, daß dies auch bei Strahlbüscheln sich so verhalten müsse. Diese Bedingungen haben wir demnach zu suchen. Zu dem Ende stellen wir uns die Aufgabe

Das Verhältniß der Abschnitte auf der die Projection bildenden Punktreihe zu denen der projicirten Punktreihe zu finden.

Das Verhältniß der Winkel an dem die Projection bildenden Strahlbüschel zu denen des projicirten Strahlbüschels zu finden.

um auf diese Weise Aufschluß über unsere Frage zu erhalten. Wiederum fangen wir vom einfachsten Falle an, wenn von zwei Punktreihen jede nur zwei Punkte, von zwei Strahlbüscheln jeder nur zwei Strahlen enthält.

Es seien also zwei Punkte A, B einer Punktreihe s,AB Fig. 2. von S aus auf zwei Punkte A′, B′ einer anderen Punktreihe s′,A′B′ projicirt. Man sucht das Verhältniß der Projection A′B′ zu der projicirten Strecke AB. Nennt man den Durchschnittspunkt von s und s′ $\mathfrak{S}$, und zieht $(B-\mathfrak{A}) \parallel (A'-\mathfrak{S})$ oder $(A-\mathfrak{B}) \parallel (A'-\mathfrak{S})$, so ist $\triangle AB\mathfrak{A} \sim \triangle A\mathfrak{S}A'$ oder $\triangle BA\mathfrak{B} \sim \triangle B\mathfrak{S}B'$ und daher

$$\frac{AB}{\mathfrak{A}B} = \frac{A\mathfrak{S}}{A'\mathfrak{S}};\ \frac{BA}{\mathfrak{B}A} = \frac{B\mathfrak{S}}{B'\mathfrak{S}};$$

Zugleich ist auch $\triangle S\mathfrak{A}B \sim \triangle SA'B'$ und $\triangle S\mathfrak{B}A \sim \triangle SB'A'$;

also: $$\frac{\mathfrak{A}B}{A'B'} = \frac{SB}{SB'};\ \frac{\mathfrak{B}A}{B'A'} = \frac{SA}{SA'};$$

folglich $$\mathfrak{A}B = \frac{SB}{SB'} \cdot A'B';\ \mathfrak{B}A = \frac{SA}{SA'} \cdot B'A'.$$

Setzen wir diesen Werth in die erste Gleichung ein, so nimmt sie die Gestalt an:

$$\frac{AB}{\frac{SB}{SB'} \cdot A'B'} = \frac{A\mathfrak{S}}{A'\mathfrak{S}};\ \frac{BA}{\frac{SA}{SA'} \cdot B'A'} = \frac{B\mathfrak{S}}{B'\mathfrak{S}};$$

woraus folgt:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{\mathfrak{S}A}{\mathfrak{S}A'};\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{\mathfrak{S}B}{\mathfrak{S}B'};$$

Etwas Aehnliches findet auch bei Strahlbüscheln statt. Verbindet man nämlich S und S' Fig. 7. durch eine Gerade ſ, so verhält sich nach bekannten trigonometrischen Regeln

$$\frac{\sin ab}{\sin sb} = \frac{AB}{AS}; \quad \text{oder} \quad \frac{\sin ab}{\sin sa} = \frac{BA}{BS};$$

und

$$\frac{\sin a'b'}{\sin sb'} = \frac{AB}{AS'}; \quad \frac{\sin a'b'}{\sin sa'} = \frac{BA}{BS'};$$

also ist

$$\frac{\sin ab \cdot \sin sb'}{\sin a'b' \cdot \sin sb} = \frac{AS'}{AS}; \quad \frac{\sin ab \cdot \sin sa'}{\sin a\,b' \cdot \sin sa} = \frac{BS'}{BS};$$

Aber im $\triangle$ SAS' oder SBS' verhält sich

$$\frac{AS'}{AS} = \frac{\sin ſa}{\sin ſa'}; \quad \frac{BS'}{BS} = \frac{\sin ſb}{\sin ſb'};$$

Wir haben also:

$$\frac{\sin ab}{\sin a'b'} = \frac{\sin sb}{\sin sb'} \cdot \frac{\sin ſa}{\sin ſa'}; \quad \frac{\sin ab}{\sin a'b'} = \frac{\sin sa}{\sin sa'} \cdot \frac{\sin ſb}{\sin ſb'};$$

Wir erhalten also den

8. Lehrsatz. Sind zwei Punktreihen von je zwei Punkten, s,AB und s',A'B' für einen Punkt S in Projection, und heißt der Durchschnittspunkt von s mit s' 𝔖, so findet die Gleichung statt:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{𝔖A}{𝔖A'}$$

und auch

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{𝔖B}{𝔖B'};$$

Fig. 2.

8. Lehrsatz. Sind zwei Strahlbüschel von je zwei Strahlen, S,ab und S',a'b' für eine Gerade s in Projection, und heißt die Verbindungsgerade von S mit S' ſ, so findet die Gleichung statt:

$$\frac{\sin ab}{\sin a'b'} = \frac{\sin sb}{\sin sb'} \cdot \frac{\sin ſa}{\sin ſa'}$$

und auch

$$\frac{\sin ab}{\sin a'b'} = \frac{\sin sa}{\sin sa'} \cdot \frac{\sin ſb}{\sin ſb'}$$

Fig. 7.

Der Satz links ist unter der Form AB · SB' · 𝔖A' = A'B' · SB · 𝔖A, auf welche sich die Gleichung bringen läßt, längst bekannt und heißt der Satz des Menelaos; gewöhnlich drückt man ihn so aus: Schneidet irgend eine Gerade A'S die Seiten B𝔖, BB', B'𝔖 eines Dreiecks BB'𝔖 oder deren Verlängerungen bezüglich in den Punkten A, S, A', so ist das Produkt aus solchen drei auf den Seiten entstandenen Abschnitten, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, AB · SB' · 𝔖A' gleich dem Produkte A'B' · SB · 𝔖A der anderen.

Wenden wir uns jetzt zu dem Fall, wo in beiden Punktreihen je drei Punkte, in beiden Strahlbüscheln je drei Strahlen sich befinden. Zu dem Zwecke nehmen wir noch einen Punkt C innerhalb oder außerhalb der Strecke AB an Fig. 10.a. und suchen den Werth des Doppelverhältnisses $\frac{AC}{BC} : \frac{A'C'}{B'C'}$ zu ermitteln. Zu dem Ende ziehen wir

(S−C) und durch B eine Parallele zu (A′−B′) welche der Strahl a in $\mathfrak{A}$, c in $\mathfrak{C}$ schneidet, und dann durch $\mathfrak{A}$ eine Parallele zu c, die die s in $\mathfrak{A}'$ trifft, so haben wir zunächst wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke S$\mathfrak{A}$B und SA′B′

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{B\mathfrak{C}} = \frac{A'C'}{B'C'};$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CB$\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}'$B$\mathfrak{A}$

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{B\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{A}'C}{BC};$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$A und SCA ist aber ferner

$$\frac{\mathfrak{A}'A}{CA} = \frac{A\mathfrak{A}}{SA};$$

oder

$$\frac{\mathfrak{A}'C}{AC} = \frac{S\mathfrak{A}}{SA};$$

also

$$\mathfrak{A}'C = \frac{S\mathfrak{A}}{SA} \cdot AC;$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{B\mathfrak{C}} = \frac{S\mathfrak{A}}{SA} \cdot \frac{AC}{BC};$$

oder

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{S\mathfrak{A}}{SA} \cdot \frac{AC}{BC};$$

oder

$$\frac{AC}{BC} : \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{SA}{S\mathfrak{A}};$$

Da endlich auch die Dreiecke $\mathfrak{A}$SB und A′SB′ ähnlich sind, so ist ferner:

$$\frac{S\mathfrak{A}}{SA'} = \frac{SB}{SB'};$$

also

$$S\mathfrak{A} = \frac{SB}{SB'} \cdot SA';$$

also

$$\frac{AC}{BC} : \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{SA}{SA'} : \frac{SB}{SB'};$$

Bevor wir zu den Strahlbüscheln übergehn, haben wir uns erst Gewißheit zu verschaffen, ob diese Gleichung nicht unter gewissen Bedingungen Ausnahmen erleidet. Es entsteht nämlich offenbar die Frage, ob sie auch dann noch richtig ist, wenn man s′ parallel zu c annimmt, sodann, wenn man s′ parallel zu b sein läßt. Es sei nun zunächst s′‖c Fig. 10.b., so hat man:

$$\frac{AC}{SA} = \frac{\mathfrak{A}''A}{A'A};$$

oder

$$\frac{AC}{\mathfrak{A}''A} = \frac{SA}{A'A};$$

folglich

$$\frac{AC}{\mathfrak{A}''C} = \frac{SA}{SA'};$$

zugleich ist:

$$\frac{\mathfrak{A}''B}{BC} = \frac{BB'}{SB'};$$

also

$$\frac{\mathfrak{A}''C}{CB} = \frac{SB'}{SB'};$$

Setzt man den hieraus sich ergebenden Werth von $\mathfrak{A}''C$, nämlich

$$\mathfrak{A}''C = \frac{SB'}{SB} \cdot BC,$$

in die Gleichung $\frac{AC}{\mathfrak{A}''C} = \frac{SA}{SA'}$ ein, so nimmt sie die Form an

$$\frac{AC}{BC} = \frac{SA}{SB} : \frac{SA'}{SB'}.$$

Nun liegt in diesem Falle die Projection von C im Unendlichen, es ist also $A'C' = \infty$, $B'C' = \infty$, also $\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{\infty}{\infty}$ und zwar gleich 1; denn läßt man den in endlicher Entfernung befindlichen Punkt C' Fig. 10a. in Gedanken immer weiter fortrücken, so wächst der Zähler und der Nenner des Bruchs $\frac{A'C'}{B'C'}$ immer um gleichviel; Brüche aber, deren Zähler und Nenner immer um gleichviel zunehmen, nähern sich bekanntlich immer mehr dem Werthe 1. Man kann also sagen:

9. Lehrsatz. Der Werth eines Bruches $\frac{A\infty}{B\infty}$, in welchem Zähler und Nenner die Entfernung eines unendlich entfernten Punktes der Geraden AB bezüglich von den in endlicher Ferne liegenden Punkten A und B bezeichnet, ist = 1; und also $A\infty = B\infty$ zu setzen.

Wir können demnach die letzte Gleichung auch schreiben:

$$\frac{A'C}{BC} : \frac{A'\infty}{B'\infty} = \frac{SA}{SB} : \frac{SA'}{SB'};$$

es gilt also die Gleichung $\frac{AC}{BC} : \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{SA}{SA'} : \frac{SB}{SB'}$ auch jetzt noch. — Ist ferner Fig. 10.c. $s' \parallel b$, so ist $\triangle AC\mathfrak{C} \sim \triangle BCS$, also

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A\mathfrak{C}}{SB};$$

und

$$\frac{A\mathfrak{C}}{A'C'} = \frac{SA}{SA'};$$

Wird der sich hieraus ergebende Werth $A\mathfrak{C} = \frac{SA}{SA'} \cdot A'C'$ in die erste Gleichung eingesetzt, so erhält man

$$\frac{AC}{BC} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{A'C'}{SB};$$

Da nun der Durchschnittspunkt B' der Geraden A'C' mit der SB der Voraussetzung nach im Unendlichen liegt, so können wir offenbar setzen $B'C' = SB' = \infty C' = S\infty$ und also unsere Gleichung auch schreiben:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{A'C'}{SB} \cdot \frac{S\infty}{\infty C'};$$

oder

$$\frac{AC}{BC} : \frac{A'C'}{\infty C'} = \frac{SA}{SB} : \frac{SA'}{S\infty};$$

Es bleibt also die Gleichung

$$\frac{AC}{BC} : \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{SA}{SB} : \frac{SA'}{SB'}$$

auch dann noch richtig. — Wir wenden uns nun zu Strahlbüscheln, welche drei Strahlen enthalten. Es seien z. B. S,acb und S',a'c'b' auf einander projicirt. Man hat dann nach dem aus der Trigonometrie bekannten Sinuslehrsatz offenbar, Fig. 11.

$$\frac{\sin ac}{\sin sc} = \frac{AC}{SA};$$

$$\frac{\sin bc}{\sin sc} = \frac{BC}{SB};$$

also $$\frac{\sin ac}{\sin bc} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{SB}{SA};$$

ebenso ist $$\frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{S'B}{S'A};$$

also $$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} = \frac{SB}{SA} : \frac{S'B}{S'A}$$

und da $$\frac{SB}{SA} = \frac{\sin sa}{\sin sb}; \quad \frac{S'B}{SA} = \frac{\sin sa'}{\sin sb'};$$

ist $$\frac{\sin ac}{\sin ab} : \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} = \frac{\sin sa}{\sin sb} : \frac{\sin sa'}{\sin sb'};$$

Betrachten wir jetzt die gewonnenen Gleichungen

$$\frac{AC}{BC} : \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{SA}{SB} : \frac{SA'}{SB'} \text{ Fig. 10.} \quad \Big| \quad \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} = \frac{\sin sa}{\sin sa'} : \frac{\sin sb}{\sin sb'} \text{ Fig. 11.}$$

so sehen wir sogleich, daß auf den rechten Seiten derselben der Punkt C und der Strahl c gar nicht vorkommen. Es bleiben also die rechten Seiten, und daher auch die linken Seiten dieser Gleichungen unverändert, wo auch Punkt C und Strahl c angenommen werden mögen; und in der That lassen sich beide Gleichungen für jedes beliebige C und c ableiten, wie man sich leicht überzeugt. Man erhält also den:

10. Lehrsatz. Das aus den Strecken AC, BC einer drei Punkte enthaltenden Punktreihe S,ACB und ihren Projectionen A'C', B'C' auf eine beliebige andere Punktreihe S',A'C'B' gebildete Doppelverhältniß $\frac{AC}{BC} : \frac{A'C'}{B'C'}$ hat stets denselben Werth, wo auch immer der Punkt C und seine Projection C' liegen mag; sein Werth ist nämlich gleich dem des Doppelverhältnisses $\frac{SA}{SB} : \frac{SA'}{SB'}$. Fig. 10.

10. Lehrsatz. Das aus den Sinus der Winkel ac, bc eines drei Strahlen enthaltenden Strahlbüschels S,acb und den Sinus ihrer Projectionen a'c', b'c' auf einen beliebigen anderen Strahlbüschel S',a'c'b' gebildete Doppelverhältniß $\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'}$ hat stets denselben Werth, wo auch immer der Strahl c und seine Projection c' liegen mag; sein Werth ist nämlich gleich dem des Doppelverhältnisses $\frac{\sin sa}{\sin sb} : \frac{\sin sa'}{\sin sb'}$. Fig. 11.

Da in dem Verhältnisse $\frac{SA}{SB} : \frac{SA'}{SB'}$ der Punkt S und die Strecken SA, SA′, SB, SB′, in dem Verhältnisse $\frac{\sin sa}{\sin sb} : \frac{\sin sa'}{\sin sb'}$ die Gerade s und die Winkel sa, sa′, sb, sb′ vorkommen, so sieht man, daß der Werth der Verhältnisse $\frac{AC}{BC} : \frac{A'C'}{B'C'}$ und $\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'}$, bezüglich von der Entfernung der Punkte A, A′, B, B′ von S, und den Winkeln zwischen a, a′, b, b′ mit s abhängt.

Nehmen wir ein viertes Punktpaar D und D′ Fig. 4., und ein viertes Strahlenpaar d und d′ Fig. 5. an, so ist nach dem vorigen Lehrsatz:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{SA}{SB} : \frac{SA'}{SB'}; \quad \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} = \frac{\sin sa}{\sin sb} : \frac{\sin sa'}{\sin sb'};$$

und

$$\frac{AD}{BD} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{SA}{SB} : \frac{SA'}{SB'}; \quad \frac{\sin ad}{\sin bd} : \frac{\sin a'd'}{\sin b'd'} = \frac{\sin sa}{\sin sb} : \frac{\sin sa'}{\sin sb'};$$

also

$$\frac{AC}{BC} : \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AD}{BD} : \frac{A'D'}{B'D'}; \quad \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} = \frac{\sin ad}{\sin bd} : \frac{\sin a'd'}{\sin b'd'};$$

oder

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}; \quad \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} : \frac{\sin a'd'}{\sin b'd'};$$

Da in diesen zwei Gleichungen die oben genannten Entfernungen und Winkel nicht mehr vorkommen, so sieht man, daß auf dieselben gar nichts ankommt und man erhält also den

11. Lehrsatz. Wie man auch zwei Gerade s, s′ durch einen und denselben Strahlbüschel S,acbd ziehen mag, immer ist auf ihnen das Doppelverhältniß der von den Strahlen a, c, b, d, auf ihnen bestimmten Abschnitte, also das Doppelverhältniß $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ und $\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$ dasselbe. Fig. 4.

11. Lehrsatz. Wie man auch zwei Strahlbüschel S,acbd und S′,a′c′b′d′ durch eine und dieselbe Punktreihe s,ACBD ziehen mag, immer ist in ihnen das Doppelverhältniß der Sinus der von den Punkten A, C, B, D in ihnen bestimmten Winkel, also das Doppelverhältniß $\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}$ und $\frac{\sin a'b'}{\sin b'c'} : \frac{\sin a'd'}{\sin b'd'}$ dasselbe. Fig. 5.

Da es also auf die Lage der Geraden s, s′ und der Punkte S, S′ gar nicht ankommt, so liegt der Gedanke nahe, um nähere Aufschlüsse über den Werth dieser Doppelverhältnisse, zunächst bei den Punktreihen, zu bekommen, den Geraden, oder wenigstens einer derselben, eine spezielle Lage zu geben, da dann nach Lehrsatz 11., der Werth des sich so ergebenden Doppelverhältnisses für alle anderen Lagen, derselbe sein muß. Zu dem Ende ziehen wir Fig. 12. durch den Punkt A, und A′ der Punktreihen s,ACBD und s′,A′C′B′D′ zwei Gerade f und f′, jede parallel zum Strahl d; so entstehn auf ihnen

die Punktreihen $s, A\mathfrak{C}\mathfrak{B}\infty$ und $s', A'\mathfrak{C}'\mathfrak{B}'\infty$. Zieht man nun durch $\mathfrak{B}$ eine Gerade parallel zu s, durch $\mathfrak{B}'$ eine Gerade parallel zu s', so ist, da $\triangle AC\mathfrak{C} \sim \triangle \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}$ und $\triangle A'C'\mathfrak{C}' \sim \triangle \mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{C}'$ ist:

$$\frac{AC}{A\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}; \qquad \frac{A'C'}{A'\mathfrak{C}'} = \frac{\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'};$$

Da ferner $\triangle S\mathfrak{B}\mathfrak{C} \sim \triangle SBC$, $\triangle S\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' \sim \triangle SB'C'$ ist, so ist:

$$\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{BC} = \frac{S\mathfrak{B}}{SB}; \qquad \frac{\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'}{B'C'} = \frac{S\mathfrak{B}'}{SB'};$$

also $$\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \frac{S\mathfrak{B}}{SB} \cdot BC; \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{C}' = \frac{S\mathfrak{B}'}{SB'} \cdot B'C';$$

also $$\frac{AC}{A\mathfrak{C}} = \frac{BC}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} \cdot \frac{S\mathfrak{B}}{SB}; \qquad \frac{A'C'}{A'\mathfrak{C}'} = \frac{B'C'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'} \cdot \frac{S\mathfrak{B}'}{SB'};$$

und, da endlich $\triangle SBD \sim \triangle \mathfrak{B}BA$; $\triangle SB'D' \sim \triangle \mathfrak{B}'B'A'$ ist, so ist:

$$\frac{SB}{\mathfrak{B}B} = \frac{BD}{AB}; \qquad \frac{SB'}{\mathfrak{B}'B'} = \frac{B'D'}{A'B'};$$

also $$\frac{SB}{S\mathfrak{B}} = \frac{BD}{AD}; \qquad \frac{SB'}{S\mathfrak{B}'} = \frac{B'D'}{A'D'};$$

folglich $$\frac{AC}{A\mathfrak{C}} = \frac{BC}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} \cdot \frac{AD}{BD}; \qquad \frac{A'C'}{A'\mathfrak{C}'} = \frac{B'C'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'} \cdot \frac{A'D'}{B'D'};$$

oder $$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}; \qquad \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{A'\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'};$$

Da nun wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $SA\mathfrak{B}$ und $SA'\mathfrak{B}'$ auch

$$\frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = \frac{A'\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'};$$

ist, so ist auch $$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = \frac{A'\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'};$$

Es ist also das Doppelverhältniß $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ oder $\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$ durch ein einfaches Verhältniß $\frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$ oder $\frac{A\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'}$ ausgedrückt. — Etwas ganz Analoges läßt sich von den Strahlbüscheln zeigen. Nach Lehrsatz 11. kommt es für den Werth des Sinus-Doppelverhältnisses nicht auf die Lage des Scheitelpunkts des Strahlbüschels an, sondern nur darauf, welche Gerade s Fig. 13. und in welchen Punkten A, C, B, D die Strahlen desselben sie schneiden. Wir suchen daher das Doppelverhältniß für einen speziellen Fall zu bestimmen, wo es sich vereinfacht. Dies findet offenbar dann statt, wenn ein rechter Winkel in dem Strahlbüschel vorkommt. Wir beschreiben also über der Geraden s, für welche S,acbd und S',a'c'b'd' in Projection stehn, einen Strahlbüschel $\mathfrak{S}$,acb$\mathfrak{d}$, in welchem die Strahlen a und b senkrecht auf einander stehn. Es geschieht dies am leichtesten, indem man über der Strecke AB einen Halbkreis beschreibt. Dann ist nach Lehrsatz 11.

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{\sin a\mathfrak{c}}{\sin b\mathfrak{c}} : \frac{\sin a\mathfrak{d}}{\sin b\mathfrak{d}}.$$

Nun ist bc = 90° — ac; der Winkel ab ist ein stumpfer; den Regeln der Trigonometrie nach ist daher unter seinem Sinus der Sinus des spitzen Nebenwinkels zu verstehn, also unter ab nicht der Winkel ASB, sondern sein spitzer Nebenwinkel. Hält man dies fest, so ist bd = 90° — ad; also sin bc = cos ac, sin bd = cos ad; folglich ist

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{\sin ac}{\cos ac} : \frac{\sin ad}{\cos ad} = \text{tang}\, ac : \text{tang}\, ad.$$

oder auch, da ac = 90° — bc, ad = 90° — bd ist:

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{\cos bc}{\sin bc} : \frac{\cos bd}{\sin bd} = \text{tang}\, bd : \text{tang}\, bc.$$

Wir erhalten also die Gleichung:

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} : \frac{\sin a'd'}{\sin b'd'} = \frac{\text{tang}\, ac}{\text{tang}\, ad} = \frac{\text{tang}\, bd}{\text{tang}\, bc};$$

Wir erhalten daher den

12. Lehrsatz. Jedes Doppelverhältniß $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ läßt sich seinem Werthe nach durch ein einfaches darstellen. Man ziehe zu dem Zwecke durch einen der Punkte A oder B eine Parallele zum Strahl d oder c, so bildet das Verhältniß der beiden Abschnitte, in welche diese durch die drei übrigen Strahlen getheilt wird, den Werth des Doppelverhältnisses. Fig. 12.

12. Lehrsatz. Jedes Sinus-Doppelverhältniß $\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}$ läßt sich seinem Werthe nach durch ein einfaches Tangenten-Verhältniß darstellen. Man wähle zu dem Zwecke einen solchen Strahlbüschel, daß die beiden die Anfangsbuchstaben bildenden Strahlen a, b, auf einander senkrecht stehn, dann giebt das Verhältniß der Tangenten der spitzen Winkel, die von den beiden übrigen Strahlen mit einem Schenkel des rechten Winkels gebildet werden, den Werth des Doppelverhältnisses an. Fig. 13.

Davon, daß man, wie links behauptet wird, statt, wie in Fig. 12. durch A eine Parallele zu d, auch durch B eine Parallele zu c oder d hätte ziehen können, davon überzeugt man sich leicht.

Es findet übrigens zwischen dem Doppelverhältnisse der durch die Punkte einer Punktreihe s,ACBD bestimmten Strecken und dem Sinus-Doppelverhältniß der von den Strahlen, welche durch A, C, B, D gehn, gebildeten Winkel, eine merkwürdige und sehr wichtige Beziehung statt, vermöge welcher der Doppel-Lehrsatz 11. als ein einziger erscheint. Es ist nämlich Fig. 4.

$$\frac{\sin ac}{\sin sc} = \frac{AC}{AS}; \frac{\sin bc}{\sin sc} = \frac{BC}{BS};$$

also, da unter sc, wie im Vorigen, nur der spitze Winkel zwischen s

und b verstanden wird, wie es auch die Trigonometrie, und der aus ihr entnommene Sinus-Lehrsatz, voraussetzt,

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BS}{AS}$$

eben so ist $\frac{\sin ad}{\sin sd} = \frac{AD}{AS}$; $\frac{\sin bd}{\sin sd} = \frac{BD}{BS}$;

also $\frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BS}{AS}$;

folglich $\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$;

Wir haben also den

13. **Lehrsatz. Das Sinus-Doppelverhältniß der von vier Strahlen eines Strahlbüschels S,acbd gebildeten Winkel ist gleich dem Doppelverhältnisse der Strecken, welche von den Durchschnittspunkten A, C, B, D der Strahlen a, c, b, d auf einer Geraden s oder der Punktreihe s,ACBD gebildet werden.** Fig. 4.

Es lassen sich nun aus den durch die vier Punkte A, C, B, D auf der Geraden s hervorgebrachten 6 Abschnitten AC, AB, AD, CB, CD, BD offenbar im Ganzen 24 Doppelverhältnisse von der Form $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ bilden. Denn es giebt vier Doppelverhältnisse, nämlich: $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$; $\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC}$; $\frac{BC}{AC} : \frac{BD}{AD}$; $\frac{BD}{AD} : \frac{BC}{AC}$; in denen die Endpunkte der Strecke AB die Anfangsbuchstaben bilden; ebenso giebt es vier, in denen die Endpunkte der Strecke AC, der Strecke AD, der Strecke CB, der Strecke CD, der Strecke BD, die Anfangsbuchstaben bilden, also 24 Doppelverhältnisse. Ebenso werden durch A′, C′, B′, D′ auf der Geraden s′ Fig. 12. 24 Doppelverhältnisse gebildet; und ebenso überzeugt man sich auch, daß durch die Winkel der Strahlen a, c, b, d des Strahlbüschels S,acbd Fig. 13. 24 Sinus-Doppelverhältnisse gebildet werden und daß ein Gleiches im Strahlbüschel S′,a′c′b′d′ statt findet. Es entsteht jetzt die Frage: ob, wenn **ein** Doppelverhältniß der Punktreihe s,ACBD dem gleichnamigen der Punktreihe s′,A′C′B′D′ gleich ist, dies dann auch mit den 23 übrigen statt findet, und ob, wenn **ein** Sinus-Doppelverhältniß des Strahlbüschels S,acbd dem gleichnamigen des Strahlbüschels S′,a′c′b′d′ gleich ist, dies auch mit den 23 übrigen statt findet, ob also, wenn z. B. $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$ ist, auch behauptet werden kann, daß $\frac{CB}{CA} : \frac{DB}{DA} = \frac{C'B'}{C'A'} : \frac{D'B'}{D'A'}$ u. s. w. sei, und ob, wenn z. B. $\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} : \frac{\sin a'd'}{\sin b'd'}$ ist, behauptet werden kann, daß auch $\frac{\sin cb}{\sin ca} : \frac{\sin db}{\sin da} = \frac{\sin c'b'}{\sin c'a'} : \frac{\sin d'b'}{\sin d'a'}$ u. s. w. sei. Nach Lehrsatz 13. brauchen wir offenbar diese Untersuchung nur für

Punktreihen oder für Strahlbüschel durchzuführen, indem nach genanntem Satze jedes Sinus-Doppelverhältniß gleich dem gleichnamigen Doppelverhältniß der durch die Strahlen des Strahlbüschels erzeugten Punktreihe ist. Um dies zu entscheiden, bezeichnen wir kurz den Werth des Doppelverhältnisses, in welchem 1) A und B voranstehn Fig. 12.

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = k;$$

Dann muß ebenso nach Lehrsatz 12., wenn wir 2) die Buchstaben A und C voranstellen, auch

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}$$

sein. Nun ist $\quad \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} = \frac{A\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} = 1 + \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = 1 + k.$

Wir haben also den Werth des Doppelverhältnisses

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} = 1 + k.$$

Stellen wir 3) A und D voran, so haben wir, um den Werth des Doppelverhältnisses durch ein einfaches auszudrücken, durch A eine Parallele zu b oder zu c zu ziehn. Thun wir letzteres, so ist Fig. 14.

$$\frac{AB}{DB} : \frac{AC}{DC} = \frac{A\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{D}\mathfrak{B}_1};$$

aber es ist $\quad \frac{A\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{D}\mathfrak{B}_1} = \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}S} = \frac{A\mathfrak{B}}{A\mathfrak{C}} = \frac{A\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{B}}{A\mathfrak{C}} = 1 + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{A\mathfrak{C}};$

oder $\quad \frac{A\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{D}\mathfrak{B}_1} = 1 + \frac{1}{k} = \frac{1+k}{k};$

Es ist also $\quad \frac{AB}{DB} : \frac{AC}{DC} = \frac{A\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{D}\mathfrak{B}_1} = \frac{1+k}{k};$

Nehmen wir 4) B und C als Anfangsbuchstaben an, so ist nach Lehrsatz 12. Fig. 12.

$$\frac{BA}{CA} : \frac{BD}{CD} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}}$$

oder $\quad \frac{BA}{CA} : \frac{BD}{CD} = \frac{\mathfrak{B}A}{\mathfrak{C}A},$

denn offenbar wird eine durch B zu d parallele Gerade von a, c, b in demselben Verhältnisse getheilt, wie eine durch A zu d parallel gezogene Gerade. Nun ist aber

$$\frac{\mathfrak{B}A}{\mathfrak{C}A} = \frac{\mathfrak{C}A + \mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}A} = 1 + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}A}$$

oder $\quad \frac{\mathfrak{B}A}{\mathfrak{C}A} = 1 + \frac{1}{k} = \frac{1+k}{k};$

also ist $\quad \frac{BA}{CA} : \frac{BD}{CD} = \frac{\mathfrak{B}A}{\mathfrak{C}A} = \frac{1+k}{k};$

Werden 5) B und D als Anfangsbuchstaben genommen, so ist nach Lehrsatz 12. Fig. 14.

$$\frac{BA}{DA}:\frac{BC}{DC}=\frac{B\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_1};$$

oder, da $$\frac{B\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_1}=\frac{\mathfrak{B}_1 A}{\mathfrak{D}A}$$

ist $$\frac{BA}{DA}:\frac{BC}{DC}=\frac{\mathfrak{B}_1 A}{\mathfrak{D}A}.$$

Nun war aber, wie im Falle 3) gezeigt wurde,

$$\frac{A\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{D}\mathfrak{B}_1}=\frac{1+k}{k};$$

also $$\frac{\mathfrak{B}_1 A}{\mathfrak{D}A}=1+k;$$

folglich ist $$\frac{BA}{DA}:\frac{BC}{DC}=\frac{\mathfrak{B}_1 A}{\mathfrak{D}A}=1+k;$$

Werden 6) C und D als Anfangsbuchstaben genommen, so ist nach Lehrsatz 12., Fig. 15., wenn durch C eine Parallele zu b gezogen wird:

$$\frac{CA}{DA}:\frac{CB}{DB}=\frac{C\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{D}_2\mathfrak{A}_2}.$$

Nun ist aber, weil $A\mathfrak{B} \parallel d$ und $C\mathfrak{D}_2 \parallel b$ war, $\angle S\mathfrak{C}\mathfrak{B}=\angle CS\mathfrak{D}_2$ und $\angle \mathfrak{C}S\mathfrak{B}=\angle SC\mathfrak{D}_2$, also $\triangle \mathfrak{C}\mathfrak{B}S \sim \triangle S\mathfrak{D}_2C$, also ist

$$\frac{C\mathfrak{D}_2}{S\mathfrak{D}_2}=\frac{S\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}};$$

Ferner ist, weil $\angle \mathfrak{A}_2S\mathfrak{D}_2=\angle SA\mathfrak{B}$, und $\angle S\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_2=\angle AS\mathfrak{B}$ ist, $\triangle AS\mathfrak{B} \sim \triangle S\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_2$, also:

$$\frac{\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_2}{S\mathfrak{D}_2}=\frac{S\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}};$$

folglich $$\frac{C\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_2}=\frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}$$

daher $$\frac{C\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_2}=\frac{C\mathfrak{D}_2-\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{A}_2\mathfrak{D}_2}=\frac{A\mathfrak{B}-\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}=\frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}=k;$$

also ist $$\frac{CA}{DA}:\frac{CB}{DB}=\frac{C\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{D}_2\mathfrak{A}_2}=k.$$

Wir können uns aber auch zur Vereinfachung der Doppelverhältnisse überall an Fig. 12. halten, von der wir ausgingen, indem wir setzten

$$\frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}=k.$$

Im Falle 2) war also der Werth des Doppelverhältnisses $1+k$; oder,

$$1+k=1+\frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}=\frac{A\mathfrak{C}+\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}=\frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$$

Ferner ist $$\frac{1+k}{k}=\frac{1+\frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}{\frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}=\frac{A\mathfrak{B}}{A\mathfrak{C}}=\frac{\mathfrak{B}A}{\mathfrak{C}A}.$$

Aus dem Doppelverhältniß

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = k;$$

folgt ferner

$$\frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = k;$$

also $\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC} = \frac{1}{k}$; $\frac{BC}{AC} : \frac{BD}{AD} = \frac{1}{k}$; $\frac{BD}{AD} : \frac{BC}{AC} = k$;

Machen wir dieselben Umformungen in jedem der sechs Fälle, so erhalten wir folgende Tabelle: Es ist Fig. 12.:

I. A und B: Anfangsbuchstaben: 1) $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = k;$

2) $\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{A\mathfrak{C}} = \frac{1}{k};$

3) $\frac{BC}{AC} : \frac{BD}{AD} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{A\mathfrak{C}} = \frac{1}{k};$

4) $\frac{BD}{AD} : \frac{BC}{AC} = \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = k;$

II. A „ C: „ 1) $\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} = 1 + k;$

2) $\frac{AD}{CD} : \frac{AB}{CB} = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} = \frac{1}{1+k};$

3) $\frac{CB}{AB} : \frac{CD}{AD} = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} = \frac{1}{1+k};$

4) $\frac{CD}{AD} : \frac{CB}{AB} = \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} = 1 + k;$

III. A „ D: „ 1) $\frac{AB}{DB} : \frac{AC}{DC} = \frac{\mathfrak{B}A}{\mathfrak{C}A} = \frac{1+k}{k};$

2) $\frac{AC}{DC} : \frac{AB}{DB} = \frac{\mathfrak{C}A}{\mathfrak{B}A} = \frac{k}{1+k};$

3) $\frac{DB}{AB} : \frac{DC}{AC} = \frac{\mathfrak{C}A}{\mathfrak{B}A} = \frac{k}{1+k};$

4) $\frac{DC}{AC} : \frac{DB}{AB} = \frac{\mathfrak{B}A}{\mathfrak{C}A} = \frac{1+k}{k};$

IV. B „ C: „ 1) $\frac{BA}{CA} : \frac{BD}{CD} = \frac{\mathfrak{B}A}{\mathfrak{C}A} = \frac{k}{1+k};$

2) $\frac{BD}{CD} : \frac{BA}{CA} = \frac{\mathfrak{C}A}{\mathfrak{B}A} = \frac{1+k}{k};$

3) $\frac{CA}{BA} : \frac{CD}{BD} = \frac{\mathfrak{C}A}{\mathfrak{B}A} = \frac{1+k}{k};$

4) $\frac{CD}{BD} : \frac{CA}{BA} = \frac{\mathfrak{B}A}{\mathfrak{C}A} = \frac{k}{1+k};$

V. B „ D: „ 1) $\frac{BA}{DA} : \frac{BC}{DC} = \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} = \frac{1}{1+k};$

2) $\frac{BC}{DC} : \frac{BA}{DA} = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} = 1 + k;$

V. B und D: Anfangsbuchstaben: 3) $\frac{DA}{BA} : \frac{DC}{BC} = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = 1 + k;$

4) $\frac{DC}{BC} : \frac{DA}{BA} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} = \frac{1}{1 + k};$

VI. C „ D: „ 1) $\frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = k;$

2) $\frac{CB}{DB} : \frac{CA}{DA} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = \frac{1}{k};$

3) $\frac{DA}{CA} : \frac{DB}{CB} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = \frac{1}{k};$

4) $\frac{DB}{CB} : \frac{DA}{CA} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = k.$

Da nach Lehrsatz 13. das Sinus-Doppelverhältniß eines Strahlbüschels, dessen Strahlen durch die Punkte A, C, B, D einer Punktreihe gehn, mit dem Doppelverhältniß, welches die Punkte der letzteren bestimmen, identisch ist, so sieht man, daß die bisher für Punktreihen entwickelten Werthe der verschiedenen Doppelverhältnisse auch für die gleichnamigen Sinus-Doppelverhältnisse gelten. Man erhält also den:

14. Lehrsatz. Durch den Werth k eines einzigen der 24 von vier Punkten einer Punktreihe S,ACBD hervorgebrachten Doppelverhältnisse ist der Werth der 23 übrigen bestimmt.

14. Lehrsatz. Durch den Werth k eines einzigen der 24 von vier Strahlen eines Strahlbüschels S,acbd hervorgebrachten Sinus-Doppelverhältnisse ist der Werth der 23 übrigen bestimmt.

Da ferner nach Lehrsatz 11., wenn s,ACBD und s′,A′C′B′D′ Punktreihen sind, die in demselben Strahlbüschel S,acbd liegen, $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = k$ ist, so folgt aus dem Vorigen, daß z. B. $\frac{CD}{BD} : \frac{CA}{BA} = \frac{k}{1+k}$ nach IV. 4) und auch $\frac{C'D'}{B'D'} : \frac{C'A'}{B'A'} = \frac{k}{1+k}$, also auch $\frac{CD}{BD} : \frac{CA}{BA} = \frac{C'D'}{B'D'} : \frac{C'A'}{B'A'}$ ist, und so bei jedem Paar entsprechender Doppelverhältnisse. Offenbar gilt dasselbe auch von Strahlbüscheln. Man sieht also

15. Lehrsatz. Schneiden zwei beliebige Punktreihen s,ACBD und s′,A′C′B′D′ einen und denselben Strahlbüschel S,acbd, so sind von den 24 auf den Punktreihen entstehenden Doppelverhältnissen je zwei gleichlautende ein-

15. Lehrsatz. Schneiden zwei beliebige Strahlbüschel S,acbd und S′,a′c′b′d eine und dieselbe Punktreihe S,ACBD, so sind von den 24 an den Strahlbüscheln entstehenden Sinus-Doppelverhältnissen je zwei gleichlautende ein-

ander gleich, also $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}; \; \frac{CD}{BD} : \frac{CA}{BA} = \frac{C'D'}{B'D'} : \frac{C'A'}{B'A'}$ u. s. w. Fig. 4.

ander gleich, also $\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} : \frac{\sin a'd'}{\sin b'd'}; \; \frac{\sin cd}{\sin bd} : \frac{\sin ca}{\sin ba} = \frac{\sin c'd'}{\sin b'd'} : \frac{\sin c'a'}{\sin b'a'}$ u. s. w. Fig. 5.

Es mag übrigens, wenigstens an einem Falle, gezeigt werden, daß man zu den oben aufgestellten 24 Gleichungen auch auf rein geometrischem Wege hätte gelangen können. Man ziehe Fig. 16. durch A eine Parallele zu c, die von b in $\mathfrak{B}_2$ geschnitten wird, und durch $\mathfrak{B}_2$ eine Parallele zu s, die von d in $\mathfrak{F}$ geschnitten wird, so ist in den ähnlichen Dreiecken SBD und $S\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}$; $AD\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}\mathfrak{D}$

$$\frac{BD}{\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}} = \frac{SB}{S\mathfrak{B}_2}; \qquad \frac{AD}{A\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{B}_2\mathfrak{F}}{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}};$$

also
$$\mathfrak{B}_2\mathfrak{F} = \frac{S\mathfrak{B}_2}{SB} \cdot BD; \qquad \mathfrak{B}_2\mathfrak{F} = \frac{AD}{A\mathfrak{D}} \cdot \mathfrak{B}_2\mathfrak{D};$$

folglich
$$\frac{AD}{A\mathfrak{D}} \cdot \mathfrak{B}_2\mathfrak{D} = \frac{S\mathfrak{B}_2}{SB} \cdot BD,$$

oder
$$\frac{AD \cdot \mathfrak{B}_2\mathfrak{D}}{BD \cdot A\mathfrak{D}} = \frac{S\mathfrak{B}_2}{SB};$$

Nun ist
$$S\mathfrak{B}_2 = B\mathfrak{B}_2 - SB;$$

also
$$\frac{AD \cdot \mathfrak{B}_2\mathfrak{D}}{BD \cdot A\mathfrak{D}} = \frac{B\mathfrak{B}_2}{SB} - 1;$$

und da $\triangle AB\mathfrak{B}_2 \sim \triangle CBS$, also $\frac{B\mathfrak{B}_2}{SB} = \frac{AB}{CB}$ ist:

$$\frac{AD \cdot \mathfrak{B}_2\mathfrak{D}}{BD \cdot A\mathfrak{D}} = \frac{AB}{CB} - 1 = \frac{AC}{BC};$$

Ferner ist auch $\triangle \mathfrak{B}_2\mathfrak{D}S \sim \triangle S\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1$, also $\frac{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}}{S\mathfrak{D}} = \frac{S\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}}$ oder $\frac{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}}{A\mathfrak{C}} = \frac{A\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}}$ oder $\frac{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}}{A\mathfrak{D}} = \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}}$,

also
$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}} = \frac{AC}{BC},$$

oder
$$\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC} = \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}}{A\mathfrak{C}} = \frac{1}{k}.$$

Man hat also die Gleichung I. 2) erhalten, und auf analoge Weise läßt sich jede der übrigen ableiten.

Aus dieser Ableitung ergiebt sich noch ein merkwürdiger Satz. Es ist nämlich nach der drittletzten Gleichung:

$$A\mathfrak{D} \cdot A\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_2\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}$$

d. h. das Rechteck aus $\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}$ ist gleich dem Rechteck aus $A\mathfrak{D}$ und $A\mathfrak{C}$. Da nun links weder der Punkt $\mathfrak{B}_1$ noch $\mathfrak{B}_2$ vorkommt, so ist dieses ein Zeichen, daß diese Gleichung auch für jedes andere Paar von Punkten $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}$ gilt, die durch einen beliebigen von S ausgehenden Projectionsstrahl e auf $A\mathfrak{B}_1$ und $A\mathfrak{B}_2$ bezeichnet werden, daß also auch

$$A\mathfrak{D} \cdot A\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}_1\mathfrak{E}$$

ist. Dieser Satz läßt sich aber noch erweitern. Denn zieht man eine beliebige Parallele zu $A\mathfrak{B}_1$, die von b in $\mathfrak{B}_3$, von c in $\mathfrak{E}_3$ geschnitten wird, so ist $\triangle AS\mathfrak{B}_1 \sim \triangle \mathfrak{A}S\mathfrak{B}_3$, also

$$\frac{A\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{E}} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{B}_3\mathfrak{E}_3};$$

also nach der obigen Gleichung $\frac{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}}{A\mathfrak{E}} = \frac{A\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{E}}$ auch

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}_3}{\mathfrak{B}_3\mathfrak{E}_3} = \frac{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}}{A\mathfrak{D}}$$

oder
$$A\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{E}_3 = \mathfrak{B}_3\mathfrak{E}_3 \cdot \mathfrak{B}_2\mathfrak{D}$$

oder, da die linke Seite von den Punkten $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_2$ ganz unabhängig ist und ein Gleiches, wie für den Strahl b und seine Durchschnittspunkte $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_2$ mit f und d für jeden beliebigen Strahl e und seine Durchschnittspunkte $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}$ mit f und d bewiesen werden kann,

$$A\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{E}_3 = \mathfrak{E}_3\mathfrak{E}_3 \cdot \mathfrak{E}\mathfrak{D}.$$

Etwas ähnliches gilt von den Strahlbüscheln auch. Sind nämlich S,acbd, S',a'c'b'd' Fig. 13. zwei Strahlbüschel (mögen sie auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von s liegen), in denen Winkel ab = Winkel $a'b' = 90^0$ ist, so ist nach Lehrsatz 11 und 13

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} : \frac{\sin a'd'}{\sin b'd'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD};$$

oder wegen des rechten Winkels

$$\frac{\text{tang } ac}{\text{tang } ad} = \frac{\text{tang } a'c'}{\text{tang } a'd'} = \frac{\text{tang } bd}{\text{tang } bc} = \frac{\text{tang } b'd'}{\text{tang } b'c'} \left(= \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}\right),$$

woraus durch Gleichsetzung des ersten und vierten, des zweiten und dritten Gliedes folgt:

$$\text{tang } ac \cdot \text{tang } b'c' = \text{tang } ad \cdot \text{tang } b'd';$$

und
$$\text{tang } bc \cdot \text{tang } a'c' = \text{tang } bd \cdot \text{tang } a'd';$$

Man hat also den

16. Lehrsatz. Werden in einem Strahlbüschel S,acbd zwei Gerade f, σ bezüglich parallel den Strahlen d und c gezogen, und wird die erstere von c in $\mathfrak{E}_3$, die letztere von d in $\mathfrak{D}$ geschnitten, so ist das Rechteck aus den Entfernungen der Punkte $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{D}$ von den Durchschnittspunkten irgend eines Strahls e bezüglich mit f und σ constant, nämlich gleich dem Rechteck aus $\mathfrak{A}\mathfrak{E}_3$ und $A\mathfrak{D}$. Fig. 16.

16. Lehrsatz. Werden über der Strecke AB zwei Strahlbüschel S,acbd und S',a'c'b'd' angenommen, der Art, daß $ab = a'b' = 90^0$ ist, so ist das Produkt der Tangenten der Winkel, welche entsprechende Strahlen [c und c'; d und d'; e und e'] mit den nicht entsprechenden Schenkeln [a und b'; b und a'] der rechten Winkel bilden, constant. Fig. 13.

Statt der Strahlen c und c′, b und b′ hätte man nämlich ebenso jede beliebige zwei Strahlen e und e′ nehmen können, die sich in demselben E der Geraden s schneiden.

An das Bisherige schließen sich nun mehrere Aufgaben, z. B.

17. Aufgabe. Gesucht eine solche Punktreihe, daß das Doppelverhältniß $= \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$ sei. Fig. 12.

17. Aufgabe. Gesucht ein solcher Strahlbüschel, daß das Sinus-Doppelverhältniß $= \frac{\text{tang ac}}{\text{tang ab}}$ sei. Fig. 17.

Auflösung. Um die Aufgabe links zu lösen, theile man Fig. 12. eine Gerade A𝔅 in dem Verhältniß $\frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$ und ziehe durch A, ℭ, 𝔅, drei sich in einem Punkte S schneidende Gerade a, c, b, und dann durch S einen Strahl d || (A — 𝔅), dann ist jede durch den so entstandenen Strahlbüschel S,acbd gelegte Transversale nach Lehrsatz 12. eine Lösung der Aufgabe. — Um die Aufgabe rechts zu lösen, construire man Fig. 17. an beiden Seiten einer Geraden a die beiden spitzen Winkel ac, ab, die den gemeinsamen Scheitel 𝔖 haben, und mache b ⊥ a. Durch den so entstandenen Strahlbüschel 𝔖,acbd lege man eine beliebige Transversale s, die von den vier Strahlen bezüglich in A, C, B, D geschnitten wird, so genügt nach Lehrsatz 12. und 13. jeder beliebige Strahlbüschel S,acbd, dessen Strahlen ebenfalls durch diese vier Punkte gehen, der Aufgabe.

18. Aufgabe. Gegeben 3 Punkte einer Punktreihe; gesucht ein vierter Punkt von der Lage, daß das Doppelverhältniß den vorgeschriebenen Werth k erhält.

18. Aufgabe. Gegeben 3 Strahlen eines Strahlbüschels; gesucht ein vierter Strahl von solcher Richtung, daß das Sinus-Doppelverhältniß den vorgeschriebenen Werth k erhält.

Auflösung. Bei der Aufgabe links bezeichne man die beiden Punkte, die in dem verlangten Doppelverhältniß die Anfangsbuchstaben sein sollen, mit A und B; dann kann der dritte Punkt, je nach der Natur der Aufgabe, entweder zwischen A und B oder außerhalb der Strecke AB liegen. Im ersteren Falle werde er mit C bezeichnet, und gesucht ist dann der äußere vierte Punkt D; im anderen Falle werde er mit D bezeichnet, und gesucht ist dann der innere vierte Punkt C. Ist D gesucht, so trage man an die Gerade s, auf welcher die gegebenen drei Punkte A, C, B Fig. 12. liegen, unter einem beliebigen Winkel eine zweite Gerade (A—𝔅), und theile sie in ℭ so, daß $\frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = k$ ist. Dann ziehe man (𝔅—B), (ℭ—C), die sich in S schneiden, und lege durch S eine Gerade d || (A—𝔅), so schneidet d die Gerade s im gesuchten vierten Punkt D nach Lehrsatz 12. Ist C gesucht, so trage man an die Gerade s Fig. 14., auf der die drei Punkte A, B, D gegeben sind,

unter einem beliebigen Winkel eine zweite Gerade $(A-\mathfrak{B}_1)$ an, und theile diese in $\mathfrak{D}$ so, daß $\frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}}{A\mathfrak{D}} = k$ ist, verbinde $\mathfrak{B}_1$ mit B, $\mathfrak{D}$ mit D und durch den Durchschnittspunkt S der Geraden $(\mathfrak{B}_1-B)$ und $(\mathfrak{D}-D)$ ziehe man den Strahl $c \parallel (A-\mathfrak{B}_1)$, so schneidet derselbe die Gerade s im gesuchten Punkt C. Denn wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}S$ und $S\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ in Fig. 14. ist

$$\frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}S} = \frac{S\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}$$

oder, da, weil daselbst $(A-\mathfrak{B}) \parallel d$ ist,

$$\mathfrak{D}S = A\mathfrak{C}$$

und nach der Construction $c \parallel (A-\mathfrak{B}_1)$, also auch

$$S\mathfrak{C} = A\mathfrak{D}$$

ist, so hat man $$\frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}}{A\mathfrak{C}} = \frac{A\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}$$

oder $$\frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}}{A\mathfrak{D}} = \frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = k.$$

Es ist also das Doppelverhältniß das verlangte. — Die Auflösung rechts kommt vermöge Lehrsatz 13. auf die der Aufgabe links zurück. Denn man hat nur durch die drei gegebenen Strahlen, die entweder a, c, b, oder a, b, d sind, eine beliebige Transversale s zu ziehn, auf ihr zu den drei Durchschnittspunkten A, C, B, oder A, B, D, den vierten Punkt, bezüglich D, oder C nach der angegebenen Methode zu bestimmen, und dann bezüglich $(S-D)$ oder $(S-C)$ zu ziehen, so ist nach Lehrsatz 13. dies der gesuchte vierte Strahl d oder c.

Von besonderer Wichtigkeit ist ein spezieller Fall des Vorigen, den wir daher zunächst einer Betrachtung unterwerfen wollen.

Sind auf einer Geraden s vier Punkte A, C, B, D, Fig. 18. von solcher Lage gegeben, daß sich verhält:

$$AC : BC = AD : BD$$

oder daß $$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

oder daß $$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = 1.$$

ist, so hat man schon im Alterthum dies dadurch bezeichnet, daß man sagt: Die Strecke AB sei durch C und D **harmonisch** getheilt, obschon der Punkt D außerhalb der Strecke AB sich befindet. Da dieser Fall nun offenbar eine Spezialität des im Bisherigen behandelten ist, wo das Doppelverhältniß $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = k$, also als von dem Werthe 1 verschieden angenommen worden war, da ferner nach Lehrsatz 13. was von den Punktreihen gilt, auch von den Sinus der Strahlbüschel in Kraft bleibt, so sagt man auch, der althergebrachten Definition von „harmonischer Theilung" analog:

19. Erklärung: Ist das Doppelverhältniß der Abschnitte, die von vier Punkten A, C, B, D auf einer Geraden s gebildet werden, von 1 verschieden, so heißt die Strecke AB oder CD bezüglich durch C und D oder A und B **anharmonisch** getheilt.

19. Erklärung: Ist das Doppelverhältniß der Sinus der Winkel, die von vier Strahlen a, c, b, d eines Winkelscheitels S gebildet werden, von 1 verschieden, so heißt der Winkel ab oder cd bezüglich durch c und d oder a und b **anharmonisch** getheilt.

Man überzeugt sich nun leicht von der Richtigkeit des Satzes:

20. Lehrsatz. Sind auf einer Geraden s drei Punkte A, C, B gegeben, ist der Werth k des Doppelverhältnisses $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ bekannt, und ist bestimmt, ob der vierte Punkt D inner- oder außerhalb der Strecke AB fallen soll; so ist dadurch der Ort des Punktes D vollkommen bestimmt.

20. Lehrsatz. Sind an einem Winkelscheitel S drei Strahlen a, c, b gegeben, ist der Werth k des Doppelverhältnisses $\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}$ bekannt, und ist bestimmt, ob der vierte Strahl d inner- oder außerhalb des Winkelraums ab fallen soll, so ist dadurch die Lage des Strahles d vollkommen bestimmt.

Denn, halten wir uns zunächst an den Satz links, so ist, wenn die Lage von A, C, B bekannt ist, auch der Quotient $\frac{AC}{BC}$ bekannt, folglich auch, da k gegeben sein soll, der Werth $\frac{k}{\frac{AC}{BC}}$, der durch $\frac{1}{\lambda}$ bezeichnet werden soll. Es muß also dann sein

$$\frac{AD}{BD} = \lambda.$$

Ist nun der Punkt D, den wir uns jetzt als auf der Geraden s Fig. 19. sich fortbewegend vorstellen wollen, Anfangs mit dem Punkte A zusammengefallen, so ist unter diesen Umständen AD = 0, folglich auch $\lambda = 0$; rückt der Punkt D auf der als unendlich gedachten Geraden s von A aus nach links, so ist, so lange er irgend einen in endlicher Entfernung von A gelegenen Ort, z. B. D_1 einnimmt, offenbar $BD_1 = AD_1 + AB$, folglich $\lambda = \frac{AD_1}{BD_1} = \frac{AD_1}{AD_1 + AB} < 1$; gelangt D nach links sich fortbewegend in unendliche Entfernung, so ist nach Lehrsatz 9. $A\infty = B\infty$, also $\lambda = \frac{A\infty}{B\infty} = 1$. Versetzen wir den Punkt D nach der Seite rechts von B hin in das Unendliche, so ist auch für diesen $\lambda = \frac{A\infty}{B\infty} = 1$. Rückt der Punkt D von hier aus in

eine nur endliche Entfernung von B, z. B. nach D_2, so ist, da für jeden Ort D_2, den D zwischen B und ∞ einnimmt, $AD_2 = BD_2 + AB$ ist, $\lambda = \frac{BD_2 + AB}{BD_2}$, also $\lambda > 1$. Offenbar wächst der Werth von λ immer noch, bis D nach dem Punkte B selbst fällt, woselbst $\lambda = \frac{AB}{0} = \infty$ wird. Gelangt D nun auf die Strecke zwischen der Mitte M von AB und B, so ist für jeden Ort D_3, den es hier einnimmt, $\lambda = \frac{AD_3}{BD_3} = \frac{AM + MD_3}{BM - MD_3}$, also $\lambda > 1$; kommt D in die Mitte M von AB selbst, so wird $\lambda = \frac{AM}{BM} = 1$; tritt endlich D zwischen M und A, so ist für jeden Ort D_4, den es daselbst einnimmt, $\lambda = \frac{AD_4}{BD_4} = \frac{AM - MD_4}{BM + MD_4}$, also $\lambda < 1$, indem der Werth von λ wieder abnimmt, bis er, indem D nach A zurückfällt, wieder 0 wird. Man sieht also, daß es für jeden zwischen A und ∞ gelegenen Ort D_1 einen zweiten zwischen A und M gelegenen Punkt D_4, und ebenso für jeden zwischen B und ∞ gelegenen D_2 einen zwischen B und M gelegenen Ort D_3 giebt, von der Beschaffenheit, daß der Quotient λ für sie gleich ist. Läßt man also in der Vorstellung D von A über M nach B rücken und einen anderen Punkt ebenfalls von A aus außerhalb der Strecke AB sich der Art fortbewegen, daß λ für beide denselben Werth habe, so wird, so lange der innere Punkt zwischen A und M sich bewegt, der äußere die Strecke von A nach ∞ durchlaufen; kommt der innere nach M, so tritt der äußere nach ∞, welcher Ort aber entweder links von A oder rechts von B angenommen werden kann; durchläuft der innere Punkt endlich die Strecke von M nach B, so kommt der äußere von ∞ nach B zurück. Da es also auf der inneren Strecke AB nur einen Punkt M giebt, für den $\lambda = 1$ wird, der entsprechende Punkt der äußeren Strecke aber nirgends in Wirklichkeit aufgefunden werden kann, weil er unendlich entfernt ist, da ferner für jeden anderen inneren nur ein einziger entsprechender äußerer existirt, so ist dies ein Fingerzeig, sich vorzustellen, daß es auch nur einen einzigen äußeren Punkt gebe, für den $\lambda = 1$ wird, also die Punkte in unendlicher Entfernung links von A und rechts von B als identisch zu betrachten, etwa indem wir die Gerade als einen Kreis mit unendlich großem Radius ansehn. Also: Die beiden unendlich entfernten Endpunkte einer unbegrenzten Geraden s werden nur als ein einziger Punkt betrachtet, der als: „Punkt ∞" bezeichnet werden soll. Es stimmt dies mit dem Lehrsatz 9. augenscheinlich überein. Zugleich folgt aus dieser Erklärung, daß nun der Ausdruck „Strecke AB" zweideutig wird, weil damit nicht nur die innere AMB, sondern auch, indem man sich die Gerade s als mit den unendlich entfernten Endpunkten zusammenhängend, vorstellt, die äußere Strecke gemeint sein kann. Es erklärt sich hieraus auch, wie gesagt werden könne, eine Strecke AB

werde durch einen Punkt D getheilt, auch wenn dieser außerhalb der inneren Strecke sich befindet. Es folgt ferner aus dem Vorigen, daß es für jeden Werth von λ zwei, aber auch nur zwei Orte für den Punkt D giebt, einen auf AMB, den anderen auf $A \infty B$, daß also ein Punkt D durch Angabe des Quotienten λ nur dann bestimmt ist, wenn hinzugesetzt ist, ob er sich auf AMB oder $A \infty B$ befindet. Eine Ausnahme machen nur die singulären Werthe $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, für deren ersteren D ohne Zweideutigkeit in A, für deren letzteren es sich in B befindet. Man drückt den Satz 20. links demnach wohl auch so aus: Der Ort eines Punktes D sei durch drei Punkte, A, C, B, den Quotienten k und die Aufeinanderfolge der Punkte bestimmt, indem man darunter nur die Angabe versteht, ob D auf AB oder $A \infty B$ sich befinde. Von der Richtigkeit des Satzes 20. rechts überzeugt man sich sogleich nach Lehrsatz 13. oder durch folgende Betrachtung: Es sei ab ein spitzer Winkel, die Verlängerung von a und b über den Scheitel heiße a′, b′ und lassen wir einen Strahl d sich von der Lage a aus so drehen, daß er nach und nach in die Lagen m, b, p, n, q u. s. w. kommt und suchen den Quotienten $\frac{\sin ad}{\sin bd} = \lambda$, so erhellt, daß $\lambda < 1$ sein muß, so lange d sich zwischen a und m, welcher letztere Strahl den Winkel ab halbirt, befindet; daß $\lambda = 1$ wird, wenn d nach m fällt, und daß $\lambda > 1$ wird, wenn d zwischen m und b liegt; daß $\lambda = \infty$ wird, wenn d mit b zusammentrifft. Kommt nun d in den stumpfen Nebenwinkel von ab und zwar zunächst zwischen b und p zu liegen, welches letztere senkrecht auf a sei, so ist $ad > bd$, also $\lambda > 1$. Dasselbe findet auch statt, wenn d mit p zusammenfällt, indem dann $\sin ap = \sin 90^0 = 1$, und $\sin bp < 1$ ist. Halbirt nun n den stumpfen Nebenwinkel von ab, was der Fall ist, wenn n senkrecht auf m gezogen wird, und rückt d zwischen p und n, so ist unter $\sin ad$ der Sinus des spitzen Nebenwinkels a′d zu verstehn, und da $bd < ad$, so ist auch hier $\lambda > 1$; fällt d nach n, so ist unter ad der Winkel a′n zu verstehn, also $\lambda = 1$. Ist q senkrecht auf b und rückt d zwischen n und q, so ist $\lambda < 1$; dies bleibt auch noch so, wenn d zwischen a′ und q liegt, und fällt es endlich nach a′ oder a, so wird, wie im Anfang $\lambda = 0$. Nun kehrt für den Winkel ab′ dieselbe Betrachtung wieder wie für ab.

Bisher hatten wir vorausgesetzt, daß man unter den Strahlen eines Strahlbüschels die Halbstrahlen oder nur den vom Scheitelpunkt S bestimmten Theil der Strahlen verstehe, es wird aber im Folgenden um eine völlige Analogie mit den Punktreihen herzustellen unter einem Strahle die ganze durch den Scheitelpunkt S gehende Gerade verstanden werden. Wir können also sagen, indem wir hier nochmals wiederholen, was schon früher stets angenommen worden war, daß ab, ac, ꝛc. nur spitze Winkel bedeuten:

21. Erklärung. Die beiden unendlich entfernten Punkte	21. Erklärung. Beide Hälften eines Projectionsstrahls,

einer Geraden s werden nur als ein einziger Punkt betrachtet, der als: „Punkt ∞" bezeichnet werden soll.

in welche ein solcher durch den Scheitel des Strahlbüschels getheilt wird, werden zusammen als ein einziger Strahl aufgefaßt.

22. Erklärung. Unter AB, AC, 2c. ist im Folgenden stets die **endliche** Strecke einer Geraden zu verstehen; die den unendlich entfernten Punkt enthaltenden Strecken sollen durch A∞B, A∞C, 2c. bezeichnet werden.

22. Erklärung. Unter ab, ac, 2c. ist im Folgenden stets der **spitze** Winkel zweier Geraden zu verstehn, der stumpfe Winkel soll durch 180^0 — ab, 180^0 — ac 2c. oder durch 2R—ab, 2R—ac, 2c. bezeichnet werden.

Befinden sich also Fig. 18. zwei Punkte C und D auf einer Strecke AB und zwar der eine auf AB, der andere auf A∞B an solchen Orten, daß $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ oder daß für beide der Quotient λ derselbe ist, so sagt man: C und D theilen die Strecke AB harmonisch. Mit Rücksicht auf Lehrsatz 13. also hat man folgende:

23. Erklärung. Ist der Quotient k des Doppelverhältnisses der durch vier Punkte A, C, B, D einer Punktreihe gebildeten Abschnitte, = 1, so heißt die Punktreihe „**harmonisch**".

23. Erklärung. Ist der Quotient k des Doppelverhältnisses der Sinus der durch vier Strahlen a, c, b, d eines Strahlbüschels gebildeten Winkel = 1, so heißt der Strahlbüschel „**harmonisch**".

24. Erklärung. Die Punkte A und B; C und D heißen „**zugeordnet**".

24. Erklärung. Die Strahlen a und b; c und d heißen „**zugeordnet**".

Da nach VI. 1), wenn $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = 1$ ist, auch $\frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = 1$ sein muß, und ein Gleiches für das Sinus-Doppelverhältniß gilt, so sieht man:

25. Lehrsatz. Wird eine Strecke AB durch zwei Punkte C und D harmonisch getheilt, so wird auch die Strecke CD durch die Punkte A und B harmonisch getheilt.

25. Lehrsatz. Wird ein Winkel ab durch zwei Strahlen c und d harmonisch getheilt, so wird auch der Winkel cd durch die Strahlen a und b harmonisch getheilt.

Untersuchen wir jetzt die harmonische Theilung genauer, so ergiebt sich aus Lehrsatz 12. Fig. 12., daß dann $\frac{A\mathfrak{C}}{B\mathfrak{C}} = 1$, also $A\mathfrak{C} = B\mathfrak{C}$ sein muß. Für Strahlbüschel muß nach Lehrsatz 13. Fig. 13. $\frac{\text{tang ac}}{\text{tang ab}} = 1$,

also tang ac = tang ab sein. Da nun, weil ab = 90° ist, ∠ ASD ein stumpfer, folglich nach Erklärung 22. ab der spitze Nebenwinkel des stumpfen Winkels ASD ist, so folgt ohne Zweideutigkeit aus der Gleichung tang ac = tang ab die Gleichung ac = ab oder also, es muß ac = ab = ½cb sein. Man erhält also den

26. Lehrsatz. Construirt man über einer Strecke AB ein beliebiges Dreieck ASB, halbirt die Strecke AB in C, zieht SC und dann durch S eine Parallele zu AB, so erhält man einen harmonischen Strahlbüschel S,acbd. Fig. 12.

26. Lehrsatz. Schneidet man die Schenkel eines Winkels cd durch eine beliebige Transversale s, halbirt den Winkel cd durch die Gerade a, und zieht durch den Scheitel S eine Senkrechte b auf a, so erhält man eine harmonische Punktreihe s,ACBD. Fig. 13.

Ferner folgt aus dem Vorigen:

27. Lehrsatz. Der dem Halbirungspunkt C einer Geraden s zugeordnete harmonische Punkt liegt im Unendlichen Fig. 12. und umgekehrt:
Liegt ein Punkt D einer harmonischen Punktreihe s,ACBD im Unendlichen, so liegt der ihm zugeordnete Punkt in der Mitte von AB.

27. Lehrsatz. Der dem Halbirungsstrahl a eines Winkels S zugeordnete harmonische Strahl steht auf dem Strahle a senkrecht. Fig. 13. und umgekehrt:
Stehn in einem harmonischen Strahlbüschel S,acbd zwei zugeordnete Strahlen a und b auf einander senkrecht, so halbirt einer von ihnen den von den beiden übrigen Strahlen gebildeten spitzen Winkel, der andere den stumpfen Nebenwinkel.

Von der Richtigkeit der Umkehrung überzeugt man sich sogleich; von der links stehenden dadurch, daß es für A∞ = B∞ nach dem Vorigen nur einen einzigen Punkt C auf AB giebt, für den der Quotient = 1 ist, und daß dieser Punkt in der Mitte von AB liegen muß; von der Umkehrung rechts dadurch, daß, wenn $\frac{\sin ac}{\sin bc} = \frac{\sin ab}{\sin bd}$ sein soll, da ab = 90° ist, sin bc = cos ac, sin bd = cos ab, also tang ac = tang ab, also ac = ab sein muß, und daß ebenso aus cotang bc = cotang bd folgt bc = bd. Man pflegt den Lehrsatz 26. auch wohl so auszusprechen:

28. Lehrsatz. Zieht man durch eine Ecke S Fig. 20. eines Parallelogramms zu der nicht durch S gehenden

28. Lehrsatz. Zieht man von einem Punkte S Fig. 21. der Peripherie eines Halbkreises nach den Endpunkten

Diagonale AB eine Parallele d, so erhält man einen harmonischen Strahlbüschel S,acbd, in dem a und b, c und d zugeordnete Strahlen sind.

A, B des Durchmessers, Strahlen a, b, verbindet einen Punkt C der Strecke AB oder einen Punkt D der Strecke A∞B durch eine Gerade c oder d mit S, und macht dann bezüglich db = cb oder cb = db, so erhält man eine harmonische Punktreihe s,ACBD, in der A und B, C und D zugeordnete Punkte sind.

Es entstehen nun die Aufgaben:

29. Aufgabe. Gegeben drei Punkte A, C, B einer Geraden s Fig. 21.; gesucht der dem C zugeordnete äußere harmonische Punkt D.

29. Aufgabe. Gegeben drei Strahlen a, c, b eines Winkelscheitels S Fig. 20.; gesucht der dem c zugeordnete äußere harmonische Strahl d.

Auflösung. Bei der Aufgabe links beschreibe man über AB als Durchmesser einen Halbkreis ASB, ziehe (S − C), und mache dann ∠ BSD = ∠ BSC, so ist der so gefundene Punkt D der gesuchte nach Lehrsatz 28. — Bei der Aufgabe rechts wähle man einen beliebigen Punkt E des Strahls c, und construire das Parallelogramm ASBE, ziehe die Diagonale (A − B) und parallel zu ihr durch S den Strahl d, so ist dies der verlangte nach Lehrsatz 28. Oder auch man lege durch den Strahlbüschel S,acb eine beliebige Transversale s Fig. 22. und verfahre wie bei Aufgabe links, schlage über der Strecke AB einen Halbkreis, und ziehe nach einem beliebigen Punkte S′ die Geraden (A − S′), (C − S′), (B − S′), mache ∠ DS′B = ∠ CS′B, so ist nach Lehrsatz 28. Strahlbüschel S′,a′c′b′d′, und nach Lehrsatz 13. auch Strahlbüschel S,acbd harmonisch. Endlich kann entstehn die

30. Aufgabe. Gegeben drei Punkte A, B, D einer Geraden s Fig. 21., gesucht der dem Punkt D zugeordnete innere harmonische: C.

30. Aufgabe. Gegeben drei Strahlen a, b, d eines Winkelscheitels S Fig. 20., gesucht der dem Strahl d zugeordnete innere harmonische: c.

Auflösung. Im Falle links beschreibe man wieder über AB einen Halbkreis, ziehe nach einem beliebigen Punkt S der Peripherie desselben die Geraden (A − S), (B − S), (D − S), und mache ∠ CSB = ∠ DSB, so ist C der gesuchte Punkt nach Lehrsatz 28. — Im Falle rechts ziehe man eine beliebige Parallele zum Strahl d, welche die Strahlen a und b in A und B schneidet; dann halbire man AB in C, und ziehe (C − S), so ist der gesuchte Strahl c nach Lehrsatz 28.; oder man ziehe durch den Strahlbüschel S,abd eine beliebige Transversale s Fig. 22.,

beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis, ziehe nach einem beliebigen Punkte S′ die AS′, BS′, DS′, mache $\angle CS'B = \angle DS'B$, und ziehe S′C und SC, so ist nach Lehrsatz 28. Strahlbüschel S′,a′c′b′d′ und nach Lehrsatz 13. auch Strahlbüschel S,acbd harmonisch.

§ 2.

Conformität.

1. Erklärung. Es sollen im Folgenden die eine Punktreihe bildenden Punkte, sowie die einen Strahlbüschel bildenden Strahlen: **Elemente** bezüglich der Punktreihe und des Strahlbüschels genannt werden.

Wir haben uns bisher nur mit Grundgebilden (s. § 1. Erklärung 1.) von vier Elementen beschäftigt, es sind daher jetzt die Verhältnisse zu untersuchen, wenn eine größere Anzahl der Elemente in Betracht gezogen wird. Hierüber gilt zunächst der

2. Lehrsatz. Haben zwei, einem und demselben Strahlbüschel S,acbd Fig. 23. eingeschriebene Punktreihen s,ACBD und s′,A′C′B′D′ denselben Punkt Q gemein, so bildet derselbe mit je dreien gleichnamiger Punkte der beiden Punktreihen gleiche Doppelverhältnisse.

2. Lehrsatz. Haben zwei, über einer und derselben Punktreihe s,ACBD Fig. 24. beschriebene Strahlbüschel S,acbd und S′,a′c′b′d′ denselben Strahl q gemein, so bildet derselbe mit je dreien gleichnamiger Strahlen der beiden Strahlbüschel gleiche Sinus-Doppelverhältnisse.

Denn zieht man Fig. 23. durch Q (Q—𝔅) || (S—D), so ist nach § 1. Lehrsatz 12.

$$\frac{QA}{CA}:\frac{QD}{CD}=\frac{Q\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}\mathfrak{A}};\ \frac{QA'}{C'A'}:\frac{QD'}{C'D'}=\frac{Q\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}.$$

$$\frac{QC}{BC}:\frac{QD}{BD}=\frac{Q\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}};\ \frac{QC'}{B'C'}:\frac{QD'}{B'D'}=\frac{Q\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}.$$

$$\frac{QA}{BA}:\frac{QD}{BD}=\frac{Q\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}};\ \frac{QA'}{B'A'}:\frac{QD'}{B'D'}=\frac{Q\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}.$$

Also ist

$$\frac{QA}{CA}:\frac{QD}{CD}=\frac{QA'}{C'A'}:\frac{QD'}{C'D'};\ \frac{QC}{BC}:\frac{QD}{BD}=\frac{QC'}{B'C'}:\frac{QD'}{B'D'};\ \frac{QA}{BA}:\frac{QD}{BD}=\frac{QA'}{B'A'}:\frac{QD'}{B'D'}.$$

Zieht man durch Q eine Parallele zu (S—B), so hat man ebenso

$$\frac{QA}{CA}:\frac{QB}{CB}=\frac{QA'}{C'A'}:\frac{QB'}{C'B'}.$$

Liegen Punkte links von Q, z. B. E und E′, so ziehe man durch sie zwei Parallelen zu (S—C) oder (S—B) oder (S—D), so erhält man Doppelverhältnisse, in denen E und E′ und auch Q vorkommen und die nach § 1. Lehrsatz 12. gleich sind. Kurz es läßt sich auf die bisherige Weise

die Gleichheit jeder zwei von denselben Strahlen des Büschels S auf s und s' gebildeten Doppelverhältnisse beweisen. — Der Fall rechts Fig. 24. läßt sich stets auf den links bezeichneten zurückführen, indem man zwei sich auf dem gemeinsamen Strahle q oder q' schneidende Transversalen s_1 und s_2 zieht, die von den Strahlen a, c, b, d, e; a', c', b', d', e' bezüglich in den Punkten A_1, C_1, B_1, D_1, E_1; A_2, C_2, B_2, D_2, E_2 geschnitten werden, wodurch dann unter Berücksichtigung von § 1. Lehrsatz 13 die Richtigkeit der Behauptung folgt, oder man beweist dieselbe direct durch Anwendung eines Strahlbüschels S,acbdeq, in welchem zwei Strahlen auf einander senkrecht stehn, ähnlich wie § 1. Lehrsatz 11.

Mit Hülfe von Lehrsatz 2 läßt sich auch der folgende leicht beweisen.

3. Lehrsatz. Sind zwei Punktreihen einem und demselben Strahlbüschel eingeschrieben, so bilden je zwei Elemente A und A', die auf demselben Strahl a liegen, mit je drei anderen Elementen B und B', C und C', D und D', von denen auch je zwei auf demselben Strahle sich befinden, gleiche Doppelverhältnisse.

3. Lehrsatz. Sind zwei Strahlbüschel über einer und derselben Punktreihe beschrieben, so bilden je zwei Elemente a und a', die durch denselben Punkt A gehen, mit je drei anderen Elementen b und b', c und c', d und d', von denen auch je zwei durch denselben Punkt gehen, gleiche Sinus-Doppelverhältnisse.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich sogleich aus § 1. Lehrsatz 11. und aus dem eben bewiesenen Lehrsatz 2. Zugleich aber läßt sich auch das Umgekehrte darthun, nämlich:

4. Lehrsatz. Jede zwei Punktreihen s,ACBDEQ.... und s',A'C'B'D'E'Q'...., welche die Eigenschaft haben, daß je zwei Elemente mit je drei anderen gleiche Doppelverhältnisse bilden, und die Aufeinanderfolge der Elemente in beiden Punktreihen dieselbe ist, lassen sich in eine solche Lage bringen, daß die Verbindungslinien je zweier entsprechender Elemente sich in einem und demselben Punkte schneiden.

4. Lehrsatz. Jede zwei Strahlbüschel S,acbdeq.... und S',a'c'b'd'e'q'...., welche die Eigenschaft haben, daß je zwei Elemente mit je drei anderen gleiche Doppelverhältnisse der Sinus bilden und die Aufeinanderfolge der Elemente in beiden Strahlbüscheln dieselbe ist, lassen sich in eine solche Lage bringen, daß die Durchschnittspunkte je zweier entsprechender Elemente auf einer und derselben Geraden liegen.

Denn sind z. B. Q, Q′ zwei Punkte der gegebenen Punktreihen, welche die Eigenschaft haben, mit irgend drei anderen Punkten, A, C, B; A′, C′, B′ gleiche Doppelverhältnisse zu bilden, so daß also

$$\frac{QA}{CA}:\frac{QB}{CB}=\frac{Q'A'}{C'A'}:\frac{Q'B'}{C'B'}$$

ist, so lege man beide Punktreihen, unter einem beliebigen Winkel gegen einander geneigt, mit den Punkten Q und Q′ auf einander, und ziehe (A—A′) oder a, und (C — C′) oder c, die sich im Punkte S Fig. 23. treffen, so ist leicht zu sehen, daß auch (B—B′) oder b durch S gehen muß, oder daß (S—B) durch B′ gehen muß. Denn schnitte (S—B) die Transversale s′ nicht in B′, sondern in einem anderen Punkte B″, so wäre nach dem obigen Lehrsatz 2.

$$\frac{QA}{CA}:\frac{QB}{CB}=\frac{Q'A'}{C'A'}:\frac{Q'B''}{C'B''}.$$

Es soll aber auch nach der Voraussetzung

$$\frac{QA}{CA}:\frac{QB}{CB}=\frac{Q'A'}{C'A'}:\frac{Q'B'}{C'B'}$$

sein. Es müßte also sein

$$\frac{Q'A'}{C'A'}:\frac{Q'B''}{C'B''}=\frac{Q'A'}{C'A'}:\frac{Q'B'}{C'B'}.$$

Es müßte also zwei Punkte B′ und B″ geben, die mit drei anderen Q′, A′, C′ dasselbe Doppelverhältniß bildeten, was unmöglich ist, denn offenbar müßte B″ auf der Strecke Q′C′ oder Q′∞ C′ liegen, je nachdem B auf QC oder Q ∞ C läge. Da aber der Voraussetzung nach die Aufeinanderfolge der Elemente in den beiden Punktreihen s,ACBD.... und s′,A′C′B′D′.... dieselbe sein soll, so muß auch B′, je nachdem B auf QC oder Q ∞ C liegt, sich auf Q′C′ oder Q′∞ C′ befinden. Es müßte also für zwei zugleich auf Q′C′ oder Q′∞ C′ liegende Punkte B′, B″ das Doppelverhältniß $\frac{Q'A'}{C'A'}:\frac{Q'B''}{C'B''}$ und $\frac{Q'A'}{C'A'}:\frac{Q'B'}{C'B'}$ gleich sein, was nicht möglich ist, wie wir oben sahen § 1. Lehrsatz 20.

5. Erklärung. Zwei Punktreihen s,ACBDE.... und s′,A′C′B′D′E′...., die in eine solche Lage gebracht werden können, daß die Verbindungslinien a, c, b u. s. w. von je zwei Punkten sich in einem und demselben Punkte S schneiden,

oder auch

Zwei Punktreihen s,ACBDE... und s′,A′C′B′D′E′.... von der Beschaffenheit, daß jede zwei Punkte z. B. A und A′ mit

5. Erklärung. Zwei Strahlbüschel S,acbde.... und S′,a′c′b′d′e′...., die in eine solche Lage gebracht werden können, daß die Durchschnittspunkte A, C, B u. s. w. von je zwei Strahlen auf einer und derselben Geraden s liegen,

oder auch

Zwei Strahlbüschel S,acbde... und S′,a′c′b′d′e′.... von der Beschaffenheit, daß jede zwei Strahlen z. B. a und a′ mit

jeden drei übrigen, z. B. b und b′, c jeden drei übrigen z. B. B und B′, C und C′, D und D′ gleiche Doppelverhältnisse bilden, so daß also

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}$$

ist, heißen **conform**. Fig. 23.*)

und c′, d und d′ gleiche Sinus-Doppelverhältnisse bilden, so daß also

$$\frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd} = \frac{\sin a'c'}{\sin b'c'} : \frac{\sin a'd'}{\sin b'd'}$$

ist, heißen **conform**. Fig. 24.*)

Daß beide Definitionen Dasselbe besagen, erhellt aus Lehrsatz 4.

6. Erklärung. Daß Punktreihe s,ACBDE.... conform Punktreihe s′,A′C′B′D′E′.... ist, wird im Folgenden bezeichnet werden durch

s,ACBDE.... $\overline{\wedge}$ s′,A′C′B′D′E′....

6. Erklärung. Daß Strahlbüschel S,acbde.... conform Strahlbüschel S′,a′c′b′d′e′.... ist, wird im Folgenden bezeichnet werden durch

S,acbde.... $\overline{\wedge}$ S′,a′c′b′d′e′....

7. Erklärung. Auch ungleichartige Gebilde, Punktreihe s,ACBDE.... und Strahlbüschel S,acbde.... Fig. 23. die in eine solche Lage gebracht werden können, daß der Strahl a durch den Punkt A, der Strahl b durch den Punkt B u. s. w. geht, oder

Ungleichartige Gebilde von der Beschaffenheit, daß das Doppelverhältniß der durch vier Elemente A, C, B, D der Punktreihe gebildeten Abschnitte gleich ist dem Doppelverhältniß der Sinus der durch vier Elemente a, c, b, d des Strahlbüschels gebildeten Winkel, heißen **conform**. Es wird dies durch

s,ACBDE.... $\overline{\wedge}$ S,acbde.... oder S,acbde.... $\overline{\wedge}$ s,ACBDE....

bezeichnet werden.

8. Erklärung. Bei zwei conformen Punktreihen s,ACBDE.... und s′,A′C′B′D′E′.... werden je zwei solche Punkte, wie A und A′, deren Verbindungslinie a, wenn den Punktreihen die gehörige Lage ertheilt wird, durch einen und denselben Punkt S Fig. 23. der Ebene geht, **entsprechende** Punkte oder Elemente genannt.

8. Erklärung. Bei zwei conformen Strahlbüscheln S,acbde.... und S′,a′c′b′d′e′.... werden je zwei solche Strahlen, wie a und a′, deren Durchschnittspunkt A, wenn den Strahlbüscheln die gehörige Lage ertheilt wird, auf einer und derselben Geraden s, Fig. 24. liegt, **entsprechende** Strahlen oder Elemente genannt.

9. Erklärung. Ist eine Punktreihe einem Strahl-

*) In Rücksicht auf die Benennung „conform" und das Zeichen $\overline{\wedge}$ schließe ich mich an Paulus an. (M. vergl. Paulus: Grundlinien der neueren ebenen Geometrie.)

büschel conform, so heißt je ein Punkt A einem Strahl a **entsprechend**, wenn bei gehöriger Lage der letztere durch den ersteren geht. Fig. 23.

Aus § 1. Lehrsatz 20. ergiebt sich sogleich der

10. Lehrsatz. Ist eine Punktreihe s,ACBD.... und eine zweite Gerade s′, und sind auf derselben irgend drei Punkte A′, C′, B′, gegeben, so kann man, um auf der letzteren Geraden eine der Reihe s,ACBD.... conforme Punktreihe herzustellen, nach Belieben jeden Punkt der s′ als jedem der s entsprechend annehmen; dann erhält man zu jedem vierten Punkt der Reihe s,ACBD einen, aber auch **nur einen** entsprechenden Punkt der Reihe s′,A′C′B′. Fig. 25.

10. Lehrsatz. Ist ein Strahlbüschel S,acbd........ und ein zweiter Winkelscheitel S′, und sind an demselben drei Strahlen a′, c′, b′ gegeben, so kann man, um in letzterem Winkelscheitel einen dem Büschel S,acbd.... conformen Strahlbüschel herzustellen, nach Belieben jeden Strahl des S′ als jedem des S entsprechend annehmen, dann erhält man zu jedem vierten Strahl des Büschels S,acbd einen, aber auch **nur einen** entsprechenden Strahl des Büschels S′,a′c′b′. Fig. 26.

Denn setzt man z. B. fest, A′ solle A, C′ solle C, B′ solle B entsprechen, und man sucht den dem Punkte D entsprechenden, so muß derselbe, da D zwischen A und B sich befindet nach § 1. Erklärung 3., ebenfalls zwischen A′ und B′ liegen, und da D nicht mit C zusammen auf einer der Strecken AB oder A∞B liegt, so darf auch, weil nach Erklärung 5. und Lehrsatz 4. die Aufeinanderfolge in beiden Punktreihen dieselbe sein muß, D′ nicht mit C′ zugleich auf A′B′ oder A′∞B′ sich befinden; da nun der Figur 28. nach C′ auf A′B′ liegt, muß D′ nach A′∞B′ fallen. Ist nun wieder

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = k,$$

so muß also auch $\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = k,$

also
$$\frac{A'D'}{B'D'} = \frac{\frac{A'C'}{B'C'}}{k} = \lambda$$

sein. Nach § 1. Lehrsatz 20. giebt es aber nur einen einzigen solchen Punkt, aber es giebt stets einen. Setzt man fest, daß A′ dem B, B′ dem A, C′ dem C entsprechen solle, so muß der dem D entsprechende Punkt D′ wiederum auf A′∞B′ fallen. Es muß dann sein

$$\frac{B'C'}{A'C'} : \frac{B'D'}{A'D'} = k,$$

also
$$\frac{B'D'}{A'D'} = \frac{\frac{B'C'}{A'C'}}{k}$$

Es findet sich also auch bei dieser Annahme ein, aber auch nur ein dem D entsprechender Punkt (der natürlich ein anderer ist, als der unter der vorigen Annahme gefundene). Setzt man fest, daß C′ dem A, B′ dem C, A′ dem B entsprechen solle, so muß der unter dieser Annahme zu suchende Punkt D′ auf der endlichen Strecke C′A′ liegen, weil der dem C entsprechende B′ auf C′∞A′ sich befindet. Aus dieser Bestimmung und der Forderung, daß

$$\frac{C'B'}{A'B'} : \frac{C'D'}{A'D'} = k,$$

also

$$\frac{C'D'}{A'D'} = \frac{\frac{C'B'}{A'B'}}{k}$$

sein muß, findet sich nach § 1. Lehrsatz 20. ein einziger Punkt; und so bei jeder andern der sechs möglichen Annahmen. Ein Gleiches findet bei Strahlbüscheln statt.

Aus der Erklärung 5. und dem Lehrsatze 2. ergiebt sich folgendes Gesetz, von welchem im Folgenden sehr häufig Gebrauch gemacht werden wird:

11. Lehrsatz. Sind auf zwei conformen Punktreihen s,QACDE.... und s′,Q′A′C′D′E′ zwei Punkte B und B′ zwischen entsprechenden Punkten C und D, C′ und D′ gelegen und bilden sie mit drei anderen entsprechenden Punkten, z. B. Q, A, C; Q′, A′, C′ gleiche Doppelverhältnisse, so daß also

$$\frac{QA}{CA} : \frac{QB}{CB} = \frac{Q'A'}{C'A'} : \frac{Q'B'}{C'B'}$$

ist, so sind B und B′ ebenfalls entsprechende Punkte der gegebenen conformen Punktreihen. Fig. 23.

11. Lehrsatz. Sind in zwei conformen Strahlbüscheln S,qacde.... und S′,q′a′c′d′e′.... zwei Strahlen b und b′ zwischen entsprechenden Strahlen c und d, c′ und d′ gelegen, und bilden sie mit drei anderen entsprechenden Strahlen, z. B. q, a, c; q′, a′, c′ gleiche Sinus-Doppelverhältnisse, so daß also

$$\frac{\sin qa}{\sin ca} : \frac{\sin qb}{\sin cb} = \frac{\sin q'a'}{\sin c'a'} : \frac{\sin q'b'}{\sin c'b'}$$

ist, so sind b und b′ ebenfalls entsprechende Strahlen der gegebenen conformen Strahlbüschel. Fig. 24.

Denn legt man Fig. 23. die conformen Punktreihen mit einem Paar entsprechender Punkte, z. B. Q und Q′ auf einander, zieht (A—A′), (C—C′), die sich in S treffen und zieht dann (S—B), so muß diese Gerade auch durch B′ gehn, weil es sonst auf der Transversalen s′ einen zweiten Punkt B″ gäbe, für den $\frac{QA}{CA} : \frac{QB}{CB} = \frac{Q'A'}{C'A'} : \frac{Q'B''}{C'B''}$ wäre, was nicht möglich ist nach § 1. Lehrsatz 20., da diese Gleichung schon für B′ gelten soll. Es muß aber auch, wenn von dem so bestimmten Punkte S nach irgend einem anderen Punkte z. B. D der Punktreihe s,QACDE eine Gerade gezogen wird, dieselbe durch den dem D ent-

sprechenden Punkt D′ der Punktreihe s′,Q′A′C′D′E′ gehn. Denn schnitte er die s′ z. B. in D″, so müßte auch $\frac{QA}{CA}:\frac{QD}{CD}=\frac{Q'A'}{C'A'}:\frac{Q'D''}{C'D''}$ sein nach Lehrsatz 2., was wiederum, da diese Gleichung der Voraussetzung nach schon für D′ gilt, nach § 1. Lehrsatz 20. unmöglich ist. Es sind also beide Punktreihen s,QACDE und s′,Q′A′C′D′E′ demselben Strahlbüschel eingeschrieben, und B und B′ liegen auf demselben Strahl, also sind sie entsprechende Punkte. Auf ganz analoge Weise überzeugt man sich von der Richtigkeit des Satzes rechts. Man faßt gewöhnlich die Lehrsätze 10. und 11. zusammen, indem man sagt:

12. Lehrsatz. Die Conformität zweier Grundgebilde ist durch drei Elemente vollständig bestimmt.

Aus der Definition der Conformität folgt sogleich, daß, wenn zwei Doppelverhältnisse einem und demselben dritten gleich sind, sie auch einander gleich sein müssen:

13. Lehrsatz. Zwei Grundgebilde, die einem und demselben dritten conform sind, sind auch einander conform.

Von besonderem Interesse sind bei zwei conformen Punktreihen die unendlich entfernten Punkte. Dieselben brauchen nämlich nicht entsprechende Punkte zu sein, obschon sich dies zutragen kann. Nimmt man z. B. in Fig. 25. an, es entspreche A′ dem A, C′ dem C, B′ dem B, und es sei die Strecke AB in 8 gleiche Theile getheilt, C liege um 5 solcher Theile von A, also um 3 solcher Theile von B entfernt, die Strecke A′B′ sei in 9 gleiche Theile getheilt und C′ liege um 7 derselben von A′, also um 2 derselben von B′ entfernt, so ist $\frac{AC}{BC}=\frac{5}{3}$; $\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{7}{2}$. Um nun den dem Punkt ∞ der Reihe s,ACB entsprechenden Punkt Q′ der Reihe s′,A′C′B′.... zu finden, haben wir da $\frac{A\infty}{B\infty}=1$ ist, nach § 1. Lehrsatz 2., die Gleichung:

$$\frac{5}{3}:1=\frac{7}{2}:\frac{A'Q'}{B'Q'};$$

woraus folgt:

$$\frac{A'Q'}{B'Q'}=\frac{21}{10}=2\tfrac{1}{10};$$

Es liegt also Q′ rechts von B′ und zwar um $\frac{10}{11}$ der Strecke A′B′ von B′ entfernt. Um den dem unendlich entfernten Punkt der Reihe s′,A′C′B′.... entsprechenden Punkt O der Punktreihe s,ACB.... zu finden, hat man ebenso:

$$\frac{7}{2}:1=\frac{5}{3}:\frac{AO}{BO};$$

also
$$\frac{AO}{BO}=\frac{10}{21};$$

Es liegt also O links von A und zwar um $\frac{10}{11}$ der Strecke AB von A entfernt.

Bei zwei conformen Strahlbüscheln überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit des Satzes:

14. **Lehrsatz.** Bei zwei conformen Strahlbüscheln giebt es stets ein, aber auch nur **ein** Paar entsprechender Strahlen s, t; s′, t′ von der Beschaffenheit, daß sie einen rechten Winkel einschließen, daß also ∠ st = 1R und ∠ s′t′ = 1R ist. Fig. 26.a.

Denn werden die Strahlbüschel S,acb und S′,a′c′b′ in eine solche Lage gebracht, daß (a · a′), (c · c′), (b · b′) auf einer und derselben Geraden liegen, und ist f die Gerade, auf der die Durchschnittspunkte der entsprechenden Strahlen liegen, und fallen q und q′ auf einander, so halbire man die zwischen S und S′ liegende Strecke dieses gemeinsamen Strahls in N und ziehe auf ihn in N eine Senkrechte, welche die f in M trifft. Mit MS = MS′ als Halbmesser beschreibe man einen Halbkreis, der die s in S und T schneidet und ziehe (S−S) und (S−T), (S′−S) und (S′−T), oder s und t, s′ und t′, so sind s und s′, t und t′ entsprechende Strahlen, und ∠ st = ∠ s′t′ = 1R. Zugleich sieht man, daß es kein anders Paar Strahlen von dieser Beschaffenheit geben kann.

15. **Erklärung.** Die Punkte O und Q′ Fig. 25. zweier conformen Punktreihen S,ACB ∞O und s′,A′C′B′Q′ ∞, welche die Beschaffenheit haben, daß jeder dem unendlich entfernten Punkte der anderen Reihe entspricht, heißen die **Gegenpunkte** bezüglich der Punktreihen s,ACB∞ O und s′,A′C′B′Q′∞.

15. **Erklärung.** Die Strahlen s, t; s′, t′ Fig. 26.a. zweier conformen Strahlbüschel S,acbts und S′,a′c′b′t′s′, welche die Beschaffenheit haben, daß sowohl ∠ st, als ∠ s′t′ = 1R, und daß s′ dem s, t′ dem t entspricht, heißen die **entsprechenden Strahlen der entsprechenden rechten Winkel** der Strahlbüschel S,acbts und S′,a′c′b′t′s′.

Es lassen sich nun leicht folgende Sätze beweisen, die zwar schon in § 1. Lehrsatz 16 erwähnt sind, hier aber des Zusammenhangs wegen nochmals wiederholt werden sollen.

16. **Lehrsatz.** Die Abschnitte AO, BO, welche auf einer von zwei conformen Punktreihen s,ACB.... und s′,A′C′B′.... Fig. 25. von beliebigen Punkten A, B und dem Gegenpunkte O dieser Punktreihe gebildet werden, sind umgekehrt proportional den von den entsprechenden Punkten A′, B′ und dem Gegenpunkte Q′ auf der ande-

16. **Lehrsatz.** Die Tangenten der Winkel as, bs welche in einem von zwei conformen Strahlbüscheln S,acb... und S′,a′c′b′..., Fig. 26.a. von beliebigen Strahlen a, b und einem Strahle s des rechten Winkels st dieses Strahlbüschels gebildet werden, sind umgekehrt proportional den Tangenten der Winkel, die von den ent-

ren Punktreihe gebildeten Abschnitten A'Q', B'Q'. Es ist also

$$\frac{AO}{BO} = \frac{B'Q'}{A'Q'}.$$

sprechenden Strahlen a', b' und dem dem s **nicht** entsprechenden Strahle t' des rechten Winkels s't' des anderen Strahlbüschels gebildet werden. Es ist also

$$\frac{\text{tang as}}{\text{tang bs}} = \frac{\text{tang b't'}}{\text{tang a't'}}$$

und ebenso

$$\frac{\text{tang at}}{\text{tang bt}} = \frac{\text{tang bs'}}{\text{tang as'}}.$$

Oder in etwas anderer Fassung:

17. Lehrsatz. Das Rechteck, welches gebildet wird aus den Abständen irgend zweier entsprechender Punkte zweier conformer Punktreihen von ihren Gegenpunkten, ist constant, oder es ist AO · A'Q' = BO · B'Q' = CO · C'Q' = ...

17. Lehrsatz. Das Product aus den Tangenten der Winkel, die von irgend zwei entsprechenden Strahlen zweier conformer Strahlbüschel und den **nicht** entsprechenden Strahlen der entsprechenden rechten Winkel gebildet werden, ist constant, oder es ist tang as · tang a't' = tang bs · tang b't' = tang cs · tang c't' und ebenso tang at · tang a's' = tang bt · tang b's' = tang ct · tang c's' = ...

Denn es ist, wenn s,ACB∞ O $\overline{\wedge}$ s',A'C'B'Q'∞ ist:

$$\frac{AO}{BO} : \frac{A\infty}{B\infty} = \frac{A'\infty}{B'\infty} : \frac{A'Q'}{B'Q'}$$

oder, da nach § 1. Lehrsatz 9. A∞ = B∞, A'∞ = B'∞ ist:

$$\frac{AO}{BO} = \frac{B'Q'}{A'Q'}.$$

Ebenso hat man ferner

$$\frac{AO}{CO} = \frac{C'Q'}{A'Q'}, \quad \frac{BO}{CO} = \frac{C'Q'}{B'Q'}; \; \ldots.$$

aus welchen Gleichungen die Behauptung des Lehrsatzes 17 links folgt:

$$AO \cdot A'Q' = BO \cdot B'Q' = CO \cdot C'Q' = \ldots.$$

Bei Strahlbüscheln ist, wenn S,acbts $\overline{\wedge}$ S',a'c'b't's' ist,

$$\frac{\sin at}{\sin bt} : \frac{\sin as}{\sin bs} = \frac{\sin a't'}{\sin b't'} : \frac{\sin a's'}{\sin b's'};$$

oder, da ∠ st = ∠ s't' = 1R ist, mit Berücksichtigung von § 1. Erklärung 22.

$$\frac{\cos as}{\cos bs} : \frac{\sin as}{\sin bs} = \frac{\sin a't'}{\sin b't'} : \frac{\cos a't'}{\cos b't'};$$

und $\frac{\sin at}{\sin bt} : \frac{\cos at}{\cos bt} = \frac{\cos a's'}{\cos b's'} : \frac{\sin a's'}{\sin b's'}$;

oder $1 : \frac{\text{tang } as}{\text{tang } bs} = \frac{\text{tang } a't'}{\text{tang } b't'} : 1$;

und $\frac{\text{tang } at}{\text{tang } bt} : 1 = 1 : \frac{\text{tang } a's'}{\text{tang } b's'}$;

also ist $\frac{\text{tang } as}{\text{tang } bs} = \frac{\text{tang } b't'}{\text{tang } a't'}$; $\frac{\text{tang } at}{\text{tang } bt} = \frac{\text{tang } b's'}{\text{tang } a's'}$;

ebenso auch $\frac{\text{tang } as}{\text{tang } cs} = \frac{\text{tang } c't'}{\text{tang } a't'}$; $\frac{\text{tang } at}{\text{tang } ct} = \frac{\text{tang } c's'}{\text{tang } a's'}$;

und $\frac{\text{tang } bs}{\text{tang } cs} = \frac{\text{tang } c't'}{\text{tang } b't'}$; $\frac{\text{tang } bt}{\text{tang } ct} = \frac{\text{tang } c's'}{\text{tang } b's'}$.

Aus den Gleichungen links folgt nun sogleich

$$\text{tang } as \cdot \text{tang } a't' = \text{tang } bs \cdot \text{tang } b't' = \text{tang } cs \cdot \text{tang } c't' = \ldots.$$

aus den Gleichungen rechts

$$\text{tang } at \cdot \text{tang } a's' = \text{tang } bt \cdot \text{tang } b's' = \text{tang } ct \cdot \text{tang } c's' = \ldots.$$

womit also die Sätze 16. und 17. rechts bewiesen sind.

Es möge schließlich noch eine hierher gehörige Aufgabe behandelt werden, nämlich:

18. Aufgabe. Gegeben zwei conforme Punktreihen s,QAC.... und s'Q'A'C'...., gesucht der dem Punkt B der ersteren entsprechende Punkt B' der letzteren. Fig. 23.

18. Aufgabe. Gegeben zwei conforme Strahlbüschel S,qac.... und S',q'a'c'...., gesucht der dem Strahl b des ersteren entsprechende Strahl b' des letzteren. Fig. 19.

Auflösung. Man lege die beiden Punktreihen s,QAC.... und s',Q'A'C'.... Fig. 23. mit entsprechenden Punkten Q, Q' (die also hier nicht die Gegenpunkte sind) auf einander, ziehe die Geraden (A–A'), (C – C'), die sich in S treffen, und dann (S – B), so schneidet dieselbe die s' im gesuchten Punkte B' nach § 1. Lehrsatz 11 und nach obigem Lehrsatz 11. Ebenso lege man in Strahlbüschel S,qac...., und S',q'a'c'...., Fig. 24. mit entsprechenden Strahlen q, q' auf einander, und verbinde die Durchschnittspunkte (a · a'), (c · c') durch eine Gerade s, die von b in B getroffen wird, und ziehe (S' – B), so ist dieß der dem Strahl b entsprechende b' nach § 1. Lehrsatz 11 und nach dem obigen Lehrsatz 11 in diesem Paragraphen.

Es bleibt nun noch übrig, die Verhältnisse zu untersuchen, die aus den verschiedenen Lagen conformer Gebilde entstehen. Es können nämlich zwei conforme Punktreihen sich in solcher Lage befinden, daß die Verbindungslinien a, b u. s. w. der entsprechenden Punkte A, A', B, B'.... Fig. 23. sich in einem gemeinsamen Centrum S schneiden; diese Lage soll die centrale heißen; oder dieß ist nicht der Fall. Unter den unzähligen Möglichkeiten, die dann statt finden, ist wieder eine von Interesse, nämlich der Fall, wo die beiden Punktreihen

s,ACBD und s',A'C'B'D' auf einer und derselben Geraden f liegen Fig. 27.; oder mit anderen Worten, wo die Strahlen a, b,.... der Fig. 23. in eine einzige Gerade f zusammenfallen. Diese Lage soll als die axiale bezeichnet werden. Endlich kann die Lage weder central, noch axial sein, wie Fig. 25. Desgleichen haben wir bei Strahlbüscheln die Möglichkeit, daß Fig. 24. die Durchschnittspunkte aller entsprechenden Strahlen auf einer und derselben Geraden liegen; diese Lage soll die axiale heißen, oder, daß dies nicht der Fall ist; und zwar ist hier wieder ein besonderer Fall von Interesse, wenn alle Durchschnittspunkte A, B,.... der Fig. 24. in einen und denselben Punkt S Fig. 28. zusammenfallen, oder mit anderen Worten, wenn die conformen Strahlbüschel den Scheitel S gemein haben; diese Lage soll die centrale heißen; oder endlich, es findet keins von beiden statt, wie in Fig. 26. Man hat also die Fälle:

Zwei conforme Punktreihen s,ACBD... und s',A'C'B'D'... können sich befinden in	Zwei conforme Strahlbüschel S,acbd.... und S',a'c'b'd'.... können sich befinden in
I. **centraler** Lage Fig. 23.	I. **axialer** Lage Fig. 24.
II. **axialer** Lage Fig. 27.	II. **centraler** Lage Fig. 28.
III. **weder centraler, noch axialer** Lage Fig. 25.	III. **weder axialer, noch centraler** Lage Fig. 26.

Es soll jedoch im Folgenden die Bezeichnung festgehalten werden:

19. Erklärung. Der Kürze wegen soll die unter I. bezeichnete centrale Lage der Punktreihen und axiale Lage der Strahlbüschel mit dem gemeinsamen Namen der „**perspectivischen**“ Lage belegt werden. Auch die Lage ungleichartiger conformer Gebilde s,ACBD und S,acbd soll „**perspectivisch**“ heißen, wenn jeder Strahl a, b, u. s. w. durch den entsprechenden Punkt A, B, u. s. w. geht. Fig. 23., 24.

Der Fall II., also die axiale Lage der Punktreihen und die centrale Lage der Strahlbüschel soll mit dem Namen der „**conjectivischen**“ Lage zusammengefaßt werden. Fig. 27., 28.

Der Fall III., also die weder centrale noch axiale Lage der Punktreihen und Strahlbüschel soll mit dem Namen der „**projectivischen**“ Lage belegt werden. Auch soll mit „**projectivisch**“ die Lage ungleichartiger conformer Gebilde bezeichnet werden, in der die Strahlen a, b, u. s. w. nicht durch die entsprechenden Punkte A, B, u. s. w. gehen. Fig. 25., 26., 29.

§ 3.

Perspectivische Lage der Grundgebilde. Proportionalität.

1. Erklärung. Der Scheitel S des Strahlbüschels S,acbd Fig. 23., dessen Strahlen Verbindungslinien entsprechender Punkte der perspectivisch liegenden conformen Punktreihen s,ACBD und s′,A′C′B′D′ sind, heißt das **Projectionscentrum**, die Strahlen a, c, b, d heißen die **Projectionsstrahlen.**

1. Erklärung. Die Gerade s der Punktreihe s,ACBD Fig. 24., deren Punkte Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen der perspectivisch liegenden conformen Strahlbüschel S,acbd und S′,a′c′b′d′ sind, heißt die **Projectionsaxe**, die Punkte A, C, B, D heißen die **Projectionspunkte.**

Zunächst muß es uns darauf ankommen, ein Kriterium aufzustellen, an welchem man erkennt, ob sich ein Paar conforme Gebilde in perspectivischer Lage befinden oder nicht. Ein solches ist enthalten in folgendem

2. Lehrsatz. Zwei conforme Punktreihen s,ACBD und s′,A′C′B′D′ Fig. 23. befinden sich in perspectivischer Lage:

α. wenn die Verbindungslinien dreier Paare entsprechender Punkte, z. B. a, c, b, durch einen und denselben Punkt S gehen.

β. wenn sie mit einem Paare entsprechender Punkte, z. B. Q und Q′ auf einander fallen.

2. Lehrsatz. Zwei conforme Strahlbüschel S,acbd und S′,a′c′b′d′ Fig. 24. befinden sich in perspectivischer Lage:

α. wenn die Durchschnittspunkte dreier Paare entsprechender Strahlen z. B. A, C, B, auf einer und derselben Geraden s liegen.

β. wenn sie mit einem Paare entsprechender Strahlen, z. B. q und q′ auf einander fallen.

Der Satz *α* ergiebt sich sogleich daraus, weil, wenn also Fig. 23. drei Projectionsstrahlen a, c, b sich in S schneiden eine von S nach einem beliebigen Punkte z. B. D der Punktreihe s,ACBD gezogene Gerade, auch durch den entsprechenden Punkt D′ der Reihe s′,A′C′B′D′ gehn muß, denn schnitte sie die s′ in einem anderen Punkte D″, so wäre nach § 1. Lehrsatz 11. und § 2. Erklärung 6. s,ACBD $\barwedge$ s′,A′C′B′D″. Dies ist aber nach § 2. Lehrsatz 10. unmöglich, weil schon s,ACBD $\barwedge$ s′,A′C′B′D′ sein soll. Ebenso beweist sich der Satz *α.* rechts.

Der Satz *β* folgt aus denselben Gründen. Denn schneiden sich a und c in S, und man zieht von S nach dem Durchschnittspunkte der Geraden s und s′, in dem also Q und Q′ vereinigt sind, und ebenso nach einem beliebigen Punkte D der Reihe s,ACBD, so muß diese Gerade auch durch D′ gehn. Denn ginge sie durch D″, so wäre s,QACD $\barwedge$ s′,Q′A′C′D″, nach § 2. Lehrsatz 2., und es soll doch

$s'QACD \barwedge s',Q'A'C'D'$ sein. Es muß also SD durch D′ gehn. Ebenso überzeugt man sich von der Richtigkeit des Satzes β rechts.

3. Aufgabe. Gegeben zwei ungleichartige conforme Gebilde: Punktreihe s,ACBD.... $\barwedge$ Strahlbüschel S,acbd.... Es soll die erstere in den letzteren so hineingelegt werden, daß sie sich in perspectivischer Lage befinden.

3. Aufgabe. Gegeben zwei ungleichartige conforme Gebilde: Strahlbüschel S,acbd... und Punktreihe s,ACBD.... Es soll der erstere so über die letztere gelegt werden, daß sie sich in perspectivischer Lage befinden.

Auflösung. Beide Aufgaben sind offenbar dem Wesen nach identisch, nur soll das eine Mal der Strahlbüschel, das andere Mal die Punktreihe als eine bestimmte Stelle der Ebene einnehmend vorausgesetzt werden. Im ersten Falle ziehe man durch S eine beliebige Gerade Fig. 30., mache $S\Gamma_1$ oder $S\Gamma_2 = AC$; SA_1 oder $SA_2 = AB$, ziehe beliebig $(\Gamma_1 - M_1)$; die den Strahl a in M_1 trifft, und $(A_1 - \mathfrak{A}_1) \parallel (\Gamma_1 - M_1)$, die ihn in $\mathfrak{A}_1$ trifft, so verhält sich $SM_1 : \mathfrak{A}_1 M_1 = AC : BC$. Dann ziehe man durch M_1 eine Parallele zum Strahl b, welche den Strahl c in $\mathfrak{C}_1$ schneidet und ziehe $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1$, so ist auch $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1 : \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 = AC : BC$. Nun mache man $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}'_1 = AC$ und ziehe durch $\mathfrak{C}_2$ eine Parallele zum Strahl a, die den Strahl c in C_1 schneidet und lege durch C_1 eine Parallele zu $(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1)$, so wird $A_1 C_1 = AC$ und $B_1 C_1 = BC$. Denn es verhält sich $A_1 C_1 : B_1 C_1 = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1 : \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 = AC : BC$; und da $A_1 C_1 = AC$ ist, muß $B_1 C_1 = BC$ sein. Der Strahl d muß dann durch einen solchen Punkt D_1 gehn, daß $B_1 D_1 = BD$ ist, weil $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} =$ dem Quotienten des Sinus-Doppelverhältnisses des Strahlbüschels S,acbd sein soll, und $A_1 C_1 = AC$, $B_1 C_1 = BC$ ist, also nach § 1. Lehrsatz 20. es nur einen Punkt giebt, welcher der Aufgabe genügt. Dagegen ist augenscheinlich, daß alles, was an dem einen durch den Punkt S auf dem Strahl a hervorgebrachten Abschnitte $S\mathfrak{A}_1$ ausgeführt worden ist, auch an dem anderen Abschnitte $S\mathfrak{A}_2$ hätte vorgenommenen werden können. Es hätte also die Punktreihe s,ACBD nicht blos in die Lage $s_1, A_1 C_1 B_1 D_1$, sondern auch in die Lage $s_2, A_2 C_2 B_2 D_2$ gebracht werden können. Es müssen aber s_1 und s_2 parallel sein, denn schnitten sie sich in einem Punkte R z. B. rechts von B, so müßte nach § 2. Lehrsatz 2. $\frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} : \frac{A_1 R}{B_1 R} = \frac{A_2 C_2}{B_2 C_2} : \frac{A_2 R}{B_2 R}$ sein, oder, da $A_1 C_1 = A_2 C_2 = AC$, $B_1 C_1 = B_2 C_2 = BC$ ist, es müßte $\frac{A_1 R}{B_1 R} = \frac{A_2 R}{B_2 R}$ sein. Es wäre aber $B_1 R = A_1 R - A_1 B_1$; $B_2 R = A_2 R + A_2 B_2$, oder da $A_1 B_1 = A_2 B_2 = AB$ ist, müßte sein:

$$\frac{A_1 R}{A_1 R - AB} = \frac{A_2 R}{A_2 R + AB}$$

eine Gleichung, die nur dann möglich ist, wenn entweder $AB = 0$;

oder $A_1R = A_2R = \infty$ angenommen wird. Da nun ersteres nicht der Fall ist, muß letzteres sein; d. h. s_1 muß $\parallel s_2$ sein. Daraus folgt sogleich $\angle SA_1C_1 = \angle SA_2C_2$, folglich, weil auch $\angle A_1SC_1 = \angle A_2SC_2$ und $A_1C_1 = A_2C_2$ ist, $\triangle A_1SC_1 \cong \triangle A_2SC_2$, also $SA_1 = SA_2$. Wird ferner $(S-T_1) \perp s_1$ gezogen und rückwärts verlängert, so daß $(S-T_2) \perp s_2$ wird, so wird auch $ST_1 = ST_2$. — Soll dagegen, bei der Aufgabe rechts, die Punktreihe nicht von dem Orte, den sie einnimmt, fortbewegt werden, so hat man zunächst einen Winkel ac in solcher Lage zu construiren, daß seine Schenkel a, c bezüglich durch A, C gehn. Zu dem Zwecke lege man an die Gerade s eine beliebige, dieselbe in A treffende Gerade a Fig. 31. und lege in einem beliebigen Punkt $\mathfrak{S}'$ derselben an sie eine Gerade c′, so daß ac′ = ac ist, und ziehe durch C zu c′ eine Parallele c, welche die a in $\mathfrak{S}$ schneidet, so ist auch ac = ac. Wird nun ein Kreis durch A, C, $\mathfrak{S}$ gelegt, so sind alle Peripheriewinkel, deren Scheitel auf dem Bogen A$\mathfrak{S}$C liegen und deren Schenkel durch A, C gehen, gleich ac. Es muß also der Scheitel S des zu construirenden Strahlbüschels S,acbd jedenfalls irgendwo auf dem Bogen A$\mathfrak{S}$C liegen. Ebenso construire man über CB einen Kreisbogen, der den Winkel cb zum Peripheriewinkel hat. Beide Kreisbögen schneiden sich außer in C nun noch in einem Punkte S_2, welches der gesuchte Punkt für den Scheitel S ist. Denn wird an den Strahl b_2 noch der Strahl d_2 unter einem Winkel $b_2d_2 = bd$ gesetzt, so muß nach § 1. Lehrsatz 20, d_2 durch D gehen. Im Vorigen war angenommen, daß die Mittelpunkte M_2, $\mathfrak{M}_2$ der Kreisbögen AS_2C, BS_2C oberhalb s liegen. Allein es giebt offenbar noch ein Paar, der Aufgabe genügende Kreisbögen AS_1C, BS_1C, deren Mittelpunkte M_1, $\mathfrak{M}_1$ unterhalb s sich befinden. Nun ist der Radius $AM_1 = AM_2$. Denn zieht man $AM_2 = CM_2$, so wird der Centriwinkel $AM_2C = 2 \cdot a_2c_2$, also in dem gleichschenkligen Dreieck AM_2C $\angle CAM_2 = \angle ACM_2 = 90 - a_2c_2$; ebenso ist $\angle CAM_1 = \angle ACM_1 = 90 - a_2c_1$ und da $a_2c_2 = a_1c_1$ ist, so ist $\angle CAM_2 = \angle CAM_1$, $\angle ACM_2 = \angle ACM_1$, also sind die Dreiecke AM_2C und AM_1C congruent und M_2M_1 halbirt die AC in E und steht auf ihr senkrecht, und s halbirt umgekehrt die M_1M_2; ebenso wird $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ von s halbirt und $\angle BF\mathfrak{M}_1 = \angle BF\mathfrak{M}_2$ ist $= 90^\circ$. Nun ist CS_2 die den Kreisen um M_2 und $\mathfrak{M}_2$ gemeinsame Sehne und nach einem bekannten Satze der Planimetrie steht die Centrale $(M_2 - \mathfrak{M}_2) \perp (C - S_2)$ und halbirt CS_2 in G_2; ebenso ist $(M_1 - \mathfrak{M}_1) \perp (C - S_1)$ und halbirt CS_1 in G_1. Nun schneiden sich $(M_1 - \mathfrak{M}_1)$ und $(M_2 - \mathfrak{M}_2)$ in einem Punkte H der s und es ist $\angle CHG_1 = \angle CHG_2$; ferner ist $\angle CG_1H = \angle CG_2H = 90^\circ$, CH = CH, also $\triangle CHG_1 \cong \triangle CHG_2$, also $CG_1 = CG_2$ und $CS_1 = CS_2$ und $\angle HCS_1 = \angle HCS_2$. Wird ferner $(S_1 - S_2)$ gezogen, welche die s in R schneidet, so ist in den Dreiecken CS_1R und CS_2R Seite CR = CR, $CS_1 = CS_2$, $\angle S_1CR = \angle S_2CR$, also sind sie congruent, folglich $S_1R = S_2R$, und $\angle S_1RC = \angle S_2RC$

$= 90^{\circ}$. Ferner bemerkt man an Fig. 30. daß wenn die Punktreihe s,ACBD in die Lage $s_1, A_1 C_1 B_1 D_1$ gebracht ist, die Punkte A_1, C_1, B_1, D_1 von links nach rechts auf einander folgen, oder ein von A_1 aus sich bewegender Punkt muß, um von A_1 nach C_1, B_1, D_1 zu gelangen, sich von links nach rechts bewegen; ebenso muß in Fig. 31. wenn S in S_1 liegt, der Strahl a_1 um nach c_1, b_1, d_1 successive zu kommen, sich drehen, wie der Zeiger einer Uhr. Bei der Lage s_2, Fig. 30. aber folgen A_2, C_2, B_2, D_2 von rechts nach links auf einander und in Fig. 31., bei der Lage S_2 für S folgen a_2, c_2, b_2, d_2 in einer Richtung auf einander, die der bei S_1 statthabenden entgegengesetzt ist. Man hat also die Lehrsätze:

4. Lehrsatz. Eine Punktreihe s,ACBD kann auf zweifache Weise in einen conformen Strahlbüschel so hineingelegt werden, daß sie sich in perspectivischer Lage befinden. Beide Lagen s und s_2 sind zu einander parallel, und ihre senkrechten Abstände vom Scheitel S des Strahlbüschels sind gleich lang, die Richtung der Aufeinanderfolge der Punkte auf s_1 und s_2 entgegengesetzt.

4. Lehrsatz. Ein Strahlbüschel S,acbd kann auf zweifache Weise über eine conforme Punktreihe so gelegt werden, daß sie sich in perspectivischer Lage befinden. Beide Lagen, S_1 und S_2 stehen von der Axe s gleich weit senkrecht ab, die Gerade $S_1 S_2$ wird von s halbirt und die Richtung der Aufeinanderfolge der Strahlen in S_1 und S_2 ist entgegengesetzt.

5. Aufgabe. Gegeben zwei conforme Punktreihen s,ACBD und s′,A′C′B′D′; dieselben in perspectivische Lage zu bringen.

5. Aufgabe. Gegeben zwei conforme Strahlbüschel S,acbd und S′,a′c′b′d′; dieselben in perspectivische Lage zu bringen.

Auflösung 1. Man lege die Punktreihen s,ACBD und s′,A′C′B′D′ unter einem beliebigen Winkel mit einem Paar entsprechender Punkte Q und Q′ auf einander, so müssen die Projectionsstrahlen (A—A′), (C—C′), (B—B′) u. s. w. sich in einem und demselben Punkte schneiden nach § 2. Erklärung 5. Im Falle rechts hat man die Strahlbüschel so zu legen, daß ein Paar entsprechende Strahlen q und q′ auf einanderfallen, dann schneiden sich a und a′, c und c′, b und b′ auf einer und derselben Geraden. Fig. 24. oder:

Auflösung 2. Man beschreibe Fig. 32. über s,ACBD einen beliebigen Strahlbüschel S,acbd und trage s′,A′C′B′D′ nach Aufgabe 3. in denselben hinein, wodurch man zwei Lagen $s_1, A_1 C_1 B_1 D_1$ und $s_2, A_2 C_2 B_2 D_2$ erhält. Um die Aufgabe rechts zu lösen, ziehe man durch S,acbd eine beliebige Transversale s,ACBD und lege über dieselbe nach Aufgabe 3. den Strahlbüschel S′,a′c′b′d′, wodurch man

zwei Lagen $S_1,a_1c_1b_1d_1$ und $S_2,a_2c_2b_2d_2$ Fig. 33. erhält. — Da es bei Auflösung 1. ganz beliebig ist, welche Punkte und Strahlen man auf einander fallen läßt, und unter welchem Winkel man s und s' Fig. 23. und in welcher Entfernung man S von S' Fig. 24. annimmt, da ferner bei Auflösung 2. wieder der Strahlbüschel S,acbd Fig. 32. und die Gerade s,ACBD Fig. 33. beliebig ist, so folgt:

6. Lehrsatz. Zwei gleichartige conforme Gebilde können auf unzählig viele Weisen in perspectivische Lage gebracht werden.

Wird eine Punktreihe s',A'C'B'D' nach Auflösung 2. der Aufgabe 5. mit einer anderen ihr conformen Reihe s,ACBD in perspectivische Lage gebracht, so daß sie einmal die Lage s_1, dann s_2 erhält, so fallen natürlich auch in den zwei, für Annahme eines und desselben Strahlbüschels S,acbd möglichen Fällen zwei verschiedene Paare entsprechender Punkte zusammen. Bei der Lage s_1 Fig. 32. (d. h. wenn s' nach s_1 fällt) fällt ein Punkt E' oder E_1 der s' oder s_1 mit dem entsprechenden Punkt E der s zusammen, während, wenn s' die Lage s_2 erhält, der Punkt E' nach E_2 zu liegen kommt. Dagegen fällt dann ein anderer Punkt F' oder F_2 der s' oder s_2 mit dem entsprechenden F der s zusammen, während, wenn s' in s_1 sich befindet, der dem F entsprechende in F_1 liegt. Der Gegenpunkt der Reihe s,ACBD ist in beiden Fällen der Punkt O, denn ein von S nach dem Punkt ∞ der s_1 gerichteter Strahl o, der also mit s_1 parallel ist, ist, weil $s_1 \parallel s_2$, auch zugleich parallel s_2, der Gegenpunkt der Reihe $s_1,A_1C_1B_1D_1$ ist der Punkt Q_1, der der Reihe $s_2,A_2C_2B_2D_2$ der Punkt Q_2, denn ein durch S nach dem Punkt ∞ der s gezogener und also der s paralleler Strahl q trifft die s_1 in Q_1, die s_2 in Q_2. Wird ein Strahlbüschel S',a'c'b'd' nach Auflösung 2. der Aufgabe 5. mit einem anderen ihm conformen Büschel S,acbd in perspectivische Lage gebracht, so daß der Scheitel S' einmal nach S_1, dann nach S_2 fällt, so fallen natürlich auch in den zwei für Annahme einer und derselben Punktreihe s,ACBD möglichen Fällen zwei verschiedene Paare entsprechender Strahlen zusammen. Bei der Lage S_1 Fig. 33. (d. h. wenn S' nach S_1 fällt), fällt ein Strahl e' oder e_1 des S' oder S_1 mit dem entsprechenden Strahl e des S zusammen, bei der Lage S_2 dagegen fällt ein anderer Strahl f' oder f_2 mit dem entsprechenden f des S zusammen. Die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel sind in S,acbd die Strahlen s, t, in S_1, die Strahlen s_1 und t_1, in S_2 die Strahlen s_2 und t_2. Denn zieht man in die Mitte von SS_1 eine Senkrechte, welche die zur Axe angenommene s in M schneidet, und beschreibt mit $MS = MS_1$ einen Kreis, so geht dieser auch durch S_2; denn in den Dreiecken MGS_1 und MGS_2 ist $MG = MG$ und nach Auflösung 2. der Aufgabe 5. und Lehrsatz 4. ist $GS_1 = GS_2$, $\angle MGS_1 = \angle MGS_2 = 90^0$, nach Lehrsatz 4. also $\triangle MGS_1 \cong \triangle MGS_2$, also $MS_1 = MS_2$. Schneidet nun der

Kreis die s in S und T, so sind s und t in S; s_1 und t_1 in S_1; s_2 und t_2 in S_2 die entsprechenden Schenkel der rechten Winkel. Es läßt sich nun leicht beweisen der

7. Lehrsatz. Zwei conforme Punktreihen s,ACBD und s',A'C'B'D' lassen sich bei Beibehaltung des einmal (willkürlich) gewählten Strahlbüschels S,acbd (Auflösung 2. der Aufgabe 5.) auf zwei Arten in perspectivische Lage bringen, indem zwei verschiedene Paare entsprechender Punkte E und E' (oder E_1), oder F und F' (oder F_2) auf einander fallen, und zwar liegen die Gegenpunkte in der Mitte zwischen diesen beiden Punkten; es ist also sowohl auf s,ACBD EO = FO, als auch auf $s_1,A_1C_1B_1D_1$, $E_1Q_1 = F_1Q_1$, als auch auf $s_2,A_2C_2B_2D_2$, $E_2Q_2 = F_2Q_2$. Fig. 32.

7. Lehrsatz. Zwei conforme Strahlbüschel S,acbd und S',a'c'b'd' lassen sich bei Beibehaltung der einmal (willkürlich) gewählten Punktreihe s,ACBD (Auflösung 2. der Aufgabe 5.) auf zwei Arten in perspectivische Lage bringen, indem zwei verschiedene Paare entsprechender Strahlen e und e' (oder e_1) oder f und f' (oder f_2) auf einander fallen, und zwar liegen die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel in der Mitte zwischen diesen beiden Strahlen; es ist also sowohl in S,acbd es = fs und et = ft, als auch in $S_1,a_1c_1b_1d_1$, $e_1s_1 = f_1s_1$ und $e_1t_1 = f_1t_1$, als auch in $S_2,a_2c_2b_2d_2$, $e_2s_2 = f_2s_2$ und $e_2t_2 = f_2t_2$. Fig. 33.

Denn zieht man in Fig. 32. durch S und O Senkrechte auf die nach Lehrsatz 4. parallelen Geraden s_1 und s_2, so ist, weil $(S - O) \parallel s_1 \parallel s_2$ ist, $N_1O = T_1S$; $N_2O = T_2S$; also nach Lehrsatz 4. $N_1O = N_2O$; ferner ist $\angle E_1N_1O = \angle F_2N_2O = 90^0$ und $\angle E_1ON_1 = \angle F_2ON_2$, also $\triangle E_1ON_1 \cong \triangle F_2ON_2$, folglich $E_1O = F_2O$ oder EO = FO. Aus gleichen Gründen ist auch $E_1S = E_2S$, und $F_1S = F_2S$, $Q_1S = Q_2S$. Ferner ist, da $(Q_1 - Q_2) \parallel s$ ist, das Viereck E_1Q_1SO und ebenso F_2Q_2SO ein Parallelogramm, also $E_1Q_1 = F_2Q_2 = SO$. Da ferner $F_1S = F_2S$, $Q_1S = Q_2S$, $\angle Q_1SF_1 = \angle Q_2SF_2$ ist, ist $\triangle Q_1SF_1 \cong \triangle Q_2SF_2$, also $Q_1F_1 = Q_2F_2 = SO = E_1Q_1$, also $F_1Q_1 = E_1Q_1$. Ebenso ist $\triangle Q_1SE_1 \cong \triangle Q_2SE_2$, also $Q_2E_2 = Q_1E_1 = SO = Q_2F_2$, also $E_2Q_2 = F_2Q_2$. — In Fig. 33. ist der Peripheriewinkel $S_1S\mathfrak{S}$ oder es $= \angle S_1\mathfrak{T}\mathfrak{S}$, oder da $\triangle \mathfrak{S}S_1\mathfrak{T} \cong \triangle \mathfrak{S}S_2\mathfrak{T}$ ist, es $= \angle S_2\mathfrak{T}\mathfrak{S}$. Da nun das Viereck $\mathfrak{S}SS_2\mathfrak{T}$ dem Kreis um M eingeschrieben ist, so ist $\angle S_2\mathfrak{T}\mathfrak{S} = \angle FS\mathfrak{S}$ d. h. gleich ts, also ist es = fs. Ferner ist $\angle S_1S\mathfrak{T}$ oder et $= \angle S_1\mathfrak{S}\mathfrak{T} = \angle S_2\mathfrak{S}\mathfrak{T}$, d. h. = ft, also et = ft. Ferner ist $\angle SS_1\mathfrak{S}$ oder $e_1s_1 = \angle FS_1\mathfrak{S}$. Wegen der Congruenz der Dreiecke $FS_2\mathfrak{S}$ und $FS_1\mathfrak{S}$ aber ist $\angle FS_2\mathfrak{S}$

$= \angle FS_1 S$, d. h. $= f_1 s_1$, also $e_1 s_1 = f_1 s_1$. Ferner ist $\angle SS_1 T$ oder $e_1 t_1 = \angle TSS = 180^0 - SS_2 T$, weil das Viereck $SSS_2 T$ dem Kreise eingeschrieben ist, oder $= 180^0 - FS_2 T$, oder, da $\triangle FS_2 T \cong \triangle FS_1 T$, $= 180^0 - FS_1 T$, d. h. $= f_1 t_1$, also $e_1 t_1 = f_1 t_1$. Da weiter $\triangle ES_2 S \cong \triangle ES_1 S$, so ist $\angle ES_2 S$ oder $e_2 s_2 = \angle ES_1 S = \angle SS_1 S = \angle SS_2 S$, d. h. $= f_2 s_2$, also $e_2 s_2 = f_2 s_2$; und da endlich $\triangle ES_2 T \cong \triangle ES_1 T$ ist, so ist $\angle ES_2 T$ oder $e_2 t_2 = \angle ES_1 T = \angle SS_1 T = \angle SST$, oder da das Viereck $SSS_2 T$ dem Kreise eingeschrieben ist, $= 180^0 - SS_2 T$, d. h. $= f_2 t_2$, also $e_2 t_2 = f_2 t_2$.

Da ferner nach Lehrsatz 6. zwei gleichartige conforme Grundgebilde auf unzählig viele Arten in perspectivische Lage gebracht werden können, so liegt ein tieferes Eingehen auf diese Verhältnisse nahe; und in der That giebt Aufschluß über die aus diesem Umstande entspringenden Beziehungen folgender

8. Lehrsatz. Befinden sich zwei conforme Punktreihen s,AOBE∞ und s′,A′∞B′E′Q′ in perspectivischer Lage und wird die eine s,AOBE∞ festgehalten, die andere aber so bewegt, daß sie, ohne umgeklappt zu werden, mit ersterer perspectivisch bleibt, und daß in ihrem Durchschnittspunkte dasselbe Paar entsprechender Punkte E und E′ vereinigt bleibt, so beschreibt das Projectionscentrum S einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Gegenpunkt O der festgehaltenen Punktreihe s,AOB ist. Fig. 34.

8. Lehrsatz. Befinden sich zwei conforme Strahlbüschel S,abqe und S′,a′b′q′e′ in perspectivischer Lage und wird der eine S,abqe festgehalten, der andere aber so bewegt, daß er, ohne umgeklappt zu werden, mit erstere m perspectivisch bleibt und daß in der Verbindungslinie ihrer Scheitel dasselbe Paar entsprechender Strahlen e und e′ vereinigt bleibt, so bewegt sich die Projectionsaxe s ihrer anfänglichen Lage parallel fort. Fig. 35.

Es seien O und Q′ die Gegenpunkte der bezüglich auf den Geraden s und s′ befindlichen conformen Punktreihen, so wird, wenn man beide in perspectivischer Lage an einander legt, indem man sie mit einem Paare entsprechender Punkte E und E′ auf einander fallen läßt (in der Figur hat man sich also in E zugleich den Punkt E′ liegend vorzustellen), und die s′ z. B. in die Lage s_1 bringt, so daß A′ nach A_1, B′ nach B_1, Q′ nach Q_1, E′ nach E_1 fällt, das zugehörige Projectionscentrum S_1 gefunden, indem man durch Q_1 eine Parallele zu s und durch O eine Parallele zu s_1 zieht. Denn erstere geht durch den unendlich entfernten Punkt der s und den ihr entsprechenden Q_1, letztere durch den unendlich entfernten Punkt der s_1 und den ihr entsprechenden Q_1; es sind also o_1 und q_1 Projectionsstrahlen und ihr Durchschnittspunkt S_1 das Projectionscentrum. Bringt man s′ in die

Lage s_2, so daß also A′ nach A_2, B′ nach B_2, Q′ nach Q_2 fällt, während nach wie vor E′ mit E zusammenfällt, so hat man, um das jetzige Projectionscentrum S_2 zu finden, wieder nur durch O eine Parallele zu s_2, durch Q_2 eine Parallele zu s zu legen. Im ersteren Falle entsteht ein Parallelogramm $E'OS_1Q_1$, in welchem $S_1O = E'Q_1$ ist, im zweiten Falle ein Parallelogramm $E'OS_2Q_2$, in welchem $S_2O = E'Q_2$ ist. Nun ist aber $E'Q_1 = E'Q_2 = E'Q'$, also auch $S_1O = S_2O$; es ist also S_2 ebensoweit von O entfernt, als S_1, und ein Gleiches läßt sich unter den oben gemachten Voraussetzungen von jedem anderen Projectionscentrum der beiden Punktreihen beweisen. Es liegen also S_1 und S_2 auf der Peripherie eines um den Gegenpunkt O der festgehaltenen Punktreihe mit dem Radius $OS_1 = OS_2$ beschriebenen Kreises. — Es seien ferner zwei conforme Strahlbüschel S,abqe Fig. 35. und S′,a′b′q′e′ dadurch in perspectivische Lage gebracht, daß man sie mit einem Paare entsprechender Strahlen e und e′ aufeinander gelegt hat, und zwar möge S′ nach S_1 fallen. Es schneiden sich dann die entsprechenden Strahlen auf einer Geraden oder Axe s_1. Mit welchem Strahlenpaare man auch die conformen Strahlbüschel S,abqe und S′,a′b′q′e′ auf einander legen mag, stets muß es ein Paar entsprechender Strahlen geben, die parallel mit einander sind. Denn ist s_1 die Axe, auf der sich a und a_1 (oder a′), b und b_1 (oder b′) schneiden, so sind die durch S und S_1 zu s_1 parallel gezogenen Strahlen entsprechend, denn sie schneiden sich im unendlich entfernten Punkte der Axe s_1. Es sein also hier q und q_1 die parallelen Strahlen. Wird jetzt der Scheitel S′ an einen anderen Ort S_2 verlegt, jedoch so, daß auch jetzt noch e und e′ auf einander fallen, so kommt, weil dabei der Winkel e′q′ nicht verändert wird, der Strahl q′ in die Lage q_2, also, da $e'q_2 = e'q_1$ ist, wird er parallel q_1 und folglich auch parallel q. Da nun nach Lehrsatz 2.β. Strahlbüschel $S_2,a_2b_2q_2e'$ perspectivisch mit S,abqe ist, müssen sich die entsprechenden Strahlen auf einer und derselben Geraden, oder Axe, schneiden. Nun schneiden sich aber q und q_2 nur im Unendlichen, da sie parallel sind. Es muß also die fragliche Axe s_2, ebenfalls parallel zu q und q_2 und also auch zu s_1 sein.

Die Betrachtung der Fig. 34. zeigte, daß das Viereck EOS_1Q_1, ein Parallelogramm ist, es entsteht die Frage, ob nicht unter Umständen dieses Parallelogramm in eine Raute oder auch in ein Quadrat übergehn könne. Es müßte dann also Fig. 36. $EO = EQ'$ sein, d. h. es müßten ein Paar entsprechender Punkte E und E′ gleich weit von den Gegenpunkten abstehn. Es fragt sich, ob dies möglich ist. Hierüber giebt § 2. Lehrsatz 17. Aufschluß, in welchem gezeigt war, daß das Rechteck aus den Abständen zweier entsprechenden Punkte von den Gegenpunkten einen constanten Inhalt hat. Bezeichnen wir diesen mit k^2, so ist also $OA \cdot Q'A' = OE \cdot Q'E' = \dots = k^2$. Nehmen wir nun in der Reihe $s,EAO\infty$ einen Punkt an, der um die Strecke k von O entfernt ist, z. B. G, und suchen den entspre-

chenden Punkt der Reihe $s', E'A'\infty Q'$, so muß dieser erstens, wenn G zwischen ∞ und E liegt, sich zwischen Q' und E' befinden, zweitens muß $OG \cdot Q'G' = k^2$ und da $OG = k$ ist, auch $QG = k$ sein. Nimmt man, was offenbar auch möglich ist, einen zweiten Punkt H in der Entfernung k von O nach der anderen Seite hin an, also zwischen O und ∞, so muß der entsprechende Punkt H' zwischen ∞ und Q' liegen und da $OK \cdot Q'H' = k^2$ und $OH = k$ ist, muß auch $Q'H' = k$ sein. Es giebt also stets zwei, aber auch nur zwei Punkte G, H, welche diese Eigenschaft haben. Werden nun die Punktreihen mit einem dieser entsprechenden Punktpaare auf einander gelegt, so ist also Fig. 38. das Viereck $GOSQ'$ eine Raute, und wenn man die Punktreihe $s' \perp s$ legt, ein Quadrat. Etwas Aehnliches findet auch bei den Strahlbüscheln statt. Nach § 2. Lehrsatz 17. hat das Produkt der Tangenten der Winkel, die von irgend zwei entsprechenden Strahlen und den nicht entsprechenden Strahlen der rechten Winkel gebildet werden, einen constanten Werth k^2. Es ist also $\text{tang}\, as \,.\, \text{tang}\, a't' = \text{tang}\, es \,.\, \text{tang}\, e't' = \ldots = k^2$. Wählt man nun in einem Strahlbüschel $S, esat$ einen Strahl g so, daß $\text{tang}\, gs = k$ ist Fig. 37., und liegt dieser Strahl g z. B. in dem Flächenraum des (nach § 1. Erklärung 22.) spitzen Winkels as oder at, so muß auch der entsprechende Strahl g' innerhalb $a's'$ oder $a't'$ liegen. Zugleich muß sein $\text{tang}\, gs \,.\, \text{tang}\, g't' = k^2$, folglich da $\text{tang}\, gs = k$ ist, $g't' = gs$, also $\text{tang}\, as \,.\, \text{tang}\, a't' = \text{tang}\, es \,.\, \text{tang}\, e't' = k^2 = \text{tang}^2\, gs = \text{tang}^2\, g't'$. Es folgt zugleich, da $st = s't' = 90^0$ ist, $gt = g's'$, also, da $\text{tang}\, gt = \text{cotang}\, gs = \frac{1}{k}$ ist, $\text{tang}\, gt \,.\, \text{tang}\, g's' = \frac{1}{k^2}$, also $\text{tang}\, at \,.\, \text{tang}\, a's' = \text{tang}\, et \,.\, \text{tang}\, e's' = \frac{1}{k^2} = \text{tang}^2\, gt = \text{tang}^2\, g's'$. Wird aber g auf der anderen Seite von s angenommen, so daß es nach h in den Flächenraum des Winkels es oder et fällt, der Art also, daß $\text{tang}\, hs = k$ ist, so muß auch h' in $e's'$ oder $e't'$ fallen und $\text{tang}\, h't' = k$, also $h't' = hs$ sein. Also ist $\text{tang}\, as \,.\, \text{tang}\, a't' = \text{tang}\, es \,.\, \text{tang}\, e't' = k^2 = \text{tang}^2\, hs = \text{tang}^2\, h't'$, und, wie man sogleich sieht, auch $\text{tang}\, at \,.\, \text{tang}\, a's' = \text{tang}\, et \,.\, \text{tang}\, e's' = \frac{1}{k^2} = \text{tang}^2\, ht = \text{tang}^2\, h's'$. Daß es nämlich innerhalb des Winkels SST und SS'T nur ein einziges Paar entsprechender Strahlen g und g' geben kann, für die $gs = g't'$ und also auch $gt = g's'$ ist, erhellt sogleich. Denn wäre noch ein Strahl g_1 da, von der Beschaffenheit, daß $g_1s = g'_1t'$ wäre, und wäre $g_1s < gs$, so wäre $g'_1t' < g't'$. Es wäre also in dem Strahlbüschel S die Aufeinanderfolge der Strahlen die: s, g_1, g, t, im Strahlbüschel S' aber; s', g', g'_1, t', was dem Begriffe der Conformität widerspricht, da sich dann g_1 und g'_1 nicht auf derselben Geraden schneiden können, wie s und s', t und t', g und g'. Ebenso wenig kann es einen Strahl g_2 geben, der Art, daß $g_2s > gs$ und zugleich $g_2s = g'_2t'$ wäre. Desgleichen giebt es in dem Nebenwinkel des Winkels

SST nur einen einzigen Strahl h von der geforderten Beschaffenheit. Man hat also den

9. Lehrsatz. In zwei conformen Punktreihen s,EAO∞ und s′,E′A′∞Q′ giebt es stets zwei, aber auch nur zwei Paare entsprechender Punkte G und G′, H und H′, die gleichweit von den Gegenpunkten abstehn, so daß OG = Q′G′ = OH = Q′H′ ist.

9. Lehrsatz. In zwei conformen Strahlbüscheln S,esat und S′,e′s′a′t′ giebt es stets zwei, aber auch nur zwei Paare entsprechender Strahlen g und g′, h und h′, die gleichweit von den nicht entsprechenden Strahlen der entsprechenden rechten Winkel abstehn, so daß gs = g′t′ = hs = h′t′ und gt = g′s′ = ht = h′s′ ist.

Von besonderem Interesse ist es noch, zu erforschen, welche Umstände eintreten, wenn die conformen Gebilde der Art in perspectivische Lage gebracht werden, daß G und G′ oder H und H′, g und g′ oder h und h′ zusammenfallen. Hierüber gilt folgender

10. Lehrsatz. Werden zwei conforme Punktreihen s,GEAO∞ und s′,G′E′A′∞Q′ der Art in perspectivische Lage gebracht, daß man ein Paar derjenigen entsprechenden Punkte z. B. G und G′ zusammenfallen läßt, die von den Gegenpunkten O und Q′ gleichweit abstehn, und dreht man dann, indem man die Gerade s festhält, die andere s′ um den festen Durchschnittspunkt G oder G′, so bewegt sich das Projectionscentrum S auf der Peripherie eines Kreises, der den Gegenpunkt O der festen Geraden s zum Mittelpunkt und OG = OH zum Halbmesser hat. Fig. 38.

10. Lehrsatz. Werden zwei conforme Strahlbüschel S,sgth und S′,s′g′t′h′ der Art in perspectivische Lage gebracht, daß man ein Paar derjenigen entsprechenden Strahlen z. B. g und g′ zusammenfallen läßt, die mit den nicht entsprechenden Strahlen der entsprechenden rechten Winkel st und s′t′ gleiche Winkel bilden, und läßt man dann, indem man den Strahlbüschel S festhält, den anderen S′ auf der Verbindungslinie der Scheitel g oder g′ fortrücken, so bewegt sich die Projectionsaxe parallel dieser Verbindungslinie der Scheitel g oder g′. Fig. 39.

Der Satz links ergiebt sich unmittelbar aus Lehrsatz 8. denn es ist jetzt nach der Voraussetzung G′Q′ = GO, und da auch OS = G′Q′ ist, ist OS = GO = HO. — Was den Satz rechts betrifft, so ist nach der Annahme gs = g′t′, also ∠ S′SC = ∠ SS′C, also △ SCS′ gleichschenklig, also SC = S′C. In den Dreiecken SBS′ und S′AS ist ferner SS′ = S′S, ∠ SS′B oder g′t′ = ∠ S′SA oder gs, ∠ S′SB

oder $90^0 + gs = \angle SS'A$ oder $90^0 + g't'$, also $\triangle SBS' \cong S'AS$, also $SA = S'B$, folglich da $SC = S'C$ war, auch $SA - SC = S'B - S'C$ oder $AC = BC$. Es ist also auch das Dreieck ACB gleichschenklig und $\angle BAC = \angle ABC$. Nun ist $\angle ACB = \angle SCS'$, also $\angle ABC = 90^0 - \frac{ACB}{2} = \angle SS'C = 90^0 - \frac{SCS'}{2}$; folglich $(B^-A) \parallel (S^-S')$, und hieraus so wie aus Lehrsatz 8. folgt der Satz rechts.

Bis jetzt haben wir zwei Gebilde betrachtet, es sind nun die Verhältnisse zu untersuchen, die eintreten, wenn mehrere zugleich auftreten. Zunächst überzeugt man sich sogleich von der Richtigkeit der Regel:

11. Lehrsatz. Liegen zwei Gebilde zugleich mit einem dritten perspectivisch, so folgt daraus noch nicht, daß sie auch gegen einander perspectivisch liegen.

Denn, sind z. B. $s_1, A_1C_1B_1D_1$, $s_2, A_2C_2B_2D_2$, $s_3, A_3C_3B_3D_3$ drei conforme Punktreihen, von denen die beiden ersten mit der dritten sich in perspectivischer Lage befinden, so kann dabei sehr wohl der Fall eintreten, daß die erste und dritte Punktreihe mit den entsprechenden Punkten A_1 und A_3, die zweite und dritte aber mit einem anderen Paare, z. B. mit C_2 und C_3 auf einander fallen. Ob nun auch die erste und zweite mit einem Paar entsprechender Punkte auf einander fallen, bleibt aber zweifelhaft, denn es kann sowohl das eine als das andere statt finden. Während sich also im Allgemeinen nichts bestimmen läßt, kann man für die besonderen Fälle, daß alle drei Punktreihen sich in einem und demselben Punkte schneiden, und daß drei Strahlbüschel denselben Strahl gemein haben, den Satz aufstellen:

12. Lehrsatz. Liegen von drei conformen Punktreihen die erste und zweite mit der dritten perspectivisch und schneiden sich alle drei in einem und demselben Punkte, so liegen auch die erste und zweite gegen einander perspectivisch und die drei Projectionscentra fallen entweder zusammen oder liegen auf einer und derselben Geraden. Fig. 40. und 41.

12. Lehrsatz. Liegen von drei conformen Strahlbüscheln der erste und zweite mit dem dritten perspectivisch und liegen ihre Scheitel alle drei auf einer und derselben Geraden, so liegen auch der erste und zweite gegen einander perspectivisch und die drei Projectionsaxen fallen entweder zusammen oder schneiden sich in einem und demselben Punkte. Fig. 40. und 42.

Es seien die drei Punktreihen $s_1, A_1C_1B_1D_1$, $s_2, A_2C_2B_2D_2$, $s_3, A_3C_3B_3D_3$ einander conform und die erste liege mit der dritten perspectivisch, so daß sich die Projectionsstrahlen in S_2 schneiden, die zweite liege auch mit der dritten perspectivisch, so daß die Projectionsstrahlen sich in S_1 schneiden, und alle drei mögen sich in einem und

demselben Punkte schneiden. Da nun $s_1, A_1C_1B_1D_1 \overline{\wedge}$ und perspectivisch mit $s_3, A_3C_3B_3D_3$ so müssen in ihrem Durchschnittspunkte zwei entsprechende Punkte, sie mögen E_1 und E_3 heißen, auf einander fallen. Es liegt aber auch $s_2, A_2C_2B_2D_2$ perspectivisch mit $s_3, A_3C_3B_3D_3$ nach der Voraussetzung, es müssen also auch in ihrem Durchschnittspunkte zwei entsprechende Punkte vereinigt sein. Der dem gemeinsamen Durchschnittspunkte E_3 der Reihe $s_3, A_3C_3B_3D_3$ entsprechende Punkt der Reihe $s_2, A_2C_2B_2D_2$ heiße nun E_2, so ist also nach § 2. Lehrsatz 2.

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1E_1}{B_1E_1} = \frac{A_3C_3}{B_3C_3} : \frac{A_3E_3}{B_3E_3} = \frac{A_2C_2}{B_2C_2} : \frac{A_2E_2}{B_2E_2}$$

also
$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1E_1}{B_1E_1} = \frac{A_2C_2}{B_2C_2} : \frac{A_2E_2}{B_2E_2}.$$

Es sind also nach § 2. Lehrsatz 11. E_1 und E_2 entsprechende Punkte der Reihen $s_1, A_1C_1B_1D_1$ und $s_2, A_2C_2B_2D_2$, und da sie zusammenfallen, so liegen diese Punktreihen nach Lehrsatz 2.β. perspectivisch und ihre Projectionsstrahlen schneiden sich also in einem und demselben Punkte S_3. Nun ist Strahlbüschel $S_2, a_2c_2b_2d_2 \overline{\wedge}$ Strahlbüschel $S_1, a_1c_1b_1d_1$ nach § 2. Erklärung 5., da sich a_2 und a_1, c_2 und c_1, u. s. w. auf der Geraden s_3 schneiden, und die Büschel also perspectivisch liegen für s_3 als Axe. Werden nun S_2 und S_1 durch eine Gerade verbunden, so sind in derselben nach § 2. Lehrsatz 2. und Erklärung 8. entsprechende Strahlen dieser conformen Strahlbüschel, sie mögen r_2 und r_1 heißen, vereinigt. Es schneidet also $(S_2 - S_1)$, da auf ihr der Strahl r_2 liegt, die Punktreihen $s_1, A_1C_1B_1D_1$ und $s_3, A_3C_3B_3D_3$ in den entsprechenden Punkten R_1 und R_3; es schneidet aber auch $(S_2 - S_1)$, da auf ihr der Strahl r_1 liegt, die conformen Punktreihen s_2 und s_3 in den entsprechenden Punkten R_2 und R_3. Es ist also $s_1, A_1R_1C_1B_1D_1 \overline{\wedge} s_3, A_3R_3C_3B_3D_3 \overline{\wedge} s_2, A_2R_2C_2B_2D_2$, folglich auch $s_1, A_1R_1C_1B_1D_1 \overline{\wedge} s_2, A_2R_2C_2B_2D_2$ nach § 2. Lehrsatz 13.; und nach § 2. Lehrsatz 11. sind R_1 und R_2 entsprechende Punkte dieser Punktreihen, folglich da diese perspectivisch liegen, R_1R_2 ein Projectionsstrahl, der also durch S_3 geht, also muß $(S_2 - S_1)$ durch S_3 gehen, oder S_3 mit S_1 und S_2 auf einer und derselben Geraden liegen. Nur das könnte noch statt finden, daß alle drei Projectionscentra zusammenfielen Fig. 41. — Sind ferner Fig. 40. drei Strahlbüschel $S_1, a_1c_1b_1d_1$; $S_2, a_2c_2b_2d_2$; $S_3, a_3c_3b_3d_3$ conform und liegen die beiden ersteren mit dem letzteren perspectivisch, ersterer für die Axe s_2, letzterer für die Axe s_1, und liegen S_1, S_2, S_3 auf einer und derselben Geraden, oder fallen drei ihrer Strahlen r_1, r_2, r_3 auf einander, so sind r_2 und r_3, r_1 und r_3 entsprechend nach § 2. Lehrsatz 2., also auch, da

$$\frac{\sin a_1c_1}{\sin b_1c_1} : \frac{\sin a_1r_1}{\sin b_1r_1} = \frac{\sin a_3c_3}{\sin b_3c_3} : \frac{\sin a_3r_3}{\sin b_3r_3} = \frac{\sin a_2c_2}{\sin b_2c_2} : \frac{\sin a_2r_2}{\sin b_2r_2}$$

ist, r_1 und r_2 nach § 2. Lehrsatz 11. entsprechend, also Strahlbüschel

$S_1, a_1 c_1 b_1 d_1$ perspectivisch mit Strahlbüschel $S_2, a_2 c_2 b_2 d_2$. Nun ist Punktreihe $s_2, A_2 C_2 B_2 D_2 \overline{\wedge}$ Punktreihe $s_1, A_1 C_1 B_1 D_1$, da sie dem Strahlbüschel S_3 einbeschrieben sind. Schneiden sich diese nun in dem Punkte E_1 (oder E_2), so sind hier zwei entsprechende Punkte E_1 und E_2 vereinigt. Da nun E_2 ein Punkt der Projectionsaxe s_2 der Strahlbüschel S_1 und S_3 ist, muß auch der dem Strahle e_1 des ersteren entsprechende Strahl e_3 des letzteren durch E_2 gehn; da ferner E_1 ein Punkt der Projectionsaxe s_1 der Strahlbüschel S_2 und S_3 ist, muß dieser Strahl e_3 auch dem Strahl e_2 entsprechen. Es ist also Strahlbüschel $S_1, a_1 c_1 b_1 d_1 e_1 \overline{\wedge} S_3, a_3 c_3 b_3 d_3 e_3 \overline{\wedge} S_2, a_2 c_2 b_2 d_2 e_2$ also auch nach § 2. Lehrsatz 13. $S_1, a_1 c_1 b_1 d_1 e_1 \overline{\wedge} S_2, a_2 c_2 b_2 d_2 e_2$ und nach § 2. Lehrsatz 11. sind e_1, e_2 entsprechende Strahlen dieser beiden Strahlbüschel; da diese nun perspectivisch sind, muß der Durchschnittspunkt der Strahlen e_1 und e_2 zugleich ein Punkt ihrer Axe s_3 sein; also geht auch diese durch den Punkt E_1 oder E_2, und es fällt auch E_3 nach E_1, E_2, es schneiden sich daher alle drei Projectionsaxen in einem und demselben Punkte; oder alle drei Projectionsaxen fallen zusammen, wie in Fig. 42. Man wird übrigens leicht bemerken, daß der Satz rechts die Umkehrung von dem links stehenden ist. Es läßt sich zugleich dieser Lehrsatz noch anders aussprechen. Sind nämlich zwei Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ in solcher Lage gegeben, daß die Geraden $A_1 B_1$ oder s_1; $A_2 B_2$ oder s_2; $A_3 A_3$ oder s_3 sich in einem und demselben Punkte schneiden Fig. 40., so kann man annehmen, es seien in diesem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt die entsprechenden Punkte von conformen Punktreihen auf s_1, s_2, s_3 vereinigt, es lägen also in ihm Punkte E_1, E_2, E_3, ferner sein A_1, A_2, A_3 entsprechende Punkte und ebenso B_1, B_2, B_3. Man kann nun auf einer der Geraden, z. B. auf s_1 einen beliebigen Punkt, z. B. C_1 annehmen, und die entsprechenden C_2, C_3, auf s_2, s_3 bestimmen, so daß also $s_1, A_1 C_1 B_1 E_1 \overline{\wedge} s_2, A_2 C_2 B_2 E_2 \overline{\wedge} s_3, A_3 C_3 B_3 E_3$. Ebenso kann man die einem beliebigen anderen Punkte D_1 entsprechenden D_2, D_3 bestimmen, so daß $s_1, A_1 C_1 B_1 D_1 E_1 \overline{\wedge} s_2, A_2 C_2 B_2 D_2 E_2 \overline{\wedge} s_3, A_3 C_3 B_3 D_3 E_3$ ist. Man hat dann drei conforme und perspectivisch liegende Punktreihen und kann den obigen Satz links anwenden. — Sind im anderen Falle zwei Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ Fig. 40 in solcher Lage gegeben, daß die Durchschnittspunkte S_1, S_2, S_3 der Seiten $A_2 A_3$ und $B_2 B_3$, $A_1 A_3$ und $B_1 B_3$, $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ auf einer und derselben Geraden liegen, so kann man S_1, S_2, S_3 als Scheitel conformer Strahlbüschel ansehn und in ihrer Verbindungslinie drei entsprechende, auf einander fallende Strahlen r_1, r_2, r_3 annehmen; man kann dann zu beliebigen Strahlen c_1, d_1 die entsprechenden c_2, d_2, c_3, d_3 bestimmen, so daß Strahlbüschel $S_1, a_1 r_1 c_1 b_1 d_1 \overline{\wedge} S_2, a_2 r_2 c_2 b_2 d_2 \overline{\wedge} S_3, a_3 r_3 c_3 b_3 d_3$ ist und daß sie zugleich alle perspectivisch liegen, worauf man den obigen Satz rechts anwenden kann. Man hat also den

13. Lehrsatz. Convergiren die drei Geraden s_1, s_2, s_3, welche die Ecken A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3, zweier Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ verbinden in einem und demselben Punkte E_1 (oder E_2 oder E_3), so liegen die Durchschnittspunkte S_1, S_2, S_3 bezüglich der Seitenpaare A_2A_3 und B_2B_3, A_1A_3 und B_1B_3, A_1A_2 und B_1B_2 auf einer und derselben Geraden r_1 (oder r_2 oder r_3). Fig. 40.

13. Lehrsatz. Liegen die drei Durchschnittspunkte S_1, S_2, S_3 der Seitenpaare A_2A_3 und B_2B_3, A_1A_3 und B_1B_3, A_1A_2 und B_1B_2 zweier Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ auf einer und derselben Geraden r_1 (oder r_2 oder r_3), so convergiren die Geraden s_1, s_2, s_3, welche bezüglich die Punkte A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3 verbinden, in einem und demselben Punkte E_1 (oder E_2 oder E_3). Fig. 40.

Auch hier sieht man sogleich, daß der Satz rechts die Umkehrung des links stehenden ist.

Besonders wichtig sind auch hier wieder die Verhältnisse, die sich zeigen, wenn harmonische Gebilde dadurch in perspectivische Lage gebracht werden, daß man sie, nach Lehrsatz 2. β. mit einem Paar entsprechender Elemente auf einander legt. Es seien Fig. 43 die Punktreihen $s_1, A_1C_1B_1D_1$ und $s_2, A_2C_2B_2D_2$ harmonisch, und folglich, da nach § 1. Erklärung 23 der Quotient des Doppelverhältnisses bei beiden $= 1$ ist, conform. Sie seien ferner dadurch in perspectivische Lage gebracht, daß man sie mit einem Paar entsprechender Punkte, z. B. mit A_1 und A_2 auf einander gelegt hat. Es convergiren demnach die Projectionsstrahlen $(C_1 - C_2)$ oder c_1, $(B_1 - B_2)$ oder b_1, $(D_1 - D_2)$ oder d_1 in demselben Punkte S_1. Da aber, wenn

$$\frac{A_2C_2}{B_2C_2} : \frac{A_2D_2}{B_2D_2} = 1$$

ist, auch

$$\frac{A_2D_2}{B_2D_2} : \frac{A_2C_2}{B_2C_2} = 1$$

ist, so ist auch Punktreihe $s_2, A_2D_2B_2C_2 \barwedge s_1, A_1C_1B_1D_1$ und da sie mit einem Paar entsprechender Punkte A_1 und A_2 auf einander fallen, liegen sie perspectivisch, und es schneiden sich also auch die Geraden $(C_1 - D_2)$ oder c_2, $(B_1 - B_2)$, welches jetzt b_2 heißen mag, $(D_1 - B_2)$ oder d_2 als Projectionsstrahlen in einem und demselben Punkte S_2. Ebenso überzeugt man sich sogleich, daß zwei harmonische Strahlbüschel $S_1, a_1c_1b_1d_1$ und $S_2, a_2c_2b_2d_2$, indem man sie mit einem Paare entsprechender Strahlen b_1 und b_2 zusammenfallen läßt, auf doppelte Weise in perspectivische Lage gebracht werden können, indem sich a_1 und a_2, c_1 und c_2, d_1 und d_2 auf s_1; a_1 und a_2, c_1 und d_2, d_1 und c_2 auf s_2 schneiden. Es entsteht also der

14. Lehrsatz. Zwei harmonische Punktreihen s_1,

14. Lehrsatz. Zwei harmonische Strahlbüschel S_1,

$A_1C_1B_1D_1$ und $s_2, A_2C_2B_2D_2$ können, wenn sie in ihrer Lage, mit einem Paare entsprechender Punkte auf einander fallend, festgehalten werden, als perspectivisch für zwei verschiedene Strahlbüschel S_1 und S_2 angesehen werden. Fig. 43.

$a_1c_1b_1d_1$ und $S_2, a_2c_2b_2d_2$ können, wenn sie in ihrer Lage, mit einem Paare entsprechender Strahlen auf einander fallend, festgehalten werden, als perspectivisch für zwei verschiedene Punktreihen s_1 und s_2 angesehen werden. Fig. 43.

Man kann diesen Satz noch anders aussprechen. Nämlich:

15. Erklärung. Man versteht unter einem **vollständigen Vierseit** den Inbegriff beliebiger vier Gerader c_1, d_1, c_2, d_2, die als begrenzt angenommen werden. Diese Geraden heißen die **Seiten** des Vierseits, ihre sechs Durchschnittspunkte C_2, S_1, D_2, S_2, C_1, D_1 die **Ecken** desselben. Es hat drei Paar gegenüberliegender Ecken: C_2 und D_2, S_1 und S_2, C_1 und D_1; die drei Verbindungslinien jedes Paares Gegenecken, also die Geraden s_2, b_1 (oder b_2), s_1 heißen die **Diagonalen** des Vierseits. Fig. 43.

15. Erklärung. Man versteht unter einem **vollständigen Viereck** den Inbegriff beliebiger vier Punkte C_1, D_1, C_2, D_2. Diese Punkte heißen die **Ecken** des Vierecks, ihre sechs Verbindungslinien c_2, s_1, d_2, s_2, c_1, d_1 die **Seiten**. Es hat drei Paar gegenüberliegender Seiten: c_2 und d_2, s_1 und s_2, c_1 und d_1; die drei Durchschnittspunkte jedes Paares Gegenseiten, also die Punkte S_2, B_1 (oder B_2), S_1 heißen die **Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten** des Vierecks. Fig. 44.

Man kann demnach den Satz 14 auch so aussprechen:

16. Lehrsatz. Bringt man zwei harmonische Punktreihen $s_1, A_1C_1B_1D_1$ und $s_2, A_2C_2B_2D_2$, indem man sie mit entsprechenden Punkten auf einander legt, auf doppelte Weise in perspectivische Lage, so erhält man ein vollständiges Vierseit $c_1d_1c_2d_2$. Fig. 43.

16. Lehrsatz. Bringt man zwei harmonische Strahlbüschel $S_1, a_1c_1b_1d_1$ und $S_2, a_2c_2b_2d_2$, indem man sie mit entsprechenden Strahlen auf einander legt, auf doppelte Weise in perspectivische Lage, so erhält man ein vollständiges Viereck $C_1D_1C_2D_2$. Fig. 44.

Auch der umgekehrte Satz läßt sich leicht beweisen, nämlich:

17. Lehrsatz. Im vollständigen Vierseit sind die Punkte, in welchen die Dia-

17. Lehrsatz. Im vollständigen Viereck sind die Strahlen, welche die Durch-

gonalen einander schneiden, u den zugehörigen Ecken zugeordnete harmonische Punkte. Es ist also Punktreihe $s_1, A_1 C_1 B_1 D_1$, $s_2, A_2 C_2 B_2 D_2$, $b_1, S_1 B_2 S_2 B_1$ harmonisch. Fig. 43.

schnittspunkte gegenüberliegender Seitenpaare verbinden, zu den letzteren zugeordnete harmonische Strahlen. Es ist also Strahlbüschel $S_1, a_1 c_1 b_1 d_1$, $S_2, a_2 c_2 b_2 d_2$, $B_1, s_1 b_2 s_2 b_1$ harmonisch. Fig. 44.

Denn im Strahlbüschel $S_1, a_1 c_1 b_1 d_1$ ist nach § 1. Lehrsatz 11 und § 2. Lehrsatz 2.

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{A_2C_2}{B_2C_2} : \frac{A_2D_2}{B_2D_2}$$

ebenso ist im Strahlbüschel $S_2, a_2 c_2 b_2 d_2$

$$\frac{A_1D_1}{B_1D_1} : \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_2C_2}{B_2C_2} : \frac{A_2D_2}{B_2D_2}.$$

Es ist also: $$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{A_1D_1}{B_1D_1} : \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

oder $$\left(\frac{A_1C_1}{B_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{A_1D_1}{B_1D_1}\right)^2.$$

folglich $$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_1D_1}{B_1D_1}.$$

oder $$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} : \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = 1.$$

also $s_1, A_1 C_1 B_1 D_1$ harmonisch. Ebenso ist auch $s_2, A_2 C_2 B_2 D_2$ harmonisch. Um sich endlich zu überzeugen, daß auch $b_1, S_1 B_2 S_2 B_1$ harmonisch sei, braucht man nur z. B. von D_1 nach B_2 eine Gerade zu ziehen, dann ist D_1 das Projectionscentrum der Punktreihen $s_2, A_2 C_2 B_2 D_2$ und $b_1, B_1 S_2 B_2 S_1$, und da erstere harmonisch ist, muß es auch letztere sein. Ebenso ist im vollständigen Viereck nach § 1. Lehrsatz 11. und, da sowohl Strahlbüschel $S_1, a_1 c_1 b_1 d_1$ als $S_2, a_2 c_2 b_2 d_2$ über der Punktreihe $s_1, A_1 C_1 B_1 D_1$ stehn:

$$\frac{\sin a_1c_1}{\sin b_1c_1} : \frac{\sin a_1d_1}{\sin b_1d_1} = \frac{\sin a_2c_2}{\sin b_2c_2} : \frac{\sin a_2d_2}{\sin b_2d_2}.$$

aber auch, da sie über der Punktreihe $s_2, A_2 C_2 B_2 D_2$ stehn:

$$\frac{\sin a_1d_1}{\sin b_1d_1} : \frac{\sin a_1c_1}{\sin b_1c_1} = \frac{\sin a_2c_2}{\sin b_1c_2} : \frac{\sin a_2d_2}{\sin b_2d_2}.$$

woraus ebenso wie oben folgt

$$\frac{\sin a_1c_1}{\sin b_1c_1} : \frac{\sin a_1d_1}{\sin b_1d_1} = 1.$$

Es ist also Strahlbüschel $S_1, a_1 c_1 b_1 d_1$ harmonisch, ebenso $S_2, a_2 c_2 b_2 d_2$. Der Strahlbüschel $B_1, b_2 s_2 b_1 s_1$ liegt aber mit $S_1, a_1 c_1 b_1 d_1$ für die Gerade $D_1 C_2$ oder d_2 perspectivisch, also ist auch er harmonisch.

Wegen der Wichtigkeit des merkwürdigen Satzes 17. mag noch der elementare Beweis desselben hier seinen Platz finden, d. h. ein Beweis, der die im Vorigen entwickelten Begriffe der „Geometrie der

Lage" oder „neueren Geometrie" nicht voraussetzt und sich nur an die gewöhnliche Geometrie anschließt. Es sei ein vollständiges Vierseit gegeben Fig. 45. dessen Seiten, natürlich beliebig verlängert gedacht, AB, AD, CB, CD, HG, HJ sein. Man ziehe durch C die Gerade KL || BD, so verhält sich

$$AG : AC = DB : LK.$$

oder $$AG : CG = DB : LK - DB. \quad (\alpha.$$

Ferner verhält sich in den ähnlichen Dreiecken FLC und FDB

$$FC : LC = FB : DB$$

also ist $$LC = \frac{FC \cdot DB}{FB}.$$

in den ähnlichen Dreiecken ECK und EDB verhält sich

$$EC : KC = ED : BD$$

woraus folgt $$KC = \frac{EC \cdot BD}{ED}$$

folglich $$LK = LC + KC = \left(\frac{FC}{FB} + \frac{EC}{ED}\right) DB$$

und daher nach (α:

$$AG : CG = 1 : \frac{FC}{FB} + \frac{EC}{ED} - 1$$

oder $$AG : CG = 1 : \frac{CF}{BF} - \frac{CD}{ED}$$

oder auch $$AG : CG = 1 : \frac{CE}{DE} - \frac{CB}{FB} \quad (a.$$

Wird ferner durch C die MN || EF gezogen, so verhält sich

$$AH : AC = FE : MN$$

also $$AH : CH = FE : FE - MN. \quad (\beta.$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DNC und DFE; BMC und BEF aber ist

$$DC : NC = DE : FE$$

also $$NC = \frac{DC \cdot FE}{DE}$$

und $$BC : MC = BF : FE$$

also $$MC = \frac{BC \cdot FE}{BF}$$

mithin $$MN = NC + MC = \left(\frac{CD}{ED} + \frac{CB}{FB}\right) FE$$

und es verhält sich daher nach (β.

$$AH : CH = FE : FE - \left(\frac{CD}{ED} + \frac{CB}{FB}\right) FE$$

oder $$AH : CH = 1 : 1 - \left(\frac{CD}{ED} + \frac{CB}{FB}\right)$$

oder $$AH : CH = 1 : \frac{CF}{BF} - \frac{CD}{ED}$$
oder auch $$AH : CH = 1 : \frac{CE}{DE} - \frac{CB}{FB} \quad \text{(b.}$$
Vergleicht man jetzt diese letzte Gleichung (b mit (a, so erhält man sogleich:

$$AG : CG = AH : CH = 1 : \frac{CF}{BF} - \frac{CD}{ED} = 1 : \frac{CE}{DE} - \frac{CB}{FB}.$$

Es ist also $$\frac{AG}{CG} = \frac{AH}{CH}$$
oder $$\frac{AG}{CG} : \frac{AH}{CH} = 1,$$
also ist die Diagonale AH in A, G, C, H harmonisch getheilt, und zugleich hat man den Exponenten des Verhältnisses, nämlich $1 : \frac{CF}{BF} - \frac{CD}{ED}$ oder $1 : \frac{CE}{DB} - \frac{CB}{FB}$ oder auch $BF \times ED : CF \times ED - CD \times BF$ oder $DE \times FB : CE \times FB - CB \times DE$ erhalten, dessen geometrische Bedeutung sogleich ins Auge fällt. Zöge man ferner JA und JC, so würde ebenso wie der Lehrsatz 13. § 1. sich zeigen lassen, daß der bei J entstehende Strahlbüschel harmonisch ist.

Aus § 1. Lehrsatz 27. folgt ferner:

18. Lehrsatz. Sind in einem vollständigen Vierseit $c_1d_1c_2d_2$ zwei Diagonalen s_1 und s_2 parallel, so werden die auf ihnen von zwei Seiten c_1 und d_1 oder c_2 und d_2 abgeschnittenen Stücke C_1D_1 und C_2D_2 von der dritten Diagonale b_1 oder b_2 halbirt, und umgekehrt:
Werden in einem vollständigen Vierseit die auf zwei Diagonalen s_1 und s_2 von zwei Seiten c_1 und d_1 oder c_2 und d_2 abgeschnittenen Stücke C_1D_1 und C_2D_2 von der dritten Diagonale b_1 oder b_2 halbirt, so sind die ersteren Diagonalen s_1 und s_2 parallel. Fig. 46.

18. Lehrsatz. Stehen in einem vollständigen Viereck $C_1D_1C_2D_2$ zwei Verbindungslinien a_1, b_1 der Durchschnittspunkt S_1 und S_2, S_1 und B_1 (oder B_2) der Gegenseiten auf einander senkrecht, so halbiren sie bezüglich den Winkel, den die Verbindungslinien C_1C_2 und D_1D_2 der Gegenecken mit einander bilden, und seinen Nebenwinkel; und umgekehrt:
Wird der Winkel, den die Verbindungslinien C_1C_2 und D_1D_2 der Gegenecken in einem vollständigen Viereck mit einander bilden, und sein Nebenwinkel von zwei Verbindungslinien a_1, b_1 der Durchschnittspunkte der Gegenseiten halbirt, so stehen letztere auf einander senkrecht. Fig. 47.

Mit Hülfe des bisher Entwickelten lassen sich nun auch leicht folgende Aufgaben lösen.

19. Aufgabe. Gegeben drei Punkte einer harmonischen Punktreihe, mit Hülfe des Lineals allein den vierten Punkt zu finden.

α) wenn er der äußere sein soll.

β) wenn er der innere sein soll. Fig. 43.

19. Aufgabe. Gegeben drei Strahlen eines harmonischen Strahlbüschels, mit Hülfe des Lineals allein den vierten Strahl zu finden.

α) wenn er der äußere sein soll.

β) wenn er der innere sein soll. Fig. 44.

Auflösung der Aufgabe α. Durch den Punkt B_1, dessen zugeordneter gesucht wird, ziehe man eine beliebige Gerade b_1 (oder b_2) und nehme auf ihr zwei beliebige Punkte S_1, S_2 an, ziehe (S_1-C_1), (S_1-D_1), (S_2-C_1), (S_2-D_1); die erste und vierte dieser Geraden schneiden sich in C_2, die zweite und dritte in D_2; man ziehe nun (D_2-C_2) oder s_2, so schneidet dieselbe die s_1 Fig. 43. im verlangten Punkte A_1. — Um zu drei Strahlen c_1, a_1, d_1, eines Strahlbüschels S_1 Fig. 44. den dem mittleren Strahl a_1 zugeordneten harmonischen zu finden, nehme man auf a_1 einen beliebigen Punkt S_2 an und ziehe die beliebigen Graden c_2, d_2, die die Strahlen c_1, d_1 bezüglich in C_1, D_2, C_2, D_1 schneiden, ziehe die Geraden (C_1-D_1), (C_2-D_2) oder s_1, s_2, die sich in B_1 (oder B_2) treffen, so ist $(S-B_1)$ oder $(S-B_2)$ der gesuchte Strahl b_1.

Auflösung der Aufgabe β. Gegeben die Punkte A_1, C_1, D_1 der Geraden s_1 Fig. 43., gesucht der innere, dem A_1 zugeordneten Punkt B_1. Man ziehe durch A_1 (oder A_2) eine beliebige Gerade s_2, nehme auf ihr zwei beliebige Punkte C_2, D_2 an, ziehe (C_2-C_1), (C_2-D_1), (D_2-C_1), (D_2-D_1) oder c_1, d_2, c_2, d_1, die sich in S_1, S_2 schneiden, ziehe (S_1-S_2) oder b_1 (oder b_2); so schneidet diese die s_1 im gesuchten Punkt B_1. — Gegeben die Strahlen b_1, c_1, d_1, des Strahlbüschels S_1 Fig. 44; gesucht der dem b_1 zugeordnete innere Strahl a_1. Man nehme auf b_1 einen beliebigen Punkt B_1 (oder B_2) an und ziehe von ihm aus zwei beliebige Grade s_1, s_2, die die c_1, d_1, bezüglich in C_1, D_1, D_2, C_2 schneiden, ziehe (C_1-D_2), (D_1-C_2), die sich in S_2 treffen und ziehe (S_2-S_1), so ist dies der verlangte Strahl a_1.

Man sieht sogleich, daß sich die Auflösungen der Aufgaben: links α und rechts β, links β und rechts α, entsprechen.

20. Aufgabe. Gegeben eine Gerade s_1 und auf ihr drei Punkte C_1, B_1, D_1, von denen B_1 die Strecke C_1D_1 halbirt, und außerhalb der s_1 ein Punkt C_2; mittelst des

20. Aufgabe. Gegeben der Scheitel S_1 eines Strahlbüschels und an ihm drei Strahlen c_1, b_1, d_1, von denen b_1 den Winkel c_1d_1 halbirt, und eine nicht durch S_1

Lineals allein durch C_2 eine Parallele s_2 zu s_1 zu ziehen. Fig. 46.

gehende Gerade c_2; mittelst des Lineals allein denjenigen Punkt S_2 der c_2 zu finden, der so beschaffen ist, daß der von (S_1-S_2) und b_1 gebidete Winkel $= 90^0$ ist. Fig. 47.

Auflösung der Aufgabe links. Man ziehe (C_1-C_2), (D_1-D_2); auf (C_1-C_2) nehme man einen beliebigen Punkt S_1 an, ziehe (S_1-D_1) und (S_1-B_1); letztere schneidet die (D_1-C_2) in S_2, dann ziehe man (C_1-S_2), welche die (S_1-D_1) in D_2 trifft; so ist nach Lehrsatz 18. (C_2-D_2) die gesuchte Gerade s_2. — Um die Aufgabe rechts zu lösen, bestimme man die Durchschnittspunkte C_1, D_2, von c_1 und d_1 mit c_2. Durch ersteren lege man eine beliebige Gerade s_1 und fixire ihre Durchschnittspunkte D_1 und B_1 mit d_1 und b_1; von B_1 ziehe man s_2 nach $(d_1 \cdot c_2)$ oder D_2; sie schneidet die c_1 in C_2. Man ziehe nun (D_1-C_2), so trifft sie mit der c_2 im gesuchten Punkt S_2 zusammen und (S_2-S_1) oder a_1 steht nach Lehrsatz 18. $\perp b_1$.

Die Betrachtung der perspectivischen Lage führt uns noch auf eine Besonderheit der Punktreihen. Es kann nämlich kommen, daß in einem Strahlbüschel S,abcd zwei parallele Transversalen $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ Fig. 23. gezogen werden, die sich also in einem unendlich entfernten Punkte schneiden. Es ist also dann nach § 2. Lehrsatz 2. Punktreihe $\mathfrak{f}_1,\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1\infty \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{f}_2,\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_2\infty$, also $\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1} : \frac{\mathfrak{A}_1\infty}{\mathfrak{B}_1\infty} = \frac{\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2} : \frac{\mathfrak{A}_2\infty}{\mathfrak{B}_2\infty}$ der nach § 1. Lehrsatz 9. $\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1} : 1 = \frac{\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2} : 1$, oder $\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2} = \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2}$. Ebenso findet sich auch, weil die Punktreihe $\mathfrak{f}_1,\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1\infty \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{f}_2,\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2\infty$ ist, $\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2} = \frac{\mathfrak{D}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_2\mathfrak{C}_2}$ etc. Kurz, man sieht, daß alle entsprechenden Strecken $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2$ u. s. w. ein und dasselbe Verhältniß zu einander haben, und zugleich, daß das eine Folge davon ist, daß die unendlich entfernten Punkte beider Punktreihen entsprechend waren. Es kann aber dieselbe Eigenschaft der Reihen auch dann eintreten, wenn das Projectionscentrum S Fig. 23a. in das Unendliche rückt. Dann werden die Projectionsstrahlen parallel und man kann sich einen unendlich entfernten mit den übrigen parallelen Strahl denken, der durch die unendlich entfernten Punkte von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ geht; es ist also auch dann nach § 2. Erklärung 8. der unendlich entfernte Punkt der Punktreihe $\mathfrak{f}_1,\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1 \ldots.$ und $\mathfrak{f}_2,\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_2 \ldots.$ entsprechend und man erhält auch hier $\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2} = \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2} = \frac{\mathfrak{D}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{D}_2\mathfrak{C}_2} = \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{B}_2\mathfrak{D}_2} = \ldots.$ u. s. w., wovon man sich auch mit Hülfe der Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathfrak{A}_1 S \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1 S \mathfrak{B}_2$ etc., leicht überzeugt. Zugleich sieht man, daß, wenn in zwei conformen Punktreihen $\mathfrak{f}_1,\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1 \ldots.$, $\mathfrak{f}_2,\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_2 \ldots.$ die entspre-

chenden Abschnitte dasselbe Verhältniß haben, die unendlich entfernten Punkte entsprechend sein müssen. Denn aus $\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2} = \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2}$ folgt $\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}:1 = \frac{\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2}:1$ oder $\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}:\frac{\mathfrak{A}_1\infty}{\mathfrak{B}_1\infty} = \frac{\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2}:\frac{\mathfrak{A}_2\infty}{\mathfrak{B}_2\infty}$. Es sind also nach § 2. Lehrsatz 11. die unendlich entfernten Punkte entsprechend. Construirt man über derselben Punktreihe s,QAC.... Fig. 24. ein Paar mit den entsprechenden Strahlen der rechten Winkel zusammenfallende Strahlbüschel, so müssen offenbar jede zwei entsprechende Strahlen a und a′, c und c′ u. s. w. zusammenfallen. Läßt man bei perspectivisch liegenden Strahlbüscheln $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ Fig. 23b. die Projectionsaxe in das Unendliche rücken, so werden jede zwei entsprechende Strahlen parallel, also $\mathfrak{a}_2 \parallel \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_2 \parallel \mathfrak{b}_1$ etc., also $\angle \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 = \angle \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\angle \mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_2 = \angle \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ etc. Stehen in $\mathfrak{S}_1$ zwei Strahlen $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$ auf einander senkrecht, so stehen auch die entsprechenden Strahlen $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{t}_2$ auf einander senkrecht; und entsprechen umgekehrt in zwei conformen Strahlbüscheln jeden zwei auf einander senkrechten Strahlen $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{t}_1; \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ etc., wieder zwei auf einander senkrechte $\mathfrak{s}_2, \mathfrak{t}_2; \mathfrak{u}_2, \mathfrak{v}_2$ etc., so müssen, wie sogleich zu sehen ist, die von zwei entsprechenden Strahlen gebildeten Winkel gleich sein. Sagt man also:

21. **Erklärung.** Zwei conforme Punktreihen $\mathfrak{s}_1,\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1\ldots$, $\mathfrak{s}_2,\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_2\ldots$, in denen das Verhältniß je zweier entsprechender Strecken überall dasselbe in denen also das Verhältniß

$$\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2} = \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2} = \frac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2} = \ldots \text{etc.},$$

constant ist, heißen **proportional** Fig. 23a.

21. **Erklärung.** Zwei conforme Strahlbüschel $\mathfrak{S}_1,\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1\ldots$, $\mathfrak{S}_2,\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_2\ldots$, in denen je zwei entsprechende Strahlen gleiche Winkel bilden, in denen also

$$\angle \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 = \angle \mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2,$$
$$\angle \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 = \angle \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2,$$
$$\angle \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1 = \angle \mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_2 \ldots \text{etc.}$$

ist, heißen **gleich**. Fig. 23b.

so hat man nach dem Vorigen die Sätze.

22. **Lehrsatz.** Sind in zwei conformen Punktreihen $\mathfrak{s}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1\ldots$, $\mathfrak{s}_2,\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_2\ldots$ die unendlich entfernten Punkte entsprechend, so sind die Punktreihen proportional.

22. **Lehrsatz.** Sind in zwei conformen Strahlbüscheln $\mathfrak{S}_1,\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1\ldots$, $\mathfrak{S}_2,\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_2\ldots$ jeden zwei senkrecht auf einander stehenden Strahlen des einen, wieder zwei senkrecht auf einander stehende Strahlen des andern entsprechend, so sind die Strahlbüschel gleich.

23. Lehrsatz. In zwei proportionalen Punktreihen sind die unendlich entfernten Punkte entsprechend.

23. Lehrsatz. In zwei gleichen Strahlbüscheln entsprechen jeden zwei senkrecht auf einander stehenden Strahlen des einen zwei senkrecht auf einander stehende des anderen.

24. Lehrsatz. Werden in einem Strahlbüschel zwei parallele Gerade gezogen, so entstehen auf ihnen zwei proportionale Punktreihen.

24. Lehrsatz. Werden über einer Punktreihe zwei Strahlbüschel so construirt, daß die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel zusammenfallen, so sind die Büschel gleich und fallen ganz zusammen.

25. Lehrsatz. Werden durch einen Parallelstrahlbüschel ∞,abcd .... beliebige Transversalen $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ gelegt, so entstehen auf ihnen proportionale Punktreihen. Fig. 23a.

25. Lehrsatz. Werden von zwei Punkten $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, Gerade, je eine parallel zu einer des anderen gezogen,

$$\mathfrak{a}_1 \parallel \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_1 \parallel {}_2 \text{ etc.},$$

so entstehen an $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ gleiche Strahlbüschel. Fig. 23b.

§ 4.

Conjectivische Lage der Grundgebilde. Involution*).

Es seien jetzt zwei conforme Punktreihen auf einer und derselben Geraden gelegen und zwei conforme Strahlbüschel mit ihren Scheiteln an einander gelegt. Es drängt sich hier die Frage auf:

„Ob und unter welchen Umständen bei dieser Lage entsprechende Elemente der beiden Grundgebilde auf einander fallen?"

Offenbar nämlich ist, wenigstens dem Anscheine nach, die Möglichkeit da, daß von den Punkten und Strahlen der in den Geraden $\mathfrak{s}$, Fig. 27. und dem Scheitel $\mathfrak{S}$ Fig. 28. vereinigten Punktreihen s,ACBD und s′,A′C′B′D′ und Strahlbüschel S,acbd und S′,a′c′b′d′ ein Paar entsprechende Punkte z. B. E und E′, und Strahlen, z. B. e und e′ zusammenfallen. Vermöge § 2. Lehrsatz 10. wissen wir jedoch schon im Voraus, daß, wenn entsprechende Elemente zusammenfallen, ihre Anzahl nicht mehr als zwei betragen kann; denn fielen drei Paar entsprechender Elemente, z. B. A und A′, C und C′, B und B′ Fig. 27, oder a und a′, c und c′, b und b′ Fig. 28. auf einander, so gäbe es nach

*) Die Benennung: „conjectivisch" ist im Folgenden nur der Kürze wegen gebraucht worden.

dem genanten Satze für jedes weitere Element D oder d nur ein entsprechendes D' oder d', und dies müßte mit D oder d zusammenfallen. Wir haben also den

1. Lehrsatz. In zwei conjectivisch gelegenen Grundgebilden können höchstens zwei Paar entsprechender Elemente zusammenfallen; fallen drei oder mehr Paare zusammen, so fallen auch alle übrigen zusammen, und die Grundgebilde sind nicht nur conform, sondern congruent.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich die auf derselben Geraden vereinigten conformen Punktreihen, um von diesen zunächst zu sprechen, dieselbe (Richtung der) Aufeinanderfolge der entsprechenden Punkte besitzen, oder nicht. Schon aus Fig. 32. geht hervor, daß wenn zwei Punktreihen s,ACBD und s',A'C'B'D' auf die beiden nach § 3. Lehrsatz 7. möglichen Weisen in perspectivische Lage gebracht werden, die beiden Lagen s_1 und s_2, welche die s' einnehmen kann, sich dadurch unterscheiden, daß bei ersterer die Punkte A_1, C_1, B_1, D_1 von links nach rechts, auf s_2 aber A_2, C_2, B_2, D_2 von rechts nach links verlaufen. Dasselbe kann natürlich auch stattfindeu, wenn zwei Punktreihen auf derselben Geraden vereinigt sind.

α) Es seien die conformen vereinigten Punktreihen $s_1A_1C_1B_1G_1$ und $s_2A_2C_2B_2G_2$ von gleicher (Richtung in der) Aufeinanderfolge der entsprechenden Punkte Fig. 48a. Um die Figur nicht zu sehr mit Buchstaben zu überladen, sollen die beiden Punktreihen nicht wirklich als in derselben Geraden, sondern nur als in zwei sehr nahe an einander liegenden Geraden liegend, dargestellt werden. Man hat sich aber vorzustelleu, daß s_2 und s_1 zusammenfallen, und daß also der Punkt C_2 z. B. auf derselben Geraden liege, wie C_1, und zwar an der Stelle der s_1, die man erhält, wenn man von C_2 eine Senkrechte auf s_1 fällt, ebenso B_2 u. s. w. Es wird also von den vereinigten Geraden s_1 und s_2 als von nur einer einzigen gesprochen werden. O_1 und Q_2 seien die Gegenpunkte, und G_1, H_1; G_2, H_2 die entsprechenden, gleichweit von O_1 und Q_2 entfernten Punkte § 3. Lehrsatz 9. Es können nun drei verschiedene Fälle statthaben rücksichtlich der Lage, welche die vereinigten Punktreihen zu einander haben können. Entweder nämlich ist

a) die Strecke $O_1Q_2 > O_1G_1 + Q_2G_2$, d. h. $O_1Q_2 > 2O_1G_1$ oder $O_1Q_2 > 2Q_2G_2$, Fig. 48a. oder:

b) $O_1Q_2 = O_1G_1 + Q_2G_2$, d. h. G_1 und G_2 fallen in der Mitte von O_1Q_2 zusammen; Fig. 48b. oder:

c) $O_1Q_2 < O_1G_1 + Q_2G_2$, d. h. $O_1Q_2 < 2\,O_1G_1$ oder $O_1Q_2 < 2Q_2G_2$. Fig. 48c.

In allen drei Fällen sieht man sogleich, daß ein Paar entsprechender Punkte nur zwischen O_1 und Q_2 zusammenfallen kann, denn dem Punkte O_1 entspricht der Punkt ∞ der Reihe $A_2C_2B_2 \ldots$,

jedem Punkt rechts von O_1, z. B. dem H_1 ein Punkt links von Q_2, z. B. H_2, dem Punkt ∞ der Reihe $A_1C_1B_1 \ldots$ der Punkt Q_2, dem Punkt C_1 der Punkt C_2 rechts von Q_2 u. s. w. Es sei nun im Falle a) M_1 und M_2 ein entsprechendes und zusammenfallendes Punktpaar, welches also zwischen O_1 und Q_2 und zwar, wie man sich sogleich überzeugt, zwischen O_1 und G_1 oder zwischen Q_2 und G_2 liegen muß, so muß nach § 2. Lehrsatz 17. und § 3. Lehrsatz 9. sein:

$$O_1M_1 \cdot Q_2M_2 = OG_1 \cdot Q_2G_2 = \overline{OG_1}^2.$$

oder $$(O_1G_1 + M_1G_1)(Q_2G_2 - M_2G_2) = \overline{O_1G_1}^2$$

oder

$$\overline{O_1G_1}^2 + (M_1G_1 - M_2G_2)\,O_1G_1 - M_1G_1 \cdot M_2G_2 = \overline{O_1G_1}^2$$

oder $$G_1G_2 \cdot O_1G_1 - M_1G_1 \cdot M_1G_2 = 0$$

oder $$G_1G_2 \cdot O_1G_1 - (G_1G_2 + M_1G_2)\,M_1G_2 = 0$$

also $$\overline{M_1G_2}^2 + G_1G_2 \cdot M_1G_2 = G_1G_2 \cdot O_1G_1$$

folglich $$M_1G_2 = \frac{G_1G_2}{2} \pm \sqrt{G_1G_2 \cdot O_1G_1 + \left(\frac{G_1G_2}{2}\right)^2}.$$

Da der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen jedenfalls größer ist als:

$\left(\frac{G_1G_2}{2}\right)^2$, also $$\sqrt{G_1G_2 \cdot O_1G_1 + \left(\frac{G_1G_2}{2}\right)^2} > \frac{G_1G_2}{2}$$

ist, ein negativer Werth für M_1G_2 aber keinen Sinn hat, so ist das $+$ Zeichen zu nehmen, und es ist also

$$M_1G_2 = \frac{G_1G_2}{2} + \sqrt{G_1G_2 \cdot O_1G_1 + \left(\frac{G_1G_2}{2}\right)^2}.$$

Ebenso findet man auf der anderen Seite

$$N_1G_1 = \frac{G_1G_2}{2} + \sqrt{G_1G_2 \cdot Q_2G_2 + \left(\frac{G_1G_2}{2}\right)^2}.$$

Da nun $Q_2G_2 = O_1G_1$ ist, so ist $M_1G_2 = N_1G_1$.

Man sieht daher, daß man für M_1 oder M_2 zwei Werthe erhält, wenn $O_1Q_2 > 2OG_1$, daß es also dann zwei Punktpaare M_1, M_2; N_1, N_2 giebt, die der Anforderung genügen, Fig. 48a, und daß diese beiden Punkte M_1 (oder M_2) und N_1 (oder N_2) gleichweit von der Mitte von G_1G_2 oder O_1Q_2 abstehen, also auch gleichweit von Q_2 und O_1; daß es, wenn $O_1Q_2 = 2OG_1$ ist, Fig. 48b., nur ein solches Punktpaar giebt, und zwar G_1 und G_2, daß endlich, wenn $O_1Q_2 < 2O_1G_1$ ist, Fig. 48c, es keins giebt. Denn im Falle b) wird $G_1G_2 = 0$, also auch $M_1G_2 = N_1G_1 = 0$, also fallen dann beide Punktpaare nach G_1 oder G_2, im Falle c) aber, Fig. 48c., müßten entsprechende Punktpaare, wenn sie zusammenfallen sollen, entweder zwischen Q_2 und G_1 oder zwischen O_1 und G_2 liegen und man hätte, wenn wir wieder ein solches Paar entsprechender Punkte, die auf der Strecke Q_2G_1 zusammenfallen, mit M_1 oder M_2 bezeichnen:

$$O_1M_1 \cdot Q_2M_2 = \overline{O_1G_1}^2$$

oder: $$(O_1G_1 + M_1G_1)(Q_2G_2 - M_2G_2) = \overline{O_1G_1}^2$$

oder:

$$\overline{O_1G_1}^2 + (M_1G_1 - M_2G_2)\,O_1G_1 - M_1G_1 \cdot M_1G_2 = \overline{O_1G_1}^2$$

oder: $$-G_1G_2 \cdot O_1G_1 - M_1G_1 \cdot M_1G_2 = 0$$

oder: $$G_1G_2 \cdot O_1G_1 + M_1G_1 \cdot M_1G_2 = 0,$$

eine Gleichung, die unmöglich zu erfüllen ist, da die Summe zweier positiven Produkte nie $= 0$ sein kann.

β) Die vereinigten Punktreihen haben entgegengesetzte Richtung, Fig. 49. Man sieht hier, daß entsprechende Punkte nicht auf der Strecke O_1Q_2 zusammenfallen können. Denn dem Punkt Q_2 der s_2 entspricht der Punkt ∞ der s_1, dem links von Q_2 gelegenen C_2 das rechts von ∞ (auf s_1) gelegene C_1, dem B_2 das B_1 u. s. w., und man sieht, daß wenn man einen Punkt C_2, B_2, W_2, auf der s_2 links von Q_2 annimmt, sein entsprechender auf der (mit s_2 vereinigten) s_1 links von O_1 liegt. Es muß nun auf der s_2 jedenfalls einen Punkt W_2, von der Beschaffenheit geben, daß sein entsprechender W_1 auf s_1 in denselben Punkt fällt, den Q_2 beim Zusammenlegen der Geraden s_1 und s_2 einnimmt. Fallen nun entsprechende Punkte zusammen, so kann es nur auf der Strecke W_2W_1 geschehen, da, wenn auf s_2 ein Punkt von Q_2 nach W_2 gerückt ist und sein entsprechender von ∞ auf s_1 nach W_1 gekommen ist, sie nur zwischen W_2 und W_1 zusammengefallen sein können. Es können also die entsprechenden Punkte nur **außerhalb** der Strecke Q_1Q_2 auf einander fallen. W_2 und W_1 aber können wieder eine doppelte Lage haben, denn es muß nach § 2. Lehrsatz 17. und § 3. Lehrsatz 9.

$$O_1W_1 \cdot Q_2 \cdot W_2 = O_1G_1 \cdot Q_2G_2 = \overline{O_1G}^2 = \overline{Q_2G_2}^2$$

sein. Ist also $Q_2W_2 < Q_2G_2$, so muß $O_1W_1 > O_1G_1$ sein, also liegen in diesem Falle W_1 und W_2 auf der den Punkt Q_2 einschließenden Strecke G_1G_2, Fig. 49a.; ist $Q_2W_2 > Q_2G_2$, so muß $O_1W_1 < O_1G_1$ sein, dann aber können M_1 und M_2, Fig. 49b., wiederum nur auf der Strecke G_1G_2 der W_1W_2 liegen. Es können also zwei Punkte nur zusammenfallen außerhalb der Strecke O_1Q_2 und innerhalb der Strecke G_1G_2, ebenso auf der anderen Seite außerhalb O_1Q_2 und innerhalb H_1H_2. Wir haben nun auch hier die

Gleichung $$O_1M_1 \cdot Q_2M_2 = \overline{O_1G_1}^2$$

oder: $$(O_1G_1 + M_1G_1)(Q_2G_2 - M_2G_2) = \overline{O_1G_1}^2$$

oder: $$(M_1G_1 - M_1G_2)\,O_1G_1 - M_1G_1 \cdot M_1G_2 = 0$$

oder: $$(M_1G_1 - M_1G_2)\,O_1G_1 - (G_1G_2 - M_1G_2)\,M_1G_2 = 0$$

oder: $$(G_1G_2 - 2M_1G_2)\,O_1G_1 - (G_1G_2 - M_1G_2)\,M_1G_2 = 0,$$

oder:

$$G_1G_2 \cdot O_1G_1 - G_1G_2 \cdot M_1G_2 - 2O_1G_1 \cdot M_1G_2 + \overline{M_1G_2}^2 = 0$$

oder: $\overline{M_1G_2}^2 - (G_1G_2 + 2O_1G_1)M_1G_2 = -G_1G_2 \cdot O_1G_1$, eine Gleichung, die nie unmöglich ist, da die linke Seite sich schreiben läßt $M_1G_2(M_1G_2 - (G_1G_2 + 2O_1G_1))$. Nun ist nach der Voraussetzung $M_1G_2 < G_1G_2$, also um so mehr $< G_1G_2 + 2O_1G_1$, folglich der Factor $M_1G_2 - (G_1G_2 + 2O_1G_1)$ negativ. Man erhält demnach

$$M_1G_2 = \left(\frac{G_1G_2}{2} + O_1G_1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{G_1G_2}{2} + O_1G_1\right)^2 - G_1G_2 \cdot O_1G_1}$$

durch welche gleichfalls das eben Gesagte bestätigt wird, da

$$\left(\frac{G_1G_2}{2} + O_1G_1\right)^2 = \left(\frac{G_1G_2}{2}\right)^2 + G_1G_2 \cdot O_1G_1 + \overline{O_1G_1}^2$$
$$> G_1G_2 \cdot O_1G_1.$$

Da der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen

$$= \left(\frac{G_1G_2}{2}\right)^2 + \overline{O_1G_1}^2, \text{ also } > \left(\frac{G_1G_2}{2}\right)^2 \text{ ist,}$$

so sei $$\sqrt{\left(\frac{G_1G_2}{2}\right)^2 + \overline{O_1G_1}^2} = \frac{G_1G_2}{2} + \delta.$$

Nähme man das + Zeichen, so erhielte man

$$M_1G_2 = G_1G_2 + O_1G_1 + \delta,$$

es wäre also $M_1G_2 > G_1G_2$, was nicht möglich ist, es ist also das — Zeichen zu nehmen; daß man dann stets einen positiven Werth erhält, ergiebt sich sogleich daraus, daß

$$\sqrt{\left(\frac{G_1G_2}{2} + O_1G_1\right)^2 - G_1G_2 \cdot O_1G_1} < \frac{G_1G_2}{2} + O_1G_1 \text{ ist,}$$

und man hat also:

$$M_1G_2 = \left(\frac{G_1G_2}{2} + O_1G_1\right) - \sqrt{\left(\frac{G_1G_2}{2} + O_1G_1\right)^2 - G_1G_2 \cdot O_1G_1}.$$

Ebenso ist auf der anderen Seite

$$N_1H_1 = \left(\frac{H_1H_2}{2} + O_1H_1\right) - \sqrt{\left(\frac{H_1H_2}{2} + O_1H_1\right)^2 - H_1H_1 \cdot O_1H_1},$$

und da $H_1H_2 = G_1G_2, O_1H_1 = O_1G_1$ ist,

so ist also $N_1H_1 = M_1G_2$; also stehen, da $O_1H_1 = Q_2G_2$ ist, N_1 und M_1 gleich weit von der Mitte von O_1Q_2 ab.

Ebenso sind bei Strahlbüscheln $S_1, s_1g_1t_1 \ldots, S_2, s_2g_2t_2 \ldots,$ die so gelegt sind, daß ihre Scheitel S_1, S_2 aufeinander fallen, zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich in beiden die entsprechenden Strahlen in beiden Strahlbüscheln nach derselben Richtung hin, z. B. von links nach rechts verlaufen, oder ob die Strahlen des einen Büschels, welche den von links nach rechts verlaufenden Strahlen des andern entsprechen, von rechts nach links verlaufen.

a) Die entsprechenden Strahlen folgen in gleicher Richtung auf einander. Man hat hiebei augenscheinlich wieder drei Möglichkei-

ten in's Auge zu fassen, nämlich, ob die Winkel $g_1 g_1$ und $g_2 t_2$ so groß sind, daß, wenn sie an s_1 und t_2 nach verschiedenen Seiten hin angetragen werden, zwischen g_1 und g_2 noch ein Winkel $g_1 g_2$ bleibt, Fig. 50a., oder ob g_1 und g_2 auf einander fallen, Fig. 50b., oder ob $s_1 g_1$ und $t_2 g_2$ in einander übergreifen, Fig. 50c., oder ob

a) $s_1 t_2 > 2 \cdot s_1 g_1$ oder $> 2 \cdot t_2 g_2$, Fig. 50a.

b) $s_1 t_2 = 2 \cdot s_1 g_1 \quad = 2 \cdot t_2 g_2$, Fig. 50b.

c) $s_1 t_2 < 2 \cdot s_1 g_1$ oder $< 2 \cdot t_2 g_2$, Fig. 50c.

ist. Die auf einander fallenden Strahlen heißen m_1, m_2; sie müssen, wie man sich mit Hülfe der Aufeinanderfolge entsprechender Strahlen überzeugt, zwischen g_2 und t_2, oder zwischen g_1 und s_1 liegen, wenn $s_1 t_2$, wie es stets möglich ist, als spitzer Winkel vorausgesetzt wird. Nun ist, wenn wir zuerst untersuchen, ob zwischen g_2 und t_2 wirklich Strahlen auf einander fallen, nach § 2. Lehrsatz 17. und nach § 3. Lehrsatz 9.

$$\tang s_1 m_1 \cdot \tang t_2 m_2 = \tang^2 s_1 g_1,$$

wenn g_1 die Eigenschaft hat, daß sein entsprechender Strahl g_2 mit t_2 einen Winkel $t_2 g_2 = s_1 g_1$ bildet. Nun ist in allen drei Fällen a), b), c), $t_2 m_2 = s_1 t_2 - s_1 m_1$, also

$$\tang s_1 m_1 \cdot \tang (s_1 t_2 - s_1 m_1) = \tang^2 s_1 g_1,$$

oder: $$\tang s_1 m_1 \cdot \frac{\tang s_1 t_2 - \tang s_1 m_1}{1 + \tang s_1 t_2 \cdot \tang s_1 m_1} = \tang^2 s_1 g_1.$$

oder:

$$\dagger) \quad \tang^2 s_1 m_1 - (1 - \tang^2 s_1 g_1) \tang s_1 t_2 \cdot \tang s_1 m_1 = - \tang^2 s_1 g_1.$$

Die Fälle a), b) können, da $s_1 t_2 < 90^0$ ist, nur eintreten, wenn $s_1 g_1 < 45^0$ ist, der Fall c) aber kann sowohl dann statthaben, wenn $s_1 g_1 < 45^0$, als auch, wenn $s_1 g_1 > 45^0$ ist. Daß es im letzteren Falle, also wenn $s_1 g_1 > 45^0$ ist, keine zwei entsprechenden, auf einander fallende Strahlen geben kann, erhellt sogleich aus der letzten Gleichung, denn es ist dann $\tang^2 s_1 g_1 > 1$ und da man der Gleichung die Form geben kann:

$$\tang^2 s_1 m_1 + (\tang^2 s_1 g_1 - 1) \tang s_1 t_2 \cdot \tang s_1 m_1 = - \tang^2 s_1 g_1$$

und $\tang^2 s_1 m_1$ positiv sein muß, so müßte eine Summe positiver Zahlen ein negatives Resultat geben, was unmöglich ist. Es muß also $s_1 g_1 < 45^0$ sein. Um nun die Gleichung weiter zu untersuchen, müssen wir sie etwas umformen. Im Falle a), Fig. 50a., ist

$$s_1 t_2 = s_1 g_1 + t_2 g_1.$$

Da aber $\quad s_1 g_1 = t_2 g_2$ ist,

so ist $\quad t_2 g_1 = s_1 g_2$,

also $\quad s_1 t_2 = s_1 g_1 + s_1 g_2$.

Ferner ist $\quad s_1 m_1 = s_1 g_2 + g_2 m_2$.

Werden diese Werthe $s_1g_1 + s_1g_2$ für s_1t_2 und $s_1g_2 + g_2m_1$ für s_1m_1 in die Gleichung †) eingesetzt, und $\tang(s_1g_1 + s_1g_2)$, $\tang(s_1g_2 + g_2m_1)$ nach bekannten Regeln entwickelt, so erhält man, nachdem man den Factor $(1 + \tang^2 s_1g_2)$ ausgeschieden hat, die Gleichung:

$$\tang^3 s_1g_1 \cdot \tang s_1g_2 \cdot \tang^2 g_2m_1 + \tang^2 s_1g_1 \cdot \tang s_1g_2 \cdot \tang g_2m_1$$
$$- \tang^3 s_1g_1 \cdot \tang g_2m_1 - \tang^2 g_2m_1 - \tang^2 s_1g_1 + \tang s_1g_1 \cdot \tang s_1g_2$$
$$+ \tang s_1g_1 \cdot \tang g_2m_1 - \tang s_1g_2 \cdot \tang g_2m_1 = 0.$$

Es ist ferner $s_1g_2 = s_1g_1 + g_1g_2$. Wird dieser Werth eingesetzt, so erhält man nach Aussonderung des Factors $(1 + \tang^2 s_1g_1)$ die Gleichung:

$$(\tang s_1g_1 \cdot \tang g_1g_2 - (1 - \tang^2 s_1g_1)) \tang^2 g_2m_1$$
$$- (1 - \tang^2 s_1g_1) \cdot \tang g_1g_2 \cdot \tang g_2m_1 + \tang s_1g_1 \cdot \tang g_1g_2 = 0.$$

Da nun nach der Voraussetzung $s_1g_1 < 45^0$ ist, so ist

$$\tang 2 \cdot s_1g_1 = \frac{2 \cdot \tang s_1g_1}{1 - \tang^2 s_1g_1},$$

indem auch der Winkel $2 \cdot s_1g_1$ dann ein spitzer ist und also die bisherige Bezeichnung (vgl. § 1. Erklärung 22.) beibehalten werden kann.

Es ist also $$1 - \tang^2 s_1g_1 = \frac{2 \cdot \tang s_1g_1}{\tang 2 \cdot s_1g_1}.$$

Wird dieser Werth in die letzte Gleichung eingesetzt, so nimmt sie die Form an:

$$(\tang 2 \cdot s_1g_1 \cdot \tang g_1g_2 - 2) \tang^2 g_2m_1 - 2\tang g_1g_2 \cdot \tang g_2m_1 + \tang 2 \cdot s_1g_1 \cdot \tang g_1g_2 = 0.$$

oder: $$-(1 + 1 - \tang 2 \cdot s_1g_1 \cdot \tang g_1g_2) \tang^2 g_2m_1 - 2\tang g_1g_2 \cdot \tang g_2m_1 = -\tang 2 \cdot s_1g_1 \cdot \tang g_1g_2.$$

Nun ist $$1 - \tang 2 \cdot s_1g_1 \cdot \tang g_1g_2 = \frac{\tang 2 \cdot s_1g_1 + \tang g_1g_2}{\tang(2 \cdot s_1g_1 + g_1g_2)} = \frac{\tang 2 \cdot s_1g_1 + \tang g_1g_2}{\tang s_1t_2},$$

folglich $$(\tang s_1t_2 + \tang 2 \cdot s_1g_1 + \tang g_1g_2) \tang^2 g_2m_1 + 2 \cdot \tang g_1g_2 \cdot \tang s_1t_2 \cdot \tang g_2m_1 = \tang 2 \cdot s_1g_1 \cdot \tang g_1g_2 \cdot \tang s_1t_2,$$

eine Gleichung, die stets zu erfüllen möglich ist. Es giebt also im Falle a) stets ein Paar Strahlen von der verlangten Eigenschaft. — Im Falle c), Fig. 50c., hingegen ist,

$$s_1m_1 = s_1g_1 + g_1m_1, \quad s_1t_2 = s_1g_1 + t_2g_1 = s_1g_1 + s_1g_2.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung †) eingesetzt, so ergiebt sich nach Aussonderung des Factors $(1 + \tang^2 s_1g_1)$ die Gleichung:

$\tang^3 s_1g_1 \cdot \tang s_1g_2 \cdot \tang^2 g_1m_1 - \tang^2 g_1m_1 - \tang s_1g_1 \cdot \tang g_1m_1 + \tang^3 s_1g_1 \cdot \tang g_1m_1 + \tang s_1g_2 \cdot \tang g_1m_1 - \tang^2 s_1g_1 \cdot \tang s_1g_2 \cdot \tang g_1m_1 + \tang s_1g_1 \cdot \tang s_1g_2 - \tang^2 s_1g_1 = 0.$

Ferner ist $s_1g_2 = s_1g_1 - g_1g_2$. Wird dieses eingesetzt, so erhält man nach Abscheidung des Factors $(1 + \tang^2 s_1g_1)$ die Gleichung

$$(\tang s_1g_1 \cdot \tang g_1g_2 + (1 - \tang^2 s_1g_1)) \tang^2 g_1m_1 + (1 - \tang^2 s_1g_1) \tang g_1g_2 \cdot \tang g_1m_1 + \tang s_1g_1 \cdot \tang g_1g_2 = 0.$$

Da nun nach der Voraussetzung $s_1g_1 < 45^0$, also $1 - \tang^2 s_1g_1$ positiv ist, so enthält die linke Seite nur positive Posten, und da auch $\tang g_1m_1$ positiv sein muß, so sieht man, daß die Gleichung zu erfüllen unmöglich ist. Es können also im Falle c) Fig. 50c, weder wenn $s_1g_1 > 45^0$, noch wenn $s_1g_1 < 45^0$ ist, zwei entsprechende Strahlen auf einander fallen. Aus der Gleichung †) folgt nun um den Winkel s_1m_1 Fig. 50a wirklich zu berechnen:

$$\left(\tang s_1m_1 - \frac{1-\tang^2 s_1g_1}{2} \cdot \tang s_1t_2\right)^2 = \left(\frac{1-\tang^2 s_1g_1}{2} \cdot \tang s_1t_2\right)^2 - \tang^2 s_1g_1$$

oder, da $s_1g_1 < 45^0$, also $\frac{1-\tang^2 s_1g_1}{2} = \frac{\tang s_1g_1}{\tang 2 \cdot s_1g_1}$ ist:

$$\tang s_1m_1 = \frac{\tang s_1g_1}{\tang 2 \cdot s_1g_1} \left(\tang s_1t_2 \pm \sqrt{\tang^2 s_1t_2 - \tang^2 2 \cdot s_1g_1}\right).$$

Es ist leicht zu sehen, daß hier das positive Vorzeichen vor der Quadratwurzel zu nehmen ist, denn, da $s_1m_1 > s_1g_1$ nach der Annahme ist, muß auch $\tang s_1m_1 > \tang s_1g_1$, also der Factor, mit dem $\tang s_1g_1$ multiplicirt ist, > 1 sein. Es muß also:

$$\tang s_1t_2 \pm \sqrt{\tang^2 s_1t_2 - \tang^2 2 \cdot s_1g_1} > \tang 2 \cdot s_1g_1$$

sein. Für das untere Zeichen würde hieraus folgen:

$$\tang s_1t_2 - \tang 2 \cdot s_1g_1 > \sqrt{\tang^2 s_1t_2 - \tang^2 2 \cdot s_1g_1}$$

oder $\sqrt{\tang s_1t_2 - \tang 2 \cdot s_1g_1} > \sqrt{\tang s_1t_2 + \tang 2 \cdot s_1g_1}$, was unmöglich ist; es ist also das obere Zeichen zu nehmen, und in der That ist

$$\sqrt{\tang^2 s_1t_2 - \tang^2 2 \cdot s_1g_1} > \tang 2 \cdot s_1g_1 - \tang s_1t_2,$$

denn die rechte Seite ist negativ. Man hat also:

$$\tang s_1m_1 = \frac{\tang s_1g_1}{\tang 2 \cdot s_1g_1} \left(\tang s_1t_2 + \sqrt{\tang^2 s_1t_2 - \tang^2 2 \cdot s_1g_1}\right).$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\tang t_2n_2 = \frac{\tang t_2g_2}{\tang 2 \cdot t_2g_2} \left(\tang^2 t_2s_1 + \sqrt{\tang^2 t_2s_1 - \tang^2 2 \cdot t_2g_2}\right).$$

Es ist also, da $t_2g_2 = s_1g_1$ ist

$$s_1m_1 = t_2n_2.$$

Es giebt also im Falle α) zwei entsprechende Strahlenpaare m_1, m_2; n_1, n_2, die auf einander fallen.

Im Falle b) Fig. 50b. wo $s_1g_1 = t_2g_2 = \frac{1}{2}s_1t_2$ ist, folgt aus der Figur, daß g_1 und g_2 die einzigen Strahlen sind, die auf einander fallen, was auch die Gleichung †) bestätigt, die dann übergeht in

$$\text{tang}^2\, s_1m_1 - (1 - \text{tang}^2\, s_1g_1)\frac{2\,\text{tang}\, s_1g_1}{1 - \text{tang}^2\, s_1g_1}\cdot \text{tang}\, s_1m_1 + \text{tang}^2\, s_1g_1 = 0$$

oder: $$(\text{tang}\, s_1m_1 - \text{tang}\, s_1g_1)^2 = 0.$$

also $$\text{tang}\, s_1m_1 = \text{tang}\, s_1g_1.$$

Es fällt also außer g_1 und g_2 kein Strahlenpaar zusammen.

β) Die entsprechenden Strahlen der Strahlbüschel folgen in entgegengesetzter Richtung Fig. 51a. Dann giebt es zwei Orte, an denen möglicher Weise entsprechende Strahlen zusammenfallen können. Es kann dies geschehen in dem Flächenraum, der sowohl zwischen s_1 und s_2, als auch zwischen g_1 und g_2 liegt oder in dem, der sowohl zwischen t_1 und t_2 als auch zwischen h_1 und h_2 (vergl. § 3. Lehrsatz 9) liegt. Wir suchen zunächst das erstere Strahlenpaar m_1, m_2 zu bestimmen. Auch hier muß sein nach § 2 Lehrsatz 17.

$$\text{tang}\, s_1m_1 \cdot \text{tang}\, t_2m_1 = \text{tang}^2\, s_1g_1.$$

Nun ist $t_2m_1 = s_1t_2 + s_1m_1$. Wird dieser Werth eingesetzt, so ergiebt sich

$$\text{tang}^2\, s_1m_1 + (1 + \text{tang}^2\, s_1g_1)\,\text{tang}\, s_1t_2 \cdot \text{tang}\, s_1m_1 = \text{tang}^2\, s_1g_1$$

eine Gleichung, die jedenfalls befriedigt werden kann. Es ergiebt sich daher

$$\text{tang}\, s_1m_1 = \frac{1 + \text{tang}^2\, s_1g_1}{2}\cdot \text{tang}\, s_1t_2 \pm\sqrt{\left(\frac{1 + \text{tang}^2\, s_1g_1}{2}\cdot \text{tang}\, s_1t_2\right)^2 + \text{tang}^2\, s_1g_1}.$$

Es ist hier das positive Vorzeichen zu nehmen, weil sonst $\text{tang}\, s_1m_1$ negativ würde. Man hat also

$$\text{tang}\, s_1m_1 = \frac{1 + \text{tang}^2\, s_1g_1}{2}\cdot \text{tang}\, s_1t_2 + \sqrt{\left(\frac{1 + \text{tang}^2\, s_1g_1}{2}\cdot \text{tang}\, s_1t_2\right)^2 + \text{tang}^2\, s_1g_1}$$

und ebenso erhält man:

$$\text{tang}\, t_2n_2 = \frac{1 + \text{tang}^2\, t_2g_2}{2}\cdot \text{tang}\, t_2s_1 + \sqrt{\left(\frac{1 + \text{tang}^2\, t_2g_2}{2}\cdot \text{tang}\, t_2s_1\right)^2 + \text{tang}^2\, t_2g_2}.$$

Da nun $t_2g_2 = s_1g_1$ ist, so sieht man, daß $t_2n_2 = s_1m_1$ sein muß.

Sind schließlich die vereinigten Punktreihen proportional, und zwar zunächst in gleicher Richtung verlaufend, Fig. 48d., (es sind in dieser

Figur, da nicht so viele Punkte vorkommen, die Punktreihen als wirklich auf einer und derselben Geraden liegend, dargestellt, und nur die Fälle unterschieden, die, wenigstens auf den ersten Anblick, einen Unterschied im Resultat möglicher Weise bedingen könnten, ob nämlich 1) die Strecke A_2B_2 theilweise mit der Strecke A_1B_1 zusammenfällt, oder ob sie 2) ganz außerhalb A_1B_1, oder 3) ganz innerhalb A_1B_1 liegt); so läßt sich immer ein Punkt M der Art finden, daß sich verhält $\frac{A_1M}{B_1M} = \frac{A_2M}{B_2M}$ oder $\frac{A_1M}{B_1M} : \frac{A_1\infty}{B_1\infty} = \frac{A_2M}{B_2M} : \frac{A_2\infty}{B_2\infty}$. Man erhält nämlich bei Punktreihen, die in gleicher Richtung verlaufen, in allen Fällen $B_1M = \frac{A_1B_1 \cdot B_1B_2}{A_1B_1 - A_2B_2}$; verlaufen sie entgegengesetzt, Fig. 49c. so ergiebt sich stets $B_1M = \frac{A_1B_1 \cdot B_1B_2}{A_1B_1 + B_1B_2}$; also jedenfalls ein geometrisch construirbarer Werth. — Liegen ferner zwei gleiche Strahlbüschel conjectivisch und verlaufen sie einstimmig Fig. 50d; so ist sogleich klar, daß sie entweder mit keinem Paare entsprechender Strahlen zusammenfallen können, oder daß sie mit allen zusammenfallen müssen. Verlaufen sie entgegengesetzt Fig. 51b, so ist klar, daß sie stets mit zwei entsprechenden Strahlen zusammenfallen müssen. Denn man braucht nur den von zwei entsprechenden Strahlen gebildeten Winkel, z. B. $\angle aa'$ zu halbiren, um den einen sich selbst entsprechenden Strahl m zu erhalten; der zu ihm senkrechte n muß der andere sein.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so erhalten wir den

2. Lehrsatz. Sind zwei conforme Punktreihen auf derselben Geraden vereinigt und geschieht

a) die Aufeinanderfolge entsprechender Punkte in **gleicher** Richtung, und ist die endliche von den Gegenpunkten eingeschlossene Strecke

a) $O_1Q_2 > 2 \cdot O_1G_1$ (§ 3. Lehrsatz 9) Fig. 48a, so fallen **zwei** Paar entsprechender Punkte M_1, M_2; N_1, N_2 zusammen, nämlich M_2 auf M_1, N_2 auf N_1. Die Punkte, wo dieses geschieht, liegen auf der von O_1 und Q_2 begrenzten endlichen Strecke O_1Q_2, und sind gleichweit von O_1

2. Lehrsatz. Sind die Scheitel zweier conformer Strahlbüschel in demselben Punkte vereinigt und verlaufen

a) die entsprechenden Strahlen in **gleicher** Drehungsrichtung und ist der von den nicht entsprechenden Strahlen der entsprechenden rechten Winkel eingeschlossene Winkel

a) $s_1t_2 > 2 \cdot s_1g_1$ (§ 3 Lehrsatz 9) Fig. 50a., so fallen **zwei** Paar entsprechender Strahlen m_1, m_2; n_1, n_2 zusammen, nämlich m_2 auf m_1; n_2 auf n_1. Die Strahlen, wo dieses geschieht, liegen auf dem von s_1 und t_2 eingeschlossenen spitzen Winkel s_1t_2, und sind gleichweit

und Q_2, desgleichen gleichweit von der Mitte von O_1Q_2 entfernt.

b) $O_1Q_2 = 2\,O_1G_1$ Fig. 48 b. Dann fallen nur zwei entsprechende Punkte, und zwar die Punkte G_1, G_2 (§ 3 Lehrsatz 9) zusammen. Es giebt also nur **ein** Paar entsprechender und zusammenfallender Punkte. Der Punkt, wo sie zusammenfallen, ist die Mitte der endlichen Strecke O_1Q_2.

c) $O_1Q_2 < 2\,O_1G_1$ Fig. 48 c. Dann giebt es **kein** Paar entsprechender und auf einander fallender Punkte.

β) Verlaufen die Punkte der Punktreihen in entgegengesetzter Richtung, so giebt es stets **zwei** Paare entsprechender und zusammenfallender Punkte M_1 und M_2; N_1 und N_2 Fig. 49 a und 49 b. Die Punkte, wo sie zusammenfallen, liegen außerhalb der endlichen Strecke O_1Q_2, gleichweit von O_1 und Q_2, und gleichweit von der Mitte von O_1Q_2 entfernt.

γ) Sind die conjectivisch liegenden Punktreihen **proportional**, so giebt es stets, sie mögen in gleicher oder entgegengesetzter Richtung verlaufen, **zwei** sich selbst entsprechende Punkte, die zusammenfallen. Der eine ist der **unendlich** entfernte, der andere ein in **endlicher** Entfernung liegender Punkt. Fig. 48 d, 49 c.

von s_1 und t_2, desgleichen gleichweit von der Mitte von s_1t_2 entfernt.

b) $s_1t_2 = 2 \cdot s_1g_1$ Fig. 50 b. Dann fallen nur zwei entsprechende Strahlen, und zwar die Strahlen g_1, g_2 (§ 3 Lehrsatz 9) zusammen. Es giebt also nur **ein** Paar entsprechender und zusammenfallender Strahlen. Der Strahl, wo sie zusammenfallen, ist die Mitte des spitzen Winkels s_1t_2.

c) $s_1t_2 < 2 \cdot s_1g_1$ Fig. 50 c. Dann giebt es **kein** Paar entsprechender und auf einander fallender Strahlen.

β) Verlaufen die Strahlen der Strahlbüschel in entgegengesetzter Drehungsrichtung, so giebt es stets **zwei** Paare entsprechender und zusammenfallender Strahlen, m_1 und m_2; n_1 und n_2. Fig. 51 a. Die Strahlen, wo sie zusammenfallen, liegen außerhalb des spitzen Winkels s_1t_2, gleichweit von s_1 und t_2, und gleichweit von der Mitte von s_1t_2 entfernt.

γ) Sind die conjectivisch liegenden Strahlbüschel **gleich**, so giebt es, wenn sie in **gleicher** Richtung verlaufen, entweder **kein** Paar entsprechender Strahlen, die zusammenfallen, oder sie fallen **alle** zusammen; verlaufen sie entgegengesetzt, so giebt es stets **zwei** Paar entsprechender Strahlen m und n, die zusammenfallen. Diese beiden Strahlen m und n stehen rechtwinklig auf einander. Fig. 50 d, 51 b.

3. Erklärung. Die entsprechenden und zusammenfallenden Punkte M_1 und M_2, N_1 und N_2 Fig. 48a., 49. heißen **Hauptpunkte**.

3. Erklärung. Die entsprechenden und zusammenfallenden Strahlen m_1 und m_2, n_1 und n_2 Fig. 50a., 51a. heißen **Hauptstrahlen**.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wenn man die conformen Punktreihen mit den Gegenpunkten O_1, Q_2; die conformen Strahlbüschel mit den Strahlen der entsprechenden Winkel auf einander fallen läßt, und zwar so, daß s_1 und t_2, t_1 und s_2 zusammenfallen. Fig. 52. 53. Wegen der großen Wichtigkeit dieses Falles hat man ihn mit einem besonderen Namen belegt.

4. Erklärung. Sind zwei conforme Punktreihen

$s_1, A_1 G_1 B_1 \infty H_1 O_1,$

$s_2, A_2 G_2 B_2 Q_2 H_2 \infty$

auf einer Geraden s der Art vereinigt, daß ihre Gegenpunkte O_1 und Q_2 zusammenfallen, so sagt man: die Punktreihen liegen **involutorisch**; oder sie bilden eine **Involution** oder man spricht von den vereinigten Punktreihen wie von einer einzigen und sagt: „die Punktreihe $s, B_1 E_1 D_1 A_1 O_1 \ldots$ ist involutorisch“ oder „bildet eine Involution“. Fig. 52a, 52b.

4. Erklärung. Sind zwei conforme Strahlbüschel

$S_1, a_1 g_1 s_1 h_1 b_1 t_1,$

$S_2, a_2 g_2 s_2 h_2 b_2 t_2$

mit ihren Scheiteln in einem Punkte S der Art vereinigt, daß die nicht entsprechenden Strahlen der entsprechenden rechten Winkel, s_1 mit t_2, t_1 mit s_2 zusammenfallen, so sagt man: Die Strahlbüschel liegen **involutorisch**; oder: sie bilden eine **Involution** oder man spricht von den vereinigten Strahlbüscheln wie von einem einzigen und sagt: „der Strahlbüschel $S_1, b_1 g_1 d_1 a_1 s_1$ ist involutorisch“ oder „bildet eine Involution“. Fig. 53a, 53b.

5. Erklärung. Der Punkt, in welchem O_1 und Q_2 zusammenfallen, heißt der **Centralpunkt** der Involution.

5. Erklärung. Die Strahlen, in welchen s_1 und t_2, t_1 und s_2 zusammenfallen, heißen die **Normalstrahlen** der Involution.

Es versteht sich von selbst, daß auch hier noch das § 2. Lehrsatz 17 aufgestellte Gesetz gilt. Ist O_1 oder Q_2 der Centralpunkt der Involution, C_1, C_2 ein Paar entsprechender Punkte, so ist $O_1C_1 \cdot Q_2C_2$ oder $O_1C_1 \cdot O_1C_2$ oder $Q_2C_1 \cdot Q_2C_2$ konstant. Ebenso ist, wenn s_1, t_1 oder t_2, s_2 die Normalstrahlen, und c_1, c_2 ein Paar entsprechender Strahlen sind, $\tang s_1c_1 \cdot \tang t_2c_2$ oder $\tang s_1c_1 \cdot \tang s_1c_2$ oder $\tang t_2c_1 \cdot \tang t_2c_2$ constant, und ebenso

$\tang t_1c_1 \cdot \tang s_2c_2$ oder $\tang t_1c_1 \cdot \tang t_1c_2$ oder $\tang s_2c_1 \cdot \tang s_2c_2$. Man hat also den

6. Lehrsatz. Das Produkt der Abstände irgend zweier entsprechenden Punkte C_1, C_2; D_1, D_2; E_1, E_2 etc. einer Involution von dem Centralpunkte O_1 (oder Q_2) hat stets denselben Werth. Es ist also

$$O_1C_1 \cdot O_1C_2 = O_1D_1 \cdot O_1D_2 = O_1E_1 \cdot O_1E_2 = \text{etc.}$$

6. Lehrsatz. Das Produkt der Tangenten der Winkel, die von irgend zwei entsprechenden Strahlen c_1, c_2; d_1, d_2; e_1, e_2 etc. einer Involution und einem der Normalstrahlen gebildet werden, hat stets denselben Werth. Es ist also

$$\tang s_1c_1 \cdot \tang s_1c_2 = \tang s_1d_1 \cdot \tang s_1d_2 = \tang s_1e_1 \cdot \tang s_1e_2;$$

$$\tang t_1c_1 \cdot \tang t_1c_2 = \tang t_1d_1 \cdot \tang t_1d_2 = \tang t_1e_1 \cdot \tang t_1e_2 = \text{etc.}$$

Läßt man die Fig. 48a., 48b., 48c. in die Fig. 52a.; Fig. 49a., 49b. in Fig. 52b.; Fig. 50a., 50b., 50c. in Fig. 53a.; Fig. 51. in Fig. 53b. übergehen, so erhält man sogleich den

7. Lehrsatz. In gleicher Richtung (oder einstimmig) verlaufende involutorische Punktreihen haben nie einen Hauptpunkt. Fig. 52a. In entgegengesetzter Richtung (oder entgegengesetzt) verlaufende involutorische Punktreihen haben stets zwei Hauptpunkte, und zwar sind dies die Punkte G_1 oder G_2, H_1 oder H_2 (§ 3. Lehrsatz 9). Sie stehen gleichweit vom Centralpunkt ab und das Quadrat der Entfernung eines jeden von ihnen vom Centralpunkt

$$O_1G_1^2 = O_1G_2^2$$

bildet den constanten Werth des im Lehrsatz 6. erwähnten Produkts. Fig. 52b.

7. Lehrsatz. In gleicher Drehungsrichtung (oder einstimmig) verlaufende involutorische Strahlbüschel haben nie einen Hauptstrahl. Fig. 53a. In entgegengesetztem Drehungssinn (oder entgegengesetzt) verlaufende involutorische Strahlbüschel haben stets zwei Hauptstrahlen, und zwar sind dies die Strahlen g_1 oder g_2, h_1 oder h_2 (§ 3. Lehrsatz 9). Sie stehen gleichweit von den Normalstrahlen ab und das Quadrat der Tangente des von jedem von ihnen mit einem der Normalstrahlen gebildeten Winkels,

$$\tang^2 s_1g_1 = \tang^2 s_1g_1 = \tang^2 s_1h_1 = \tang^2 s_1h_2;$$

$$\tang^2 t_1g_1 = \tang^2 t_1g_2 = \tang^2 t_1h_1 = \tang^2 t_1h_2$$

| bildet den constanten Werth
| des in Lehrsatz 6. erwähnten
| Produkts. Fig. 53b.

Es ergiebt sich dies unmittelbar aus der Figur, sowie durch Rechnung, denn in O_1 oder Q_2 können im ersten Falle keine entsprechenden Punkte vereinigt sein, weil die hier zusammenfallenden Punkte O_1, Q_2 sich nicht entsprechen, und wenn außerdem zwei entsprechende Punkte M_1, M_2 dennoch in O_1 oder Q_2 lägen, die Gleichung gelten müßte:

$$O_1M_1 \cdot Q_2M_2 = \overline{O_1G_1}^2 = \overline{Q_1G_2}^2.$$

Da aber M_1 und M_2 mit O_1 oder Q_2 zusammenfallen, also $O_1M_1 = Q_2M_2 = 0$ ist, so müßte sein $O_1G_1 = Q_2G_2 = 0$, was gegen die Voraussetzung ist. Wäre aber in der That $O_1G_1 = Q_2G_2 = 0$, so würde jedem Punkte A_2 der Reihe $s_2, A_2G_2B_2Q_2$, der zwischen G_2 und ∞ liegt, ein Punkt A_1 der Reihe $s_1, A_1G_1B_1\infty$ entsprechen, der zwischen G_1 und O_1, also in O_1 läge; ebenso würde jedem Punkte B_1 der letztgenannten Reihe, der nicht mit O_1 zusammenfällt, ein Punkt B_2, der mit Q_2 zusammenfiele, entsprechen, ein Fall, der wegen seiner Unbestimmtheit ganz außer Acht gelassen werden muß. Denn wäre die Punktreihe $s_1, \infty G_1A_1O_1$ gegeben, und sollte in einer zweiten Q_2, welches mit O_1 zusammenfiele, dem Punkt ∞ und zugleich auch dem Punkt G_1, der Punkt ∞ der zweiten Reihe aber dem O_1 der ersten entsprechen, und der dem A_1 entsprechende der Reihe $s_2, Q_2Q_2\infty$ gesucht werden, so könnte derselbe überall zwischen Q_2 und ∞ liegen und sein Ort bliebe völlig unbestimmt. Liegen aber M_1 und M_2 nicht in O_1 oder Q_2, so muß sein $O_1M_1 \cdot Q_2M_2$ oder $\overline{O_1M_1}^2 = \overline{O_1G_1}^2$, es müßte also $O_1M_1 = O_1G_1$ sein, oder es müßten in G_1 entsprechende Punkte zusammenfallen; also müßte G_2 auch in G_1 liegen, was gegen die Voraussetzung ist, nach welcher die Punktreihen $O_1G_1\infty H_1$ und $\infty G_2Q_2H_2$ einstimmig verlaufen sollen. Auf dieselbe Weise überzeugt man sich von dem analogen für Strahlbüschel aufgestellten Satze*). — Bei entgegengesetztem Verlaufe der entspre-

*) Paulus in seinem vortrefflichen Werke: „Grundlinien der neueren Geometrie. Stuttgart 1853" erklärt die Hauptpunkte in einstimmig verlaufenden involutorischen Punktreihen für imaginär, aus folgenden Gründen: „Um die Hauptpunkte M_1, (oder M_2) in conjectivischen Punktreihen, Fig. 48a., 52a., zu finden, hat man, wenn man O_1M_1 durch a, O_2M_2 durch a', O_1Q_2 durch q, $\overline{O_1G_1}^2$ durch p bezeichnet, die Gleichungen $a + a' = q$, und $aa' = p$, aus denen folgt:

$$a = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - p}.$$

In dieser Gleichung wird nun, um die Hauptpunkte der genannten Involution zu finden, $q = 0$ gesetzt, wodurch man erhält $a = \pm\sqrt{-p}$. Bei genauer Erwägung aber bemerkt man, daß, wenn O_1 und Q_2 auf einander fallen, zwar $q = o$ wird und die erste Gleichung übergeht in $a + a' = o$, daß aber, da die entsprechenden Punkte der Voraussetzung zwischen O_1 und Q_2 zusammenfallen sollen, zu schließen ist $a = a' = o$; es müßte also $aa' = p = o$ sein, oder es müßten G_1 und G_2 mit O_1

chenden Strahlen, Fig. 52b., hat man die Gleichung $\overline{O_1M_1}^2 = \overline{O_1G_1}^2$, woraus folgt, daß in G_1 entsprechende Punkte G_1 und G_2 vereinigt sind, ebenso in H_1. Ebenso überzeugt man sich von der Richtigkeit des obigen Satzes bei Strahlbüscheln. Es läßt sich nun auch leicht folgender Satz von Strahlbüscheln beweisen, der keinen entsprechenden an Punktreihen hat.

8. Lehrsatz. In jedem involutorischen Strahlbüschel steht ein Paar entsprechender Strahlen s_1, s_2 (oder t_1, t_2) auf einander senkrecht.

Bei entgegengesetzt verlaufenden Strahlbüscheln giebt es **kein** anderes Paar entsprechender Strahlen, die auf einander senkrecht stehen.

Bei einstimmig verlaufenden involutorischen Strahlbüscheln steht entweder bloß **ein** Paar, oder es stehen **alle** Paare entsprechender Strahlen auf einander senkrecht.

Das erstere ergiebt sich unmittelbar aus der Definition, Erklärung 6., des involutorischen Strahlbüschels, der zu Folge stets ein Paar Strahlen s_1 und t_1 oder, da s_2 auf t_1 fällt, s_1 und s_2 (oder t_1 und t_2) auf einander senkrecht stehen. Ist ferner, Fig. 53b., a_1 ein Strahl des Büschels, der innerhalb des Flächenraumes desjenigen rechten Winkels $s_1 s_2$ liegt, welcher den Strahl g_1 einschließt, so folgt wegen der Aufeinanderfolge der Strahlen, die in beiden zu Einem vereinigten Strahlbüscheln dieselbe sein muß, daß sein entsprechender a_2, innerhalb desselben Winkelraumes liegen muß, es muß also $a_1 a_2$ ein spitzer Winkel sein; ebenso muß derjenige Strahl b_2, der dem Strahl b_1 entspricht, welcher innerhalb des den Strahl h_1 einschließenden Flächenraumes liegt, in demselben Winkelraum sich befinden, es muß also auch $b_1 b_2$ spitz sein. Es kann daher bei entgegengesetzter Aufeinanderfolge kein Paar entsprechender Strahlen außer s_1 und s_2 einen rechten Winkel bilden. Anders ist es bei einstimmigem Verlaufe, Fig. 53a. Soll z. B. $a_1 a_2$ ein rechter Winkel sein, so geht die

Gleichung: $$\tang s_1a_1 \cdot \tang t_2a_2 = \tang^2 s_1g_1$$

oder $$\tang s_1a_1 \cdot \tang s_1a_2 = \tang^2 s_1g_1,$$

(weil dann $s_1a_2 = 90^0 - s_1a_1$ ist) über in

$$\tang s_1a_1 \cdot \cotang s_1a_1 = \tang^2 s_1g_1.$$

---

und Q_2 vereinigt sein, ein Fall, dessen Unbrauchbarkeit oben dargethan worden ist. Würde man trotz der gemachten Voraussetzung annehmen, daß, wenn O_1 und Q_2 zusammenfallen, die entsprechenden Punkte nicht mehr zwischen O_1 und Q_2 zu suchen sein, so wäre statt der Gleichung $a + a' = o$ zu setzen, $a - a' = o$, was eine Gleichung liefert, die, mit $aa' = p$ in Verbindung gebracht, das Resultat $a = \sqrt{p}$ giebt, oder

$$O_1M_1 = O_1G_1,$$

welches aus den oben angegebenen Gründen unmöglich ist. Man darf also nicht schließen, daß in dem in Rede stehenden Falle die Hauptpunkte imaginär seien.

Es kann dies aber, da $\tang s_1 a_1 \cdot \cotang s_1 a_1 = 1$ ist, nur dann gelten, wenn $\tang s_1 g_1$, also auch $\tang^2 s_1 g_1 = 1$ ist, oder, wenn $s_1 g_1 = 45^0$ ist. Dann ist aber auch für jedes andere Paar entsprechender Strahlen, z. B. b_1 und b_2, $\tang s_1 b_1 \cdot \tang s_1 b_2 = 1$, also $\tang s_1 b_2 = \frac{1}{\tang s_1 b_1} = \cotang s_1 b_1$, folglich $b_1 b_2 = 90^0$, und so für jedes Paar entsprechender Strahlen. Es bildet daher dann jedes Paar entsprechender Strahlen einen rechten Winkel.

9. Erklärung. Bilden in einem einstimmig verlaufenden involutorischen Strahlbüschel alle Paare entsprechender Strahleu rechte Winkel, so soll dies eine **rechtwinklige Involution** genannt werden.

Da die Anzahl der Punkte, die eine Punktreihe, und die Anzahl der Strahlen, die einen Strahlbüschel bilden, unendlich ist, so muß man sich vorstellen, daß in jedem Punkte der Punktreihe sowohl irgend ein Punkt der Reihe $s_1, A_1 G_1 B_1 H_1$, als irgend ein Punkt der Reihe $s_2, A_2 G_2 B_2 H_2$, und in jedem Strahle des Strahlbüschels sowohl irgend ein Strahl des Büschels $S_1, a_1 g_1 b_1 h_1$ als irgend ein Strahl des Büschels $S_2, a_2 g_2 b_2 h_2$ zusammenfallen. Im Allgemeinen sind diese zusammenfallenden keine entsprechenden, denn es giebt nur bei der entgegengesetzten Involution nur zwei Hauptpunkte, wohl aber gilt der merkwürdige Satz:

10. Lehrsatz. Fallen in einer involutorischen Punktreihe zwei Punkte z. B. C_1, D_2 der vereinigten conformen Punktreihen an einem Punkte zusammen, so fallen auch die entsprechenden Punkte C_2, D_1 an einem und demselben Punkte zusammen. Fig. 52a., 52b.

10. Lehrsatz. Fallen in einem involutorischen Strahlbüschel zwei Strahlen z. B. c_1, d_2 der vereinigten conformen Strahlbüschel in einem Strahl znsammen, so fallen auch die entsprechenden Strahlen c_2, d_1 auf einem und demselben Strahle zusammen. Fig. 53a., 53b.

Denn sind C_1 und C_2, D_1 und D_2 entsprechende Punkte, so ist nach § 2. Lehrsatz 17.

$$O_1 C_1 \cdot Q_2 C_2 = O_1 D_1 \cdot Q_2 D_2$$

oder, da Q_2 mit O_1 zusammenfällt:

$$O_1 C_1 \cdot O_1 C_2 = O_1 D_1 \cdot O_1 D_2.$$

Fällt nun D_2 mit C_1 zusammen, ist also $O_1 D_2 = O_1 C_1$, so folgt $O_1 C_2 = O_1 D_1$; es fällt dann auch C_2 nach D_1. Ebenso ist bei Strahlbüscheln:

$$\tang s_1 c_1 \cdot \tang t_2 c_2 = \tang s_1 d_1 \cdot \tang t_2 d_2$$

oder, da t_2 nach s_1 fällt,

$$\tang s_1 c_1 \cdot \tang s_1 c_2 = \tang s_1 d_1 \cdot \tang s_1 d_2.$$

Fällt also d_2 nach c_1, und ist daher tang $s_1 d_2 =$ tang $s_1 c_1$, so folgt: tang $s_1 c_2 =$ tang $s_1 d_1$, folglich $s_1 c_2 = s_1 d_1$, es fällt also c_2 nach d_1.

Umgekehrt kann man den Satz aussprechen:

11. Lehrsatz. Haben die eine Punktreihe s bildenden Punkte $C_1, E_1, N_1, D_1, F_1, M_1$, eine solche Lage, daß je zwei von ihnen, z. B. C_1, D_1 wechselseitig als entsprechende angesehen werden können, und mit je zwei Paaren der übrigen Punkte, z. B. E_1, F_1; N_1, M_1; E_1, N_1; E_1, M_1; F_1, N_1; F_1, M_1 u. s. w., conforme Quaternionen bilden, aber so, daß stets dasselbe Punktpaar entsprechend bleibt, so ist die Punktreihe involutorisch. Fig. 54a., 54b.

11. Lehrsatz. Haben die einen Strahlbüschel S bildenden Strahlen $c_1, e_1, n_1, d_1, f_1, m_1$, eine solche Lage, daß je zwei von ihnen, z. B. c_1, d_1 wechselseitig als entsprechende angesehen werden können, und mit je zwei Paaren der übrigen Strahlen, z. B. e_1, f_1; n_1, m_1; e_1, n_1; e_1, m_1; f_1, n_1; f_1, m_1 u. s. w., conforme Quaternionen bilden, aber so, daß stets dasselbe Strahlenpaar entsprechend bleibt, so ist der Strahlbüschel involutorisch. Fig. 55a, 55b.

Es sei z. B. die Punktreihe

$$s, C_1 E_1 N_1 D_1 \;\overline{\wedge}\; s, D_1 F_1 M_1 C_1$$

und zugleich $s, C_1 E_1 N_1 F_1 \;\overline{\wedge}\; s, D_1 F_1 M_1 E_1$

und $s, C_1 E_1 N_1 M_1 \;\overline{\wedge}\; s, D_1 F_1 M_1 N_1$

und $s, C_1 E_1 D_1 M_1 \;\overline{\wedge}\; s, D_1 F_1 C_1 N_1$

und so entstehe durch jede beliebige Combination ein anharmonisches Verhältniß, dessen Quotient dem eines andern anharmonischen Verhältnisses gleich ist, welches gefunden wird, indem man den Punkt C_1 mit D_1, D_1 mit C_1; E_1 mit F_1, F_1 mit E_1; N_1 mit M_1, M_1 mit N_1; vertauscht. Da die Doppelverhältnisse gleich sind, so kann man sich in diesem Falle vorstellen, es seien auf der Geraden s zwei conforme Punktreihen $s_1, C_1 E_1 N_1 D_1 F_1 M_1$ und $s_2, C_2 E_2 N_2 D_2 F_2 M_2$ vereinigt, und der dem C_1 entsprechende Punkt C_2 liege in D_1, der dem D_1 entsprechende in C_1; der dem N_1 entsprechende N_2 in M_1, M_2 in N_1 u. s. w. Es muß dann mit dem Punkt ∞ der Reihe $s_1 C_1 E_1 N_1$ .... ein Punkt Q_2, Fig. 52, der Reihe $s_2, C_2 E_2 N_2$ ...., und also, da jedem Paar auf einander fallender Punkte D_1, C_2 ein Paar ebenfalls auf einander fallender D_2, C_1 entspricht, der dem Punkt ∞ der Reihe $s_2, C_2 E_2 N_2$ entsprechende Punkt O_1 der ersteren Reihe mit Q_2 zusammenfallen. Man hat also dann zwei conforme mit den Gegenpunkten auf einander gelegte Punktreihen, also eine Involution nach Erklärung 4. Ebenso überzeugt man sich von dem Satze rechts, indem man sich auch hier vorstellen kann, es seien conforme Strahl=

büschel mit ihren Scheiteln auf einander gelegt, und jedem Paar auf einander fallender Strahlen d_1, c_2 entspreche ein ebenfalls auf einander fallendes Paar d_2, c_1. Da es nun in conformen Strahlbüscheln jederzeit Strahlen giebt, s_1, t_1; s_2, t_2, Fig. 53, der Art, daß sowohl $s_1 t_1$, als $s_2 t_2$ ein rechter Winkel ist, § 2. Lehrsatz 14, so folgt, daß s_1 mit t_2, und t_1 mit s_2 zusammenfallen muß. Kürzer kann man den vorigen Satz so ausdrücken:

12. **Lehrsatz.** Wenn eine Punktreihe

$$s, C_1 E_1 N_1 D_1 F_1 M_1 \ldots.$$

die Eigenschaft hat, daß man von je sechs ihrer Punkte, $C_1, E_1, N_1, D_1, F_1, M_1$ je zwei C_1, D_1; E_1, F_1; N_1, M_1 als entsprechend ansehen kann, und daß man, wenn man in irgend einer Quaternion jeden Punkt mit seinem entsprechenden vertauscht, eine conforme Quaternion erhält, so ist die Punktreihe involutorisch. Fig. 54a., 54b.

12. **Lehrsatz.** Wenn ein Strahlbüschel

$$S, c_1 e_1 n_1 d_1 f_1 m_1 \ldots.$$

die Eigenschaft hat, daß man von je sechs seiner Strahlen, c_1, e_1, n_1, d_1, f_1, m_1 je zwei c_1, d_1; e_1, f_1; n_1, m_1 als entsprechend ansehen kann, und daß man, wenn man in irgend einer Quaternion der Sinus jeden Strahl mit seinem entsprechenden vertauscht, eine conforme Quaternion erhält, so ist der Strahlbüschel involutorisch. Fig. 55a., 55b.

Oefter wird dieser Satz auch als Definition der Involution aufgestellt, indem man sagt: „Sechs Punkte stehen in Involution, wenn sie die Beschaffenheit haben, daß man je zwei als entsprechend ansehen kann und, wenn man in irgend einer Quaternion u. s. w.", wobei jedoch der Zusammenhang mit dem Vorhergegangenen verloren geht.

13. **Erklärung.** Die entsprechenden Elemente eines involutorischen Gebildes werden im Folgenden durch denselben Buchstaben bezeichnet werden, deren einem ein Accent beigefügt ist, so daß A, A′ entsprechende Punkte; a, a′, entsprechende Strahlen bezeichnen.

Aus dem Vorigen folgt unmittelbar der

14. **Lehrsatz.** Sind zwei Punktpaare einer Punktreihe gegeben, so giebt es zu jedem fünften beliebig angenommenen Punkt nur einen einzigen sechsten von der Beschaffenheit, daß er dem fünften entspricht, und alle sechs in Involution stehen; oder:

14. **Lehrsatz.** Sind zwei Strahlenpaare eines Strahlenbüschels gegeben, so giebt es zu jedem fünften beliebig angenommenen Strahl nur einen einzigen sechsten von der Beschaffenheit, daß er dem fünften entspricht, und alle sechs in Involution stehen; oder:

Die Involution einer Punktreihe ist durch zwei Paare entsprechender Punkte völlig bestimmt.

Die Involution eines Strahlbüschels ist durch zwei Paare entsprechender Strahlen völlig bestimmt.

Sind z. B. gegeben, Fig. 56a., 56b., die Paare entsprechender Punkte A, A′; B, B′; und soll zum Punkt C der entsprechende C′ gesucht werden, so muß nach Erklärung 4. und Lehrsatz 9., Punktreihe s,ABCA′ $\overline{\wedge}$ s,A′B′C′A sein. Da nun C zwischen B und A′ liegt, Fig. 56a., muß C′ zwischen B′ und A sich befinden, und es ist also nach § 2. Lehrsatz 10. der Punkt C′ völlig bestimmt. Ganz analog ist der Beweis für den Strahlbüschel, Fig. 57a., 57b.

Eine besondere Eigenschaft haben die Hauptpunkte und Hauptstrahlen, in denen also ein Paar entsprechender Elemente vereinigt ist. Der Definition zufolge muß, wenn G und H (oder G′ und H′) die Hauptpunkte einer involutorischen Punktreihe, Fig. 56b., und z. B. A und A′ ein Paar entsprechender Punkte sind,

Punktreihe s,AHA′G $\overline{\wedge}$ s,A′H′AG′

oder Punktreihe s,AHA′G $\overline{\wedge}$ s,A′HAG

oder
$$\frac{AH}{A'H} : \frac{AG}{A'G} = \frac{A'H}{AH} : \frac{A'G}{AG}$$

folglich
$$\left(\frac{AH}{A'H}\right)^2 = \left(\frac{AG}{A'G}\right)^2,$$

oder
$$\frac{AH}{A'H} = \frac{AG}{A'G} \text{ sein.}$$

Es ist also die Punktreihe AHA′G harmonisch. Ebenso findet sich, daß auch BHB′G, CHC′G u. s. w. harmonisch ist. Von Strahlbüscheln, Fig. 57b., überzeugt man sich auf gleiche Weise. Man sieht also:

15. Lehrsatz. Die Hauptpunkte G, H einer (in entgegengesetzter Richtung verlaufenden) involutorischen Punktreihe bilden mit jedem Paar entsprechender Punkte A, A′; B, B′; C, C′; u. s. w. eine harmonische Punktreihe. Fig. 56b.

15. Lehrsatz. Die Hauptstrahlen g, h eines (in entgegengesetzter Richtung verlaufenden) involutorischen Strahlbüschels bilden mit jedem Paar entsprechender Strahlen a, a′; b, b′; c, c′; u. s. w. einen harmonischen Strahlbüschel. Fig. 57b.

Da jede involutorische Punktreihe als Vereinigung zweier conformen Reihen, und jeder involutorische Strahlbüschel als Vereinigung zweier conformen Büschel angesehen werden kann, so folgt aus § 1. Lehrsatz 13. unmittelbar der

16. Lehrsatz. Jeder Strahlbüschel, dessen Strahlen durch die Punkte einer

16. Lehrsatz. Jede Punktreihe, deren Punkte auf den Strahlen eines involutori-

involutorischen Punktreihe gehen, ist selbst involutorisch.

schen Strahlbüschels liegen, ist selbst involutorisch.

Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich nun mehrere andere Eigenschaften der involutorischen Gebilde beweisen, z. B. die Umkehrung von 15. oder der

17. Lehrsatz. Wird die Strecke zwischen zwei Punkten G und H einer Geraden durch drei andere Punktpaare A, A'; B, B'; C, C' harmonisch getheilt, so bilden die Punkte AB'CC'BA' eine Involution entgegengesetzten Verlaufs, mit G und H als Hauptpunkten. Fig. 56b.

17. Lehrsatz. Wird der Flächenraum zwischen zwei Strahlen g und h eines Winkels durch drei andere Strahlenpaare a, a'; b, b'; c, c' harmonisch getheilt, so bilden die Strahlen ab'cc'ba' eine Involution entgegengesetzten Verlaufs mit g und h als Hauptstrahlen. Fig. 57b.

Es sei also Fig. 56b. Punktreihe s,GAHA', s,GBHB', s,GCHC' harmonisch, so ist also

$$\frac{GA}{HA}:\frac{GA'}{HA'}=\frac{GB}{HB}:\frac{GB'}{HB'}(=1);\quad \frac{GA}{HA}:\frac{GA'}{HA'}=\frac{GC}{HC}:\frac{GC'}{HC'}(=1),$$

oder:
$$\frac{GA}{HA}:\frac{GB}{HB}=\frac{GA'}{HA'}:\frac{GB'}{HB'}\quad \alpha)\qquad \frac{GA}{HA}:\frac{GC}{HC}=\frac{GA'}{HA'}:\frac{GC'}{HC'}\quad \beta)$$

folglich nach § 1. Lehrsatz 14. auch:

$$\frac{HG}{AG}:\frac{HB}{AB}=\frac{HG}{A'G}:\frac{HB'}{A'B'}\qquad \frac{HG}{AG}:\frac{HC}{AC}=\frac{HG}{A'G}:\frac{HC'}{A'C'},$$

folglich
$$\frac{HB}{AB}:\frac{HB'}{A'B'}=\frac{HC}{AC}:\frac{HC'}{A'C'}\quad \gamma).$$

Da aber die Theilung eine harmonische ist, so ist auch

$$\frac{GA'}{HA'}:\frac{GA}{HA}=\frac{GB}{HB}:\frac{GB'}{HB'}(=1);\quad \frac{GA'}{HA'}:\frac{GA}{HA}=\frac{GC}{HC}:\frac{GC'}{HC'}(=1)$$

oder:
$$\frac{GA'}{HA'}:\frac{GB}{HB}=\frac{GA}{HA}:\frac{GB'}{HB'}\quad \alpha')\qquad \frac{GA'}{HA'}:\frac{GC}{HC}=\frac{GA}{HA}:\frac{GC'}{HC'}\quad \beta')$$

also auch
$$\frac{HG}{A'G}:\frac{HB}{A'B}=\frac{HG}{AG}:\frac{HB'}{AB'};\qquad \frac{HG}{A'G}:\frac{HC}{A'C}=\frac{HG}{AG}:\frac{HC'}{AC'}$$

folglich
$$\frac{HB}{A'B}:\frac{HB'}{AB'}=\frac{HC}{A'C}:\frac{HC'}{AC'}\quad \gamma').$$

Es ist also nach γ) und γ')

$$\frac{HB}{HB'}:\frac{HC}{HC'}=\frac{AB}{A'B'}:\frac{AC}{A'C'};\qquad \frac{HB}{HB'}:\frac{HC}{HC'}=\frac{A'B}{AB'}:\frac{A'C}{AC'}$$

also
$$\frac{AB}{A'B'}:\frac{AC}{A'C'}=\frac{A'B}{AB'}:\frac{A'C}{AC'};$$

oder:
$$\frac{AB}{A'B}:\frac{AC}{A'C}=\frac{A'B'}{AB'}:\frac{A'C'}{AC'}\quad \delta).$$

Es bilden also die drei Punktpaare A, A'; B, B'; C, C' eine Involution nach Lehrsatz 12.; G und H aber sind vermöge der gegebenen harmonischen Gleichungen Punkte, in denen zwei entsprechende

zusammenfallen, sie sind also die Hauptpunkte nach Erklärung 3 und zwar kann es nach Lehrsatz 7. kein zweites Paar Hauptpunkte geben. Der Satz rechts folgt, wenn man sich durch den Strahlbüschel eine Transversale gezogen denkt, mit Rücksicht auf § 1. Lehrsatz 13. und unter Zuziehung des obigen Lehrsatzes 16. von selbst aus dem Lehrsatze links. Zugleich bemerkt man, daß, wenn noch beliebige andere Paare von Punkten, D, D′; E, E′; F, F′ etc. gegeben sind, deren jedes mit den Hauptpunkten G, H, eine harmonische Punktreihe GDHD′, GEHE′, GFHF′ etc. bildet, auch D, D′; E, E′; F, F′ entsprechende Punkte derselben Involution bilden, der die bisherigen drei Punktpaare A, A′; B, B′; C, C′ angehören. Denn man kann ebenso, wie oben gezeigt wurde, eine der Gleichung δ) analoge entwickeln, in der an der Stelle von C, C′, die Punkte D, D′, oder E, E′, oder F, F′ etc. stehen, oder in der außerdem noch auch B, B′ (oder A, A′), oder beide (B, B′ und A, A′) je durch ein neues Paar Punkte ersetzt sind. Es sind also D, D′; E, E′; F, F′; Punkte derselben Involution, zu der A, A′; B, B′; C, C′ gehören, da nach Lehrsatz 14. eine Involution durch zwei Paar entsprechender Punkte bestimmt ist; und umgekehrt sind A, A′; B, B′; C, C′ entsprechende Punkte der Involntion, die durch D, D′; E, E′; F, F′ etc. gebildet wird. Man erhält also, wenn man beliebig viele Punktpaare A, A′; B, B′; C, C′; D, D′; E, E′; F, F′ etc. construirt, deren jedes mit den Punkten G, H eine harmonische Punktreihe bildet, immer Punkte derselben Involution; oder mit anderen Worten: die Involution ist durch die zwei Hauptpunkte G, H bestimmt. Es stimmt dies auch mit dem Lehrsatze 14. überein, da in jedem Hauptpunkte zwei entsprechende Punkte der Involution zusammenfallen, und also, wenn die Hauptpunkte gegeben sind, zwei Paar entsprechender Punkte gegeben sind. Ganz dasselbe gilt ebenso von Strahlbüscheln, so daß man mit Rücksicht auf Lehrsatz 14. sagen kann:

18. **Lehrsatz.** Die Involution einer Punktreihe ist völlig bestimmt
α) durch zwei Paar entsprechender Punkte
β) durch die Hauptpunkte.

18. **Lehrsatz.** Die Involution eines Strahlbüschels ist völlig bestimmt
α) durch zwei Paar entsprechender Strahlen
β) durch die Hauptstrahlen.

Ein dem Lehrsatz 17. ähnliches Gesetz ist nun folgender

19. **Lehrsatz.** Werden die Strecken zwischen zwei Punktpaaren A, A′; B, B′ einer Geraden s durch zwei andere Punkte G, H harmonisch getheilt, so bilden alle sechs eine Involution mit den Hauptpunkten G, H. Fig. 56b.

19. **Lehrsatz.** Werden die Flächenräume zwischen zwei Strahlenpaaren a, a′; b, b′ eines Scheitels S durch zwei andere Strahlen g, h harmonisch getheilt, so bilden alle sechs eine Involution mit den Hauptstrahlen g, h. Fig. 57b.

Es sei also $\frac{AG}{A'G} = \frac{AH}{A'H}$ α) $\frac{BG}{B'G} = \frac{BH}{B'H}$ β)

oder: $\frac{GA}{HA} = \frac{GA'}{HA'}$; $\frac{GB}{HB} = \frac{GB'}{HB'}$.

oder: $\frac{GH - HA}{HA} = \frac{HA' - GH}{HA'}$; $\frac{HB - GH}{HB} = \frac{GH - HB'}{HB'}$

oder: $\frac{GH}{HA} - 1 = 1 - \frac{GH}{HA'}$; $1 - \frac{GH}{HB} = \frac{GH}{HB'} - 1$,

also: $\frac{2}{GH} = \frac{1}{HA} + \frac{1}{HA'}$; $\frac{2}{GH} = \frac{1}{HB} + \frac{1}{HB'}$,

also: $\frac{1}{HA} + \frac{1}{HA'} = \frac{1}{HB} + \frac{1}{HB'}$

oder: $\frac{HA + HA'}{HA \cdot HA'} = \frac{HB + HB'}{HB \cdot HB'}$.

Nach α) und β) aber ist

$$\frac{HA + HA'}{HA} = \frac{GA + GA'}{GA}; \quad \frac{HB + HB'}{HB} = \frac{GB + GB'}{GB}$$

also: $\frac{GA + GA'}{GA \cdot HA'} = \frac{GB + GB'}{GB \cdot HB'}$

oder: $\frac{AA'}{GA \cdot HA'} = \frac{BB'}{GB \cdot HB'}$ γ).

Aus α) und β) folgt weiter:

$$\frac{HA}{GA} = \frac{HA'}{GA'}; \quad \frac{HB}{GB} = \frac{HB'}{GB'}$$

oder: $\frac{HG - GA}{GA} = \frac{HG + GA'}{GA'}$; $\frac{HG + GB}{GB} = \frac{HG - GB'}{GB'}$

oder: $\frac{HG}{GA} - 1 = \frac{HG}{GA'} + 1$; $\frac{HG}{GB} + 1 = \frac{HG}{GB'} - 1$,

oder: $\frac{2}{HG} = \frac{1}{GA} - \frac{1}{GA'}$; $\frac{2}{HG} = \frac{1}{GB'} - \frac{1}{GB}$

folglich: $\frac{1}{GA} - \frac{1}{GA'} = \frac{1}{GB'} - \frac{1}{GB}$

oder: $\frac{GA' - GA}{GA \cdot GA'} = \frac{GB - GB'}{GB \cdot GB'}$.

Nach α) und β) ist aber

$$\frac{GA' - GA}{GA} = \frac{HA' - HA}{HA}; \quad \frac{GB - GB'}{GB} = \frac{HB - HB'}{HB}$$

also ist $\frac{HA' - HA}{GA' \cdot HA} = \frac{HB - HB'}{GB' \cdot HB}$

oder: $\frac{AA'}{GA' \cdot HA} = \frac{BB'}{GB' \cdot HB}$ δ).

Wird dies mit γ) verglichen, so folgt:

$$\frac{GA}{GB} \cdot \frac{HA'}{HB'} = \frac{HA}{HB} \cdot \frac{GA'}{GB'},$$

oder: $\frac{AG}{BG} : \frac{AH}{BH} = \frac{A'G}{B'G} : \frac{A'H}{B'H}$.

Es bilden also die sechs Punkte eine Involution, bei welcher G und H Hauptpunkte sind. Der Satz rechts folgt sogleich aus dem links stehenden vermöge des Lehrsatzes 16.

Für die Construction involutorischer, sonst aber ganz beliebiger Gebilde sind folgende Sätze von Bedeutung:

20. Lehrsatz. Jede Transversale in der Ebene eines vollständigen Vierseits (§ 3. Erklärung 15.) trifft dessen drei Paar gegenüberliegender Seiten in drei Punktpaaren, die eine involutorische Punktreihe bilden. Fig. 58a, 58b*).

20. Lehrsatz. Die von jedem beliebigen Punkte in der Ebene eines vollständigen Vierecks (§ 3. Erklärung 15.) nach den drei Paar gegenüberliegenden Ecken gezogenen drei Strahlenpaare bilden einen involutorischen Strahlbüschel. Fig. 59a, 59b*).

Es sei nämlich aca'c' das vollständige Vierseit. Denn es entstehn zwei Strahlbüschel B,abcd und D,c'ba'd', deren Strahlen sich zu je zweien auf der Geraden b' schneiden, sie sind also perspectivisch und folglich conform; sie theilen daher auch die Gerade s conform, so daß

$$s, \mathfrak{ABCB}' \barwedge s, \mathfrak{C'BA'B}'$$

ist, folglich ist
$$\frac{\mathfrak{AB}}{\mathfrak{CB}} : \frac{\mathfrak{AB}'}{\mathfrak{CB}'} = \frac{\mathfrak{C'B}}{\mathfrak{A'B}} : \frac{\mathfrak{C'B}'}{\mathfrak{A'B}'},$$

oder
$$\frac{\mathfrak{AB}}{\mathfrak{CB}} : \frac{\mathfrak{AB}'}{\mathfrak{CB}'} = \frac{\mathfrak{A'B}'}{\mathfrak{C'B}'} : \frac{\mathfrak{A'B}}{\mathfrak{C'B}}.$$

Es stehen also die Punktpaare $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$; $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$; $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ nach Lehrsatz 12 in Involution und diese ist, je nach der Lage der Transversale s einstimmig Fig. 58a. oder entgegengesetzt verlaufend, Fig. 58b. Ist ferner ACA'C' ein vollständiges Viereck Fig. 59., und A, A'; B, B'; C, C' die gegenüberliegenden Ecken, und zieht man von einem beliebigen Punkt S nach ihnen die Geraden a, a' u. s. w., so ist, wenn man sich AA', die e heißen mag, gezogen denkt, Punktreihe b,C$\mathfrak{A}$A'B' und c,B$\mathfrak{A}'$A'C' für den Strahlbüschel A,aaed perspectivisch; also ist Punktreihe b,C$\mathfrak{A}$A'B' $\barwedge$ Punktreihe c,B$\mathfrak{A}'$A'C' und daher auch Strahlbüschel

$$S, \mathfrak{c}a\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' \barwedge S, \mathfrak{b}a\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'.$$

Es ist also
$$\frac{\sin \mathfrak{b}'a}{\sin \mathfrak{c}a} : \frac{\sin \mathfrak{b}'a'}{\sin \mathfrak{c}a'} = \frac{\sin \mathfrak{c}'a}{\sin \mathfrak{b}a} : \frac{\sin \mathfrak{c}'a'}{\sin \mathfrak{b}a'}$$

oder
$$\frac{\sin \mathfrak{b}'a}{\sin \mathfrak{c}a} : \frac{\sin \mathfrak{b}'a'}{\sin \mathfrak{c}a'} = \frac{\sin \mathfrak{b}a'}{\sin \mathfrak{c}'a'} : \frac{\sin \mathfrak{b}a}{\sin \mathfrak{c}'a}.$$

Es stehen also nach Lehrsatz 12 die Strahlenpaare a, a'; b, b'; c, c' in Involution und diese hat einstimmigen Fig. 59a. oder entgegengesetzten Fig. 59b. Verlauf, je nach der Lage des Punktes S.

---

*) S. Witzschel's „Grundlinien der neueren Geometrie." § 100.

21. Aufgabe. Gegeben zwei Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$; $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ und ein fünfter Punkt $\mathfrak{B}'$; gesucht der dem letzteren entsprechende involutorische $\mathfrak{B}$. Fig. 58.

21. Aufgabe. Gegeben zwei Paar entsprechender Strahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ und ein fünfter Strahl $\mathfrak{b}'$; gesucht der dem letzteren entsprechende involutorische $\mathfrak{b}$. Fig. 59.

Auflösung der Aufgabe links. Man ziehe durch $\mathfrak{B}'$ eine beliebige Gerade b′; durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ zwei beliebige Gerade a, a′, welche die b′ bezüglich in A, C schneiden, ziehe $\mathfrak{C}'A$, $\mathfrak{C}C$, oder c′, c, welche die a′ und a bezüglich in D, B schneiden, und ziehe (B — D) oder b, so schneidet diese die s im Punkte $\mathfrak{B}$ nach dem vorigen Lehrsatze. — Auflösung der Aufgabe rechts. Man nehme auf b′ einen beliebigen Punkt B′ an, und auf a den beliebigen Punkt A, auf a′ den Punkt A′, ziehe (B′ — A), (B′ — A′), die bezüglich den Strahl c′ in C′, den Strahl c in C schneiden, ziehe AC, A′C′, so schneiden sich diese in einem solchen Punkt B, daß SB der verlangte Strahl b ist, nach dem vorigen Lehrsatze

22. Aufgabe. Gegeben zwei Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$; $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$; gesucht der Centralpunkt O einer involutorischen Punktreihe. Fig. 58., 60.

22. Aufgabe. Gegeben zwei Paar entsprechender Strahlen a, a′; c, c′; gesucht die Normalstrahlen s, t, eines involutorischen Strahlbüschels. Fig. 61.

Erste Auflösung der Aufgabe links. Wir haben hier offenbar nur eine Specialität der vorigen Aufgabe, nämlich den Fall, wo statt des Punktes $\mathfrak{B}'$ der unendlich entfernte gegeben ist, dessen entsprechender gesucht werden soll. Man lege also eine Gerade b parallel zu s Fig. 58. (in welcher man sich jetzt b ‖ s vorstellen möge), ziehe durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ die beliebigen Geraden a, a′, welche die b in B, D treffen, ziehe B$\mathfrak{C}$, D$\mathfrak{C}'$ oder c, c′ und verbinde den Durchschnittspunkt A der a und c′ mit dem Durchschnittspunkt C der a′ und c, durch die Gerade b′, so schneidet diese die s im verlangten Punkt O nach Erklärung 5 und Lehrsatz 20. Eine zweite Auflösung derselben Aufgabe ist folgende, Fig. 60. Man beschreibe zwei Kreise, deren einer durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, der andere durch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ geht und die sich in G_1 und G_2 schneiden. Zwei solche Kreise sind, welche Lage auch die gegebenen Punkte haben mögen, stets leicht zu finden. Dann ziehe man G_2G_1, welche die s im gesuchten Punkte O schneidet. Denn es ist nach einem bekannten Satze der Kreislehre

$$O\mathfrak{A} \cdot O\mathfrak{A}' = OG_2 \cdot OG_1 \text{ und } O\mathfrak{C} \cdot O\mathfrak{C}' = OG_2 \cdot OG_1,$$

also
$$O\mathfrak{A} \cdot O\mathfrak{A}' = O\mathfrak{C} \cdot O\mathfrak{C}'$$

oder
$$\frac{\mathfrak{A}O}{\mathfrak{C}O} = 1 : \frac{\mathfrak{A}'O}{\mathfrak{C}'O}$$

oder
$$\frac{\mathfrak{A}O}{\mathfrak{C}O} : \frac{\mathfrak{A}\infty}{\mathfrak{C}\infty} = \frac{\mathfrak{A}'\infty}{\mathfrak{C}'\infty} : \frac{\mathfrak{A}'O}{\mathfrak{C}'O};$$

es ist also O nach Erklärung 5. der Centralpunkt. — Die Aufgabe rechts läßt sich nicht auf die vorige zurückführen, denn hier sind nur vier Strahlen bekannt und man kennt keinen der Normalstrahlen, (während in der Aufgabe links der im Unendlichen liegende Punkt bekannt war), denn sonst wäre auch der rechtwinklig auf ihm stehende andere Normalstrahl bekannt. Es läßt aber der Beweis des Satzes § 2. 14. vermuthen, daß die Auflösung hier mit Hülfe des Kreises erfolgen müsse. Und in der That, man beschreibe einen beliebigen durch S gehenden Kreis, den die Strahlen a, c, a′, c′, bezüglich in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}'$ schneiden, ziehe die Sehnen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$, die sich in einem Punkte X inner- oder außerhalb des Kreises treffen Fig. 61a., 61b. und ziehe dann von X nach dem Mittelpunkt M des Kreises eine Gerade, welche die Peripherie des Kreises in zwei Punkten $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ schneidet; dann entstehn zwei Strahlbüschel $\mathfrak{A},\mathfrak{y}\mathfrak{s}\mathfrak{x}\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{C},\mathfrak{y}'\mathfrak{s}'\mathfrak{x}'\mathfrak{t}'$, die für $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ als Projectionsaxe perspectivisch liegen und also conform sind. Es ist also $\mathfrak{A},\mathfrak{y}\mathfrak{s}\mathfrak{x}\mathfrak{t} \barwedge \mathfrak{C},\mathfrak{y}'\mathfrak{s}'\mathfrak{x}'\mathfrak{t}'$. Zieht man nun $\mathfrak{S}$S, $\mathfrak{A}'$S, $\mathfrak{T}$S, $\mathfrak{C}$S, $\mathfrak{A}$S, $\mathfrak{C}'$S, so ist Winkel $\mathfrak{y}\mathfrak{s} = sc$, weil $\mathfrak{y}\mathfrak{s}$ in dem dem Kreise eingeschriebenen Viereck $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{T}\mathfrak{S} = 180^0 - \mathfrak{C}\mathfrak{T}\mathfrak{S} = 180^0 - \mathfrak{A}S\mathfrak{S} = cs$ (nach § 1. Erklärung 22.) ist; ferner ist (mit Berücksichtigung derselben Erklärung) $\mathfrak{s}'\mathfrak{y} = sa$, $\mathfrak{y}\mathfrak{x} = ca'$, $\mathfrak{y}\mathfrak{t} = ct$, $\mathfrak{s}\mathfrak{t} = st$, $\mathfrak{x}\mathfrak{t} = a't$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen. Es ist also Strahlbüschel $\mathfrak{A},\mathfrak{y}\mathfrak{s}\mathfrak{x}\mathfrak{t}$ = Strahlbüschel S,csa′t. Ebenso ist der Strahlbüschel $\mathfrak{C},\mathfrak{y}'\mathfrak{s}'\mathfrak{x}'\mathfrak{t}'$ = S,asc′t, da $\mathfrak{y}'\mathfrak{s} = sa$, $\mathfrak{y}'\mathfrak{x}' = ac'$, $\mathfrak{y}'\mathfrak{t}' = at$, $\mathfrak{s}'\mathfrak{x}' = sc'$, $\mathfrak{s}'\mathfrak{t}' = st$, $\mathfrak{x}'\mathfrak{t}' = c't$ ist. Es ist also Strahlbüschel S,csa′t $\barwedge$ S,asc′t, oder

$$\frac{\sin cs}{\sin a's} : \frac{\sin ct}{\sin a't} = \frac{\sin as}{\sin c's} : \frac{\sin at}{\sin c't}$$

oder
$$\frac{\sin cs}{\sin a's} : \frac{\sin ct}{\sin a't} = \frac{\sin c't}{\sin at} : \frac{\sin c's}{\sin as}.$$

Es ist also auch Strahlbüschel S,csa′t $\barwedge$ S,c′tas, oder es sind a′ und a, c′ und c, s und t entsprechende Strahlen eines involutorischen Strahlbüschels S,acta′c′s, und da s und t senkrecht auf einander stehn, weil $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ ein Durchmesser ist, sind sie die Normalstrahlen.

23. Aufgabe. Gegeben zwei Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$; $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$; gesucht die Hauptpunkte der involutorischen Punktreihe, wenn solche vorhanden sind. Fig. 58b.

23. Aufgabe. Gegeben zwei Paar entsprechender Strahlen a, a′; c, c′; gesucht die Hauptstrahlen des involutorischen Strahlbüschels, wenn solche vorhanden sind. Fig. 61b.

Hauptpunkte giebt es nach Lehrsatz 7. nur dann, wenn die entsprechenden Elemente der beiden zu einem einzigen, involutorischen, vereinigten conformen zwei Grundgebilde in entgegengesetzter Richtung verlaufen. Man hat dann folgende

Auflösung der Aufgabe links. Man suche nach Auflösung der Aufgabe 22. den Centralpunkt O der involutorischen Punktreihe Fig. 58b.

(in welcher man sich BD || s, 𝔅 im Unendlichen, O an die Stelle von 𝔅′ gesetzt vorstelle), und verwandle nach bekannten Regeln das Rechteck aus den Entfernungen zweier beliebiger entsprechender Punkte, z. B. 𝔄 und 𝔄′ in ein an Fläche gleiches Quadrat, indem man die mittlere Proportionale zu O𝔄 und O𝔄′ sucht, so ist die Seite desselben gleich der Entfernung der Hauptpunkte 𝔊, ℌ von dem Centralpunkt, nach Lehrsatz 7. — Behufs der Lösung der Aufgabe rechts beschreibe man einen beliebigen durch S Fig. 61 b. gehenden Kreis, der von a, c, a′, c′ in 𝔄, ℭ, 𝔄′, ℭ′ geschnitten wird, ziehe die Sehnen 𝔄𝔄′, ℭℭ′, die sich bei entgegengesetztem Verlauf entsprechender Strahlen allemal außerhalb des Kreises schneiden müssen und ziehe von ihrem Durchschnittspunkte X an den Kreis die Tangenten X𝔊, Xℌ, so sind die Strahlen S𝔊 oder g und Sℌ oder h die Hauptstrahlen. Denn nach der Auflösung der Aufgabe 22. rechts sind s und t die Normalstrahlen, a und a′ sind nach der Voraussetzung entsprechende Strahlen. Nun ist sa $= \angle$ S𝔗𝔄, der kurz α, sa′ $= \angle$ S𝔗𝔄′, der kurz α' heiße, der $\angle$ 𝔄XS heiße δ. Im $\triangle$ XS𝔄 verhält sich nun nach dem Sinuslehrsatz der Trigonometrie X𝔄 : S𝔄 $= \sin(90 - \alpha) : \sin\delta = \cos\alpha : \sin\delta$; es ist daher S𝔄 $= \frac{X𝔄 \cdot \sin\delta}{\cos\alpha}$; Im $\triangle$ XS𝔄′ ist X𝔄′ : S𝔄′ $= \sin(90 - \alpha')$ $: \sin\delta = \cos\alpha' : \sin\delta$; folglich ist S𝔄′ $= \frac{X𝔄' \cdot \sin\delta}{\cos\alpha'}$, und man hat daher:

$$S𝔄 \cdot S𝔄' = X𝔄 \cdot X𝔄' \cdot \frac{\sin^2\delta}{\cos\alpha \cdot \cos\alpha'}.$$

In dem $\triangle$ X𝔗𝔄 aber verhält sich X𝔗 : 𝔗𝔄 $=$ sin X𝔄𝔗 : sin δ oder da $\angle$ X𝔄𝔗 $= \angle$ 𝔗S𝔄′ $= 90^0 - \alpha'$ ist, X𝔗 : 𝔗𝔄 $= \cos\alpha' : \sin\delta$, also ist 𝔗𝔄 $= \frac{X𝔗 \cdot \sin\delta}{\cos\alpha'}$. Im $\triangle$ X𝔗𝔄′ verhält sich X𝔗 : 𝔗𝔄′ $=$ sin X𝔄′𝔗 : sin δ, oder da $\angle$ X𝔄′𝔗 $= \angle$ 𝔗S𝔄 $= 90 - \alpha$ ist, X𝔗 : 𝔗𝔄′ $= \cos\alpha : \sin\delta$; also ist 𝔗𝔄′ $= \frac{X𝔗 \cdot \sin\delta}{\cos\alpha}$. Man hat also:

$$𝔗𝔄 \cdot 𝔗𝔄' = \overline{X𝔗}^2 \cdot \frac{\sin^2\delta}{\cos\alpha \cdot \cos\alpha'}.$$

Dividirt man mit dieser Gleichung in die vorige, so erhält man:

$$\frac{S𝔄}{𝔗𝔄} \cdot \frac{S𝔄'}{𝔗𝔄'} = \frac{X𝔄 \cdot X𝔄'}{\overline{X𝔗}^2}.$$

Da aber X𝔊 eine Tangente ist, so ist X𝔄 · X𝔄′ $= \overline{X𝔊}^2$, also:

$$\frac{S𝔄}{𝔗𝔄} \cdot \frac{S𝔄'}{𝔗𝔄'} = \left(\frac{X𝔊}{X𝔗}\right)^2.$$

Es ist aber $\frac{S𝔄}{𝔗𝔄} = \operatorname{tang}\alpha$; $\frac{S𝔄'}{𝔗𝔄'} = \operatorname{tang}\alpha'$; ferner verhält sich im $\triangle$ X𝔗𝔊 X𝔊 : X𝔗 $= \sin\gamma$: sin X𝔊𝔗, wenn $\angle$ S𝔗𝔊 durch γ bezeichnet wird, oder, da nach einem bekannten Satze der Kreislehre $\angle$ X𝔊𝔗 $= \angle$ XS𝔊 $= 90^0 - \angle$ S𝔗𝔊 $= 90^0 - \gamma$ ist: X𝔊 : X𝔗 $= \sin\gamma : \cos\gamma$; es ist also $\frac{X𝔊}{X𝔗} = \operatorname{tang}\gamma$. Man hat also:

$$\text{tang}\,\alpha \cdot \text{tang}\,\alpha' = \text{tang}^2\,\gamma$$

oder da $\angle \alpha = sa$, $\angle \alpha' = sa'$, $\angle \gamma = sg$ ist:

$$\text{tang}\,sa \cdot \text{tang}\,sa' = \text{tang}^2\,sg.$$

Ferner ist $\angle sh = \angle \mathfrak{STH} = \angle \mathfrak{STG}$ (weil $\triangle \mathfrak{XTH} \cong \triangle \mathfrak{XTG}$ ist) $= \angle \gamma = sg$. Es sind also g und h die Hauptstrahlen nach § 3. Lehrsatz 9. und nach Lehrsatz 7. Uebrigens wird sich eine allgemeine Auffassung der Lösung der Aufgabe rechts im § 14. zeigen.

§ 5.

Projectivische Lage der Grundgebilde.

Der allgemeinste, in § 2. III. erwähnte Fall ist offenbar der, daß conforme Grundgebilde weder axial noch central, oder projectivisch liegen. Bei der Unbestimmtheit, die daher über ihre gegenseitige Lage herrscht und dem weiten Spielraum, in dem sie sich bewegen können, giebt es natürlich nur wenige Eigenschaften von allgemeiner Geltung; wenigstens können mit Hülfe des Bisherigen nur wenige entdeckt werden, und erst in einem späteren Kapitel wird dieser Fall als die Quelle einer Menge interessanter Gesetze auftreten. Zunächst muß vorausgeschickt werden, daß folgende Definitionen gelten sollen:

1. Erklärung. Auch bei projectivischer Lage conformer Punktreihen $s_1, A_1C_1B_1D_1$ und $s_2, A_2C_2B_2D_2$ sollen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, z. B. A_1 mit A_2, D_1 mit D_2 **Projectionsstrahlen** heißen. Fig. 62.

1. Erklärung. Auch bei projectivischer Lage conformer Strahlbüschel $S_1, a_1c_1b_1d_1$ und $S_2, a_2c_2b_2d_2$ sollen die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen, z. B. von a_1 mit a_2, d_1 mit d_2 **Projectionspunkte** heißen. Fig. 63.

Es sollen also die für die perspectivische Lage gebrauchten Bezeichnungen § 3. Erklärung 1. auch bei projectivischer Lage gebraucht werden, die sich von der ersteren dadurch unterscheidet, daß die Projectionsstrahlen sich nicht in einem und demselben Punkt schneiden und die Projectionspunkte nicht auf einer Geraden liegen. Es läßt sich nun leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes beweisen:

2. Lehrsatz. Befinden sich zwei conforme Punktreihen $s_1, A_1C_1B_1D_1$ und $s_2, A_2C_2B_2D_2$ in projectivischer Lage, so läßt sich stets eine dritte Punktreihe s, ACBD finden, die mit jeder der beiden gegebenen perspectivisch liegt. Fig. 62.

2. Lehrsatz. Befinden sich zwei conforme Strahlbüschel $S_1, a_1c_1b_1d_1$ und $S_2, a_2c_2b_2d_2$ in projectivischer Lage, so läßt sich stets ein dritter Strahlbüschel S, acbd finden, der mit jedem der beiden gegebenen perspectivisch liegt. Fig. 63.

Man nehme auf irgend einem der Projectionsstrahlen, z. B. $(A_1 - A_2)$

zwei beliebige Punkte S_1, S_2 an, und ziehe von dem einen z. B. von S_1 nach A_1, C_1, B_1, D_1, von dem anderen S_2 nach A_2, C_2, B_2, D_2, so entstehen, da die Punktreihen $s_1, A_1C_1B_1D_1$ und $s_2, A_2C_2B_2D_2$ conform sind, zwei conforme Strahlbüschel nach § 1. Lehrsatz 13, $S_1, a_1c_1b_1d_1$ und $S_2, a_2c_2b_2d_2$, und da sie der Annahme nach mit einem Paare entsprechender Strahlen a_1 und a_2 auf einander fallen, liegen sie perspectivisch nach § 3. Lehrsatz 2β. Es schneiden sich also die entsprechenden Strahlen auf einer Geraden s, auf welcher die beiden Strahlbüschel die Punktreihe s,ACBD beschreiben, die demnach mit jeder der beiden gegebenen $s_1, A_1C_1B_1D_1$ und $s_2, A_2C_2B_2D_2$ perspectivisch liegt, nach § 3. Lehrsatz 2α. Es schneiden sich also s,ACBD und $s_1, A_1C_1B_1D_1$ in zwei entsprechenden Punkten E und E_1, und ebenso s,ACBD und $s_2, A_2C_2B_2D_2$ in zwei entsprechenden Punkten F und F_2, und es durchschneidet daher s die Punktreihen $s_1, A_1C_1B_1D_1$ und $s_2, A_2C_2B_2D_2$ in zwei nicht entsprechenden Punkten E_1 und F_2. — Ebenso überzeugt man sich von der Richtigkeit des Satzes rechts. Man ziehe durch den Projectionspunkt irgend zweier entsprechenden Strahlen, z. B. a_1 und a_2 zwei beliebige Gerade s_1 und s_2, die von den Strahlbüscheln $S_1, a_1c_1b_1d_1$ und $S_2, a_2c_2b_2d_2$ bezüglich in den Punktreihen $s_1, A_1C_1B_1D_1$ und $s_2, A_2C_2B_2D_2$ geschnitten werden. Da diese zwei Punktreihen conform sind und mit einem Paar entsprechender Punkte A_1 und A_2 auf einander fallen, so liegen sie nach § 3. Lehrsatz 2β. perspectivisch und die Projectionsstrahlen $(C_1 - C_2)$, $(B_1 - B_2)$, $D_1 - D_2)$ bilden also einen Strahlbüschel S,acbd der mit $S_1, a_1c_1b_1d_1$ für die Axe s_1, mit $S_2, a_2c_2b_2d_2$ für die Axe s_2 perspectivisch liegt.

Man kann diesen, eben bewiesenen Lehrsatz noch von einer anderen Seite auffassen, wenn man folgende Definition berücksichtigt:

3. Erklärung. Man versteht unter einem **vollständigen Sechsseit** den Inbegriff beliebiger sechs Geraden, die als unbegrenzt angenommen werden. Diese Geraden heißen die **Seiten** des Sechsseits, ihre Durchschnittspunkte die **Ecken** desselben. Fig. 62.

3. Erklärung. Man versteht unter einem **vollständigen Sechseck** den Inbegriff beliebiger sechs Punkte. Diese Punkte heißen die **Ecken** des Sechsecks, ihre Verbindungsgeraden die **Seiten** desselben. Fig. 63.

Oder allgemein:

4. Erklärung. Um ein vollständiges Sechsseit zu erhalten, nehme man sechs beliebige Gerade s_1, d, s_2, f_1, a_1 (oder a_2), e_2 an und bestimme willkürlich, daß z.

4. Erklärung. Um ein vollständiges Sechseck zu erhalten, nehme man sechs beliebige Punkte S_1, D, S_2, F_1, A_1 (oder A_2), E_2 an und bestimme willkürlich, daß z. B.

B. s_1 die erste, d die zweite, s_2 die dritte, f_1 die vierte, a_1 die fünfte, e_2 die sechste Seite sein soll. Dann ziehe man vom Durchschnittspunkt der ersten mit der sechsten auf der ersten bis dahin, wo sie von der zweiten geschnitten wird, dann auf der zweiten bis zum Durchschnittspunkte mit der dritten, dann auf der dritten bis zum Durchschnittspunkte mit der vierten u. s. w. bis man zum Anfangspunkte zurückgelangt. Läßt man nun eine andere Gerade die erste, u. s. w. sein, und verfährt ebenso, und auf gleiche Weise durch alle Permutationen hindurch, so erhält man halb so viele einfache Sechsseite, als die Anzahl der Permutationen beträgt, die fünf Elemente zu lassen, nämlich 60. Alle diese 60 einfachen Sechsseite zusammengenommen bilden das vollständige Sechsseit. Fig. 62.*)

S_1 die erste, D die zweite, S_2 die dritte, F_1 die vierte, A_1 die fünfte, E_2 die sechste Ecke sein soll, und verbinde dann S_1 mit D, D mit S_2, S_2 mit F_1, F_1 mit A_1, A_1 mit E_2, E_2 mit S_1 durch Gerade, bis man zum Anfangspunkte zurückgelangt. Läßt man nun einen anderen Punkt den ersten, u. s. w. sein, und verfährt ebenso und auf gleiche Weise durch alle Permutationen hindurch, so erhält man halb so viele einfache Sechsecke, als die Anzahl der Permutationen beträgt, die fünf Elemente zulassen, nämlich 60. Alle diese 60 einfachen Sechsecke zusammengenommen bilden das vollständige Sechseck. Fig. 63.*)

Läßt man nämlich z. B. s_1 die erste Seite sein, was jederzeit angenommen werden kann, so können die fünf anderen ihre Rangordnung als zweite, dritte u. s. w. so vielmal wechseln, als fünf Elemente Permutationen zulassen. Man erhält also, wenn man die erste Seite zuerst, die zweite zu zweit u. s. w. schreibt, die einfachen Sechsseite $s_1ds_2f_1a_1e_2$, $s_1ds_2f_1e_2a_1$, $s_1ds_2a_1f_1e_2$, $s_1ds_2a_1e_2f_1$ u. s. w. Ihre Anzahl ist offenbar 1.2.3.4.5. Man erhält jedoch so jedes einfache Sechsseit zweimal, denn es ist z. B. $s_1ds_2f_1a_1e_2$ und $s_1e_2a_1f_1s_2d$ einerlei, und beide sind nur durch die Aufeinanderfolge der sie bildenden Geraden verschieden. Ebenso ist $s_1ds_2a_1f_1e_2$ identisch mit $s_1e_2f_1a_1s_2d$ u. s. w. Es giebt also nur $\frac{1.2.3.4.5.}{2} = 60$ verschiedene einfache Sechsseite. Ebenso ist es bei den Sechsecken. Man überzeugt sich übrigens leicht, daß auch die § 3. Erklärung 15. gegebene Defi-

*) Man sehe das Ende dieses Paragraphen.

finition des vollständigen Vierseits und Vierecks auf dieselbe Weise aufgefaßt werden kann, indem vier Gerade $\frac{1.2.3.}{2} = 3$ verschiedene einfache Vierseite hervorbringen.

5. Erklärung. Wird im Folgenden von einem Sechsseit $s_1ds_2f_1a_1e_2$ ohne weiteren Zusatz gesprochen, so ist darunter dasjenige **einfache** Sechsseit zu verstehen, welches durch s_1 als erste, d als zweite, ... e_2 als sechste Seite gebildet wird. Das **vollständige** Sechsseit hingegen wird bezeichnet durch den Ausdruck: „vollständiges Sechsseit $s_1ds_2f_1a_1e_2$" mit beliebiger Aufeinanderfolge der Seiten s_1, d, s_2 u. s. w.

Ein einfaches Sechsseit ist identisch mit einem einfachen Sechseck, denn es hat sechs Ecken.

5. Erklärung. Wird im Folgenden von einem Sechseck $S_1DS_2F_1A_1E_2$ ohne weiteren Zusatz gesprochen, so ist darunter dasjenige **einfache** Sechseck zu verstehen, welches durch S_1 als erste, D als zweite .... E_2, als sechste Ecke gebildet wird. Das **vollständige** Sechseck hingegen wird bezeichnet durch den Ausdruck „vollständiges Sechseck $S_1DS_2F_1A_2E_2$" mit beliebiger Aufeinanderfolge der Ecken S_1, D, S_2 u. s. w.

Ein einfaches Sechseck ist identisch mit einem einfachen Sechsseit, denn es hat sechs Seiten.

Nach Vorausschickung dieser Definitionen läßt sich nun der Lehrsatz 2. auch so aussprechen:

6. Lehrsatz. Wird in einem Sechsseit $s_1ds_2f_1a_1e_2$ die erste und dritte Seite s_1 und s_2 durch die vier übrigen a_1, e_2, d, f_1 in solchen Punkten geschnitten, daß die Durchschnittspunkte entsprechende Punkte conformer Punktreihen sind, daß also Punktreihe

$$s_1,A_1E_1D_1F_1 \overline{\wedge} s_2,A_2E_2D_2F_2$$

ist, so schneiden sich die Diagonalen s, d_1, d_2, welche die erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste Ecke des Sechsseits $s_1,ds_2f_1a_1e_2$ verbinden, in einem und demselben Punkte D. Fig. 62.

6. Lehrsatz. Sind in einem Sechseck $S_1DS_2F_1A_1E_2$ die Verbindungsgeraden der ersten und dritten Ecke S_1 und S_2 mit den vier übrigen, A_1, E_1, D, F_1, entsprechende Strahlen conformer Strahlbüschel, so daß also Strahlbüschel

$$S_1,a_1e_1d_1f_1 \overline{\wedge} S_2,a_2e_2d_2f_2$$

ist, so liegen die Durchschnittspunkte S, D_1, D_2 bezüglich der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Seite des Sechsecks $S_1,DS_2F_1A_1E_2$ auf einer und derselben Geraden d. Fig. 63.

Denn, man ziehe vom Durchschnittspunkte S_1 der vierten und fünften, das Sechsseit bildenden Geraden die Linien a_1, e_1, d_1, f_1 nach denjeni-

gen Punkten A_1, E_1, D_1, F_1, in welchen die erste Seite s_1 von den vier andern geschnitten wird, und ebenso ziehe man vom Durchschnittspunkte S_2 der fünften und sechsten, das Sechsseit bildenden Geraden die Linien a_2, e_2, d_2, f_2 nach denjenigen Punkten A_2, E_2, D_2, F_2, in welchen die dritte Seite s_2 von den vier anderen geschnitten wird. Es entstehen so zwei conforme Strahlbüschel $S_1, a_1 e_1 d_1 f_1$ und $S_2, a_2 e_2 d_2 f_2$. Sie liegen perspectivisch, da sie mit einem Paar entsprechender Strahlen a_1 und a_2 auf einander fallen, und ihre Projectionspunkte E, D, F liegen daher auf einer Geraden s, es schneiden sich also die die erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste Ecke verbindenden Diagonalen D_1S_1, D_2S_2, F_2E_1 in einem und demselben Punkte D. — Man bestimme auf der Verbindungsgeraden s_1 des vierten und fünften der das Sechseck bildenden Punkte die Durchschnittspunkte A_1, E_1, D_1, F_1 welche die Verbindungsgeraden des ersten Punktes S_1 mit den vier übrigen A_1, E_2, D, F_1 auf s_1 bilden; ebenso bestimme man auf der Verbindungsgeraden s_2 des fünften und sechsten Punktes die Durchschnittspunkte A_2, E_2, D_2, F_2, in welchen sie von den Verbindungslinien des dritten Punktes S_2 mit A_1, E_2, D, F_1 getroffen wird. Es entstehen so zwei conforme Punktreihen $s_1, A_1E_1D_1F_1$ und $s_2, A_2E_2D_2F_2$. Sie fallen mit einem Paare entsprechender Punkte A_1, A_2 auf einander und liegen folglich perspectivisch und ihre Projectionsstrahlen e, d, f schneiden sich in einem und demselben Punkte S. Es liegen also die Durchschnittspunkte der ersten und vierten, der zweiten und fünften, der dritten und sechsten Seite, D_1, D_2, S auf einer und derselben Geraden d.

Umgekehrt kann man behaupten:

7. Lehrsatz. Schneiden sich in einem Sechsseit die Diagonalen, welche die erste und vierte, die zweite und fünfte, die dritte und sechste Ecke verbinden, in einem und demselben Punkte D, so werden je die erste und dritte Seite, nämlich s_1 und s_2, d und f_1, s_2 und a_1, f_1 und e_2, a_1 und s_1, e_2 und d, von den vier übrigen conform geschnitten, so daß die Durchschnittspunkte, die jede der vier übrigen mit der ersten und dritten bildet, entsprechende Punkte sind. Fig. 62.

7. Lehrsatz. Liegen in einem Sechseck die Durchschnittspunkte der ersten und vierten, der zweiten und fünften, der dritten und sechsten Seite auf einer und derselben Geraden, so sind die Strahlbüschel, die entstehen, wenn man je den ersten und dritten Punkt, nämlich S_1 und S_2, D und F_1, S_2 und A_1, F_1 und E_2, A_1 und S_1, E_2 und D mit den vier übrigen verbindet, conform und zwar so, daß die Verbindungslinien, die jeder der vier übrigen mit dem ersten und dritten bildet, entsprechende Strahlen sind. Fig. 63.

Denn schneiden sich die Diagonalen der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Ecke in einem Punkte D und sieht man irgend zwei Seiten des Sechsseits $s_1 d s_2 f_1 a_1 e_2$, zwischen denen eine andre Seite liegt, z. B. s_1 und s_2 (zwischen denen d liegt) als erste und dritte an, und den Durchschnittspunkt der ersten und zweiten s_1 und d als die erste Ecke, den der zweiten und dritten als zweite Ecke u. s. w. so verbinde man die vierte Ecke mit der ersten und sechsten, die fünfte Ecke mit der zweiten und dritten, so entstehen ein Paar Strahlbüschel $S_1, a_1 e_1 d_1 f_1$ und $S_2, a_2 e_2 d_2 f_2$, die perspectivisch liegen in Bezug auf die Diagonale der dritten und sechsten Ecke als Projectionsaxe. Sie sind also conform, und also ist $s_1, A_1 E_1 D_1 F_1 \barwedge s_2, A_2 E_2 D_2 F_2$. Man hätte ebenso auch z. B. a_1 und s_1 als erste und dritte Seite ansehen können, dann hätte man D_2 und F_2 als Scheitel des conformen Strahlbüschels anzusehen und $D_1 D$ wäre die Projectionsaxe; man überzeugt sich dann, daß a_1 und s_1 conform getheilt werden, und so in jedem andern Falle. — Man sehe irgend zwei Punkte des Sechsecks $S_1 D S_2 F_1 A_1 E_2$ zwischen welchen ein Punkt liegt, z. B. S_1 und S_2 (zwischen welchen D liegt) als ersten und dritten an, nenne die Verbindungslinie des ersten und zweiten S_1 und D die erste Seite, die Verbindungslinie des zweiten und dritten die zweite u. s. w. und bestimme die Durchschnittspunkte der ersten und sechsten mit der vierten, der zweiten und dritten mit der fünften, so entstehen ein Paar Punktreihen $s_1, A_1 E_1 D_1 F_1$ und $s_2, A_2 E_2 D_2 F_2$, die perspectivisch liegen für den Durchschnittspunkt der dritten und sechsten Seite als Projectionscentrum. Sie sind also conform und also ist $S_1, a_1 e_1 d_1 f_1 \barwedge S_2, a_2 e_2 d_2 f_2$. Man hätte ebenso auch z. B. A_1 und S_1 als erste und dritte Ecke ansehen können, dann hätte man d_2 und f_2 als die Linien zu betrachten, auf denen die conformen Punktreihen sich befinden, und der Durchschnitt von d_1 und d wäre das Projectionscentrum; man überzeugt sich dann, daß auch die Strahlbüschel, die entstehen, wenn man von A_1 und S_1 nach den vier übrigen Punkten Gerade zieht, conform sind, und so in jedem anderen Falle. Aus dem Bisherigen ergeben sich noch folgende Sätze:

8. Lehrsatz. Wird in einem einfachen Sechsseit $s_1 d s_2 f_1 a_1 e_2$ ein Paar Seiten, s_1 und s_2, die als erste und dritte angesehen werden können, von den vier übrigen conform getheilt, so gilt dies auch von jedem anderen Paare Seiten in demselben einfachen Sechsseit, die als erste und dritte angesehen werden können, also von s_1

8. Lehrsatz. Bilden in einem einfachen Sechseck $S_1 D S_2 F_1 A_1 E_2$ ein Paar Ecken, S_1 und S_2, die als erste und dritte angesehen werden können, durch ihre Verbindungslinien mit den vier übrigen Ecken conforme Strahlbüschel, so gilt dieß auch von jedem anderen Paare Ecken in demselben einfachen Sechseck, die als

und s_2; d und f_1; s_2 und a_1; f_1 und e_2; a_1 und s_1; e_2 und d. Fig. 62.

erste und dritte angesehen werden können, also von S_1 und S_2; D und F_1; S_2 und A_1; F_1 und E_2; A_1 und S_1; E_2 und D. Fig. 63.

Es folgt dies unmittelbar aus Lehrsatz 6 und 7.

Sind nun sechs beliebige Gerade s_1, d, s_2, f_1, a_1, e_2 gegeben, so bestimmen diese ein vollständiges Sechsseit (Erklärung 4), welches 60 einfache Sechsseite enthält; unter diesen 60 einfachen Sechsseiten sind 24, in denen s_1 und s_2 die erste und dritte Seite ist, 24, in denen d und f_1, 24, in denen s_2 und a_1 u. s. w. die erste und dritte Seite sind. Natürlich können inverschiedenen dieser Sechsseite mehrere oder alle der sechs genannten Seitenpaare je als erste und dritte Seite angesehen werden, und in der That sind unter den 60 verschiedenen einfachen Sechsseiten sechs, in denen alle sechs Paare, zwei, in denen drei Paare, neunundvierzig, in denen zwei Paare, drei, in denen ein Paar der in Lehrsatz 8. genannten Seiten als erste und dritte angesehen werden können; z. B. in dem Sechsseit $s_1 d s_2 f_1 a_1 e_2$ kann sowohl s_1 und s_2, als d und f_1, als s_2 und a_1, als f_1 und e_2, als a_1 und s_1, als e_2 und d als erste und dritte Seite angesehen werden; in dem Sechsseit $s_1 d a_1 e_2 f_1 s_2$ aber nur a_1 und s_1, e_2 und d; u. s. w. Zugleich ist unter den sechzig, das vollständige Sechsseit bildenden einfachen Sechsseiten keines, in welchem nicht wenigstens eins der genannten sechs Paare als erste und dritte Seite angesehen werden könnte. Ein Gleiches gilt von dem Sechseck. Man erhält demnach, da, was von einem einfachen Sechsseit gezeigt worden ist, sich eben so von allen übrigen darthun läßt, nach Lehrsatz 8. den

9. **Lehrsatz.** In jedem vollständigen Sechsseit bilden die Durchschnittspunkte je der ersten und dritten Seite mit den vier übrigen conforme Punktreihen, wenn dies mit der ersten und dritten Seite in einem einzigen der 60 einfachen Sechsseite der Fall ist. Fig. 62.

9. **Lehrsatz.** In jedem vollständigen Sechseck bilden die Verbindungslinien je der ersten und dritten Ecke mit den vier übrigen conforme Strahlbüschel, wenn dies mit der ersten und dritten Ecke in einem einzigen der 60 einfachen Sechsecke der Fall ist. Fig. 63.

Es ist bisher immer nur von der ersten und dritten Seite die Rede gewesen, allein man bemerkt leicht, daß dies auch von jedem Paare anderer gilt. In dem einfachen Sechsseit $s_1 d s_2 a_1 f_1 e_2$, in welchem sich s_1 und s_2 als erste und dritte Seite darstellen, kann auch s_1 und f_1, also zwei Gerade, die in dem ursprünglich angenommenen Sechsseit $s_1 d s_2 f_1 a_1 e_2$ (Fig. 62.) die erste und vierte waren, als erste und dritte angenommen werden; es gilt also nach Lehrsatz 8. dasselbe

Gesetz auch von s_1 und f_1, nämlich, daß sie von den vier übrigen conform getheilt werden. In dem einfachen Sechsseit $s_1 s_2 d f_1 a_1 e_1$, in welchem s_1 und a_1 die erste und dritte Seite sind, können auch s_1 und d als solche angenommen werden; es gilt also unser Satz auch für dieses Paar u. s. w. Gleiches findet sich bei Sechsecken. Man erhält also den allgemeinen Satz:

10. Lehrsatz. In jedem vollständigen Sechsseit, in welchem zwei Seiten von den vier übrigen conform getheilt werden, wird auch jedes andere Paar von den vier übrigen conform getheilt.

10. Lehrsatz. In jedem vollständigen Sechseck, in welchem die Verbindungslinien von zwei Ecken mit den vier übrigen conforme Strahlbüschel bilden, findet ein Gleiches mit den Strahlbüscheln, die jedes andere Paar Ecken zu Scheiteln haben, statt.

Eingehender werden die hier sich darstellenden Verhältnisse in Kap. III. behandelt werden. Es mögen hier nur noch besseren Verständnisses wegen die sechzig verschiedenen Sechsseite und Sechsecke aufgeführt werden, die sich aus sechs Elementen bilden lassen, und es mag dabei nochmals erinnert werden, daß z. B. $s_1 d s_2 f_1 a_1 e_2$ dasjenige einfache Sechsseit bezeichnet, welches entsteht, wenn man vom Durchschnittspunkt von s_1 und d auf d bis dahin fortgeht, wo d von s_2 geschnitten wird, dann auf s_2 bis zum Durchschnitt mit der darauf folgenden Linie f_1, dann auf dieser u. s. w. fortgeht. Ebenso bedeutet $S_1 D S_2 F_1 A_1 E_2$ das einfache Sechseck, welches entsteht, wenn man die Verbindungsgerade zwischen S_1 und D, dann zwischen D und S_2 u. s. w. zieht. Man erhält so folgende

einfache Sechsseite:		einfache Sechsecke:	
$s_1 d s_2 f_1 a_1 e_2$.	$s_1 d f_1 s_2 a_1 e_2$.	$S_1 D S_2 F_1 A_1 E_2$.	$S_1 D F_1 S_2 A_1 E_2$.
$s_1 d s_2 f_1 e_2 a_1$.	$s_1 d f_1 s_2 e_2 a_1$.	$S_1 D S_2 F_1 E_2 A_1$.	$S_1 D F_1 S_2 E_2 A_1$.
$s_1 d s_2 a_1 f_1 e_2$.	$s_1 d f_1 a_1 s_2 e_2$.	$S_1 D S_2 A_1 F_1 E_2$.	$S_1 D F_1 A_1 S_2 E_2$.
$s_1 d s_2 a_1 e_2 f_1$.	$s_1 d f_1 a_1 e_2 s_2$.	$S_1 D S_2 A_1 E_2 F_1$.	$S_1 D F_1 A_1 E_2 S_2$.
$s_1 d s_2 e_2 f_1 a_1$.	$s_1 d f_1 e_2 s_2 a_1$.	$S_1 D S_2 E_2 F_1 A_1$.	$S_1 D F_1 E_2 S_2 A_1$.
$s_1 d s_2 e_2 a_1 f_1$.	$s_1 d f_1 e_2 a_1 s_2$.	$S_1 D S_2 E_2 A_1 F_1$.	$S_1 D F_1 E_2 A_1 S_2$.
$s_1 d a_1 s_2 f_1 e_2$.	$s_1 d e_2 s_2 f_1 a_1$.	$S_1 D A_1 S_2 F_1 E_2$.	$S_1 D E_2 S_2 F_1 A_1$.
$s_1 d a_1 s_2 e_2 f_1$.	$s_1 d e_2 s_2 a_1 f_1$.	$S_1 D A_1 S_2 E_2 F_1$.	$S_1 D E_2 S_2 A_1 F_1$.
$s_1 d a_1 f_1 s_2 e_2$.	$s_1 d e_2 f_1 s_2 a_1$.	$S_1 D A_1 F_1 S_2 E_2$.	$S_1 D E_2 F_1 S_2 A_1$.
$s_1 d a_1 f_1 e_2 s_2$.	$s_1 d e_2 f_1 a_1 s_2$.	$S_1 D A_1 F_1 E_2 S_2$.	$S_1 D E_2 F_1 A_1 S_2$.
$s_1 d a_1 e_2 s_2 f_1$.	$s_1 d e_2 a_1 s_2 f_1$.	$S_1 D A_1 E_2 S_2 F_1$.	$S_1 D E_2 A_1 S_2 F_1$.
$s_1 d a_1 e_2 f_1 s_2$.	$s_1 d e_2 a_1 f_1 s_2$.	$S_1 D A_1 E_2 F_1 S_2$.	$S_1 D E_2 A_1 F_1 S_2$.

einfache Sechsseite:		einfache Sechsecke:	
$s_1s_2df_1a_1e_2$.	$s_1s_2f_1da_1e_2$.	$S_1S_2DF_1A_1E_2$.	$S_1S_2F_1DA_1E_2$.
$s_1s_2df_1e_2a_1$.	$s_1s_2f_1de_2a_1$.	$S_1S_2DF_1E_2A_1$.	$S_1S_2F_1DE_2A_1$.
$s_1s_2da_1f_1e_2$.	$s_1s_2f_1a_1de_2$.	$S_1S_2DA_1F_1E_2$.	$S_1S_2F_1A_1DE_2$.
$s_1s_2da_1e_2f_1$.	$s_1s_2f_1e_2da_1$.	$S_1S_2DA_1E_2F_1$.	$S_1S_2F_1E_2DA_1$.
$s_1s_2de_2f_1a_1$.		$S_1S_2DE_2F_1A_1$.	
$s_1s_2de_2a_1f_1$.		$S_1S_2DE_2A_1F_1$.	
$s_1s_2a_1df_1e_2$.	$s_1s_2e_2df_1a_1$.	$S_1S_2A_1DF_1E_2$.	$S_1S_2E_2DF_1A_1$.
$s_1s_2a_1de_2f_1$.	$s_1s_2e_2da_1f_1$.	$S_1S_2A_1DE_2F_1$.	$S_1S_2E_2DA_1F_1$.
$s_1s_2a_1f_1de_2$.	$s_1s_2e_2f_1da_1$.	$S_1S_2A_1F_1DE_2$.	$S_1S_2E_2F_1DA_1$.
$s_1s_2a_1e_2df_1$.	$s_1s_2e_2a_1df_1$.	$S_1S_2A_1E_2DF_1$.	$S_1S_2E_2A_1DF_1$.
$s_1f_1ds_2a_1e_2$.	$s_1f_1s_2da_1e_1$.	$S_1F_1DS_2A_1E_2$.	$S_1F_1S_2DA_1E_2$.
$s_1f_1ds_2e_2a_1$.	$s_1f_1s_2de_2a_1$.	$S_1F_1DS_2E_2A_1$.	$S_1F_1S_2DE_2A_1$.
$s_1f_1da_1s_2e_2$.	$s_1f_1s_2a_1de_2$.	$S_1F_1DA_1S_2E_2$.	$S_1F_1S_2A_1DE_2$.
$s_1f_1de_2s_2a_1$.	$s_1f_1s_2e_2da_1$.	$S_1F_1DE_2S_2A_1$.	$S_1F_1S_2E_2DA_1$.
$s_1f_1a_1ds_2e_2$.	$s_1f_1e_2ds_2a_1$.	$S_1F_1A_1DS_2E_2$.	$S_1F_1E_2DS_2A_1$.
$s_1f_1a_1s_2de_2$.	$s_1f_1e_2s_2da_1$.	$S_1F_1A_1S_2DE_2$.	$S_1F_1E_2S_2DA_1$.
$s_1a_1ds_2f_1e_2$.	$s_1a_1s_2df_1e_2$.	$S_1A_1DS_2F_1E_2$.	$S_1A_1S_2DF_1E_2$.
$s_1a_1df_1s_2e_2$.	$s_1a_1s_2f_1de_2$.	$S_1A_1DF_1S_2E_2$.	$S_1A_1S_2F_1DE_2$.
$s_1a_1f_1ds_2e_2$.		$S_1A_1F_1DS_2E_2$.	
$s_1a_1f_1s_2de_2$.		$S_1A_1F_1S_2DE_2$.	

Kap. II.

Gebilde zweiter Stufe.

§ 6.

Das ebene System.

Wie wir im ersten Kapitel § 1. den einfachsten Fall der Projection zu Grunde legten, nämlich den, eine Gerade auf eine andere zu projiciren, und die sich hiebei ergebenden Gesetze entwickelten, so haben wir uns jetzt, vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortschreitend, mit der Projection einer Figur auf eine andere zu beschäftigen, und die dabei obwaltenden Gesetze zu erforschen.

Es wurde bereits in § 1. gezeigt, daß es nothwendig sei, um den Begriff des Projicirens einer Geraden auf eine andere klar und präcis

zu fassen, sich die Gerade als Punktreihe zu denken. Etwas Aehnliches findet sich auch hier, indem man, um sich nicht im Unbestimmten und Vagen zu verlieren, zunächst festsetzen muß, was es heißt, eine Figur auf eine andere zu projiciren.

Zunächst mag daran erinnert werden, daß wir es, wie bereits im § 1 bemerkt wurde, nicht mit materiellen Figuren hier zu thun haben, daß also Undurchsichtigkeit u. s. w. hier außer Acht bleiben, daß wir uns vielmehr mit rein mathematischen Gebilden beschäftigen. Doch auch dann bedarf es noch einer genaueren Feststellung dessen, was unter Projection der einen Figur auf eine andere zu verstehen sein soll. Es seien z. B. Fig. 64. zwei Fünfecke ACBDE und A′C′B′D′E′ gegeben, und zwar von der Beschaffenheit und in solcher Lage, daß die Geraden (A−A′), (B−B′), (C−C′), (D−D′), (E−E′) sich in einem und demselben Punkte S schneiden, so würde man auf den ersten Anblick geneigt sein, zu sagen, das eine sei die Projection des andern. Eine nähere Betrachtung indessen zeigt, daß, so gefaßt, der Begriff der Projection ein sehr unbestimmter ist. Denn es lassen sich dann unzählig viele und beliebige Fünfecke, z. B. A″B″C″D″E″ zeichnen, die mit ABCDE oder mit A′B′C′D′E′ in Projection stehen. Zugleich ist noch ein anderer und schwerer in das Gewicht fallender Umstand vorhanden, der uns hindert, bei dieser Auffassung von: Projection stehen zu bleiben. Schon durch ein gewöhnliches Fünfeck sind nämlich nicht bloß die fünf, seine Eckpunkte bildenden Punkte gesetzt, sondern es sind, wenn es gezeichnet vorliegt, zugleich eine Menge anderer Punkte bestimmt, z. B. die Durchschnittspunkte jeder Seite mit jeder der vier übrigen, also z. B. die Punkte F, und F′ u. s. w., ebenso die Diagonalen, z. B. AD, A′D′; CE, C′E′ und ihre Durchschnittspunkte, z. B. G, G′; ferner die Durchschnittspunkte dieser Diagonalen mit den Seiten u. s. w. Daraus nun, daß die Geraden (A−A′), (B−B′), (C−C′), (D−D′), (E−E′) sich in einem und demselben Punkte schneiden, folgt nun keineswegs, daß auch die Verbindungsgeraden der übrigen Punkte, also die Geraden (F−F′), (G−G′) u. s. w. durch denselben Punkt gehen. Es würde dann also die Projection eine, so zu sagen, rein äußerliche sein, indem bloß die fünf, den Umfang bestimmenden Punkte in Projection ständen. Einmal diese Rücksicht, sodann auch die allgemeinere Auffassung von Viereck und Sechseck, (s. § 3. Erklärung 15., § 5. Erklärung 3.), auf die wir durch das Vorige naturgemäß geführt wurden, bestimmt uns, diese Punkte mit als zum Wesen der Figur gehörig anzusehen, und zu verlangen, daß also die Durchschnittspunkte A, C, F, H, welche die Geraden (E−A), (C−B), (D−B), (E−B), (D−E) mit der Geraden (A−C) bilden, mit den Punkten A′, C′, F′, H′, in denen die Geraden (E′−A′), (C′−B′), (D′−B′), (E′−B′), (D′−E′) die Gerade (A′−C′) schneiden, in Projection stehn, und daß dies bei jedem Paar entsprechender Seiten (B−C) und (B′−C′), (B−D) und (B′−D′), u. s. w., so wie auch für alle Diagonalenpaare, (A−D) und (A′−D′), (C−E) und (C′−E′) etc.,

gelte. Mit einem Worte, wir sehen jede Gerade in der Figur als Punktreihe an und verlangen, als zum Wesen der Projection gehörig, daß alle Punkte, welche dieselbe geometrische Bedeutung in den Figuren ABCDE und A'B'C'D'E' haben, in Projection stehen. Nennen wir z. B. (A−C) und (A'−C') die erste, (B−C) und (B'−C') die zweite, (B−D) und (B'−D') die dritte Seite u. s. w. der Fünfecke, so muß der Durchschnittspunkt F der ersten Seite und der zweiten mit dem Punkt F', der dieselbe geometrische Bedeutung an der zweiten Figur hat, in Projection stehen, ebenso der Durchschnittspunkt K der ersten Seite und der Verbindungslinie der dritten und fünften Ecke (B−E) mit dem Durchschnittspunkt K' der ersten Seite mit (B'−E') an der zweiten Figur u. s. w. Ganz dasselbe muß also auch für alle übrigen Seiten und für alle Diagonalen gelten. Damit ist zugleich noch ein Umstand verbunden, der uns in unserer Auffassung von Projection noch mehr bestärkt. Stehen nämlich zwei Fünfecke ABCDE, A'B'C'D'E' auf die angegebene Weise in Projection, also so, daß die Verbindungsgeraden jeder zwei Punkte, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, also (A−A'), (H−H'), (G−G') etc. sich in einem und demselben Punkte S schneiden, Fig. 65, und betrachten wir irgend ein Paar Dreiecke z. B. AED und A'E'D', von denen sich also (A−A'), (E−E'), (D−D') in S schneiden, so schneiden sich nach § 3. Lehrsatz 13. die Geraden (A−D) und (A'−D'), (A−E) und (A'−E'), (D−E) und (D'−E') auf einer und derselben Geraden s. Ebenso müssen in den beiden Dreiecken AGE und A'G'E' nach demselben Lehrsatz die Geraden (A−E) und (A'−E'), (A−G) und (A'−G'), (E−G) und (E'−G') auf einer und derselben Geraden liegen. Da aber (A−G) dieselbe Gerade ist, wie (A−D), so müssen sich also (E−G) und (E'−G') oder (B−E) und (B'−E') auf derselben Geraden s schneiden, auf der sich (A−E) und (A'−E'), (D−E) und (D'−E') treffen. Da ferner in den Dreiecken AEB und A'E'B' sich (A−E) und (A'−E'), (B−E) und (B'−E') auf s schneiden, so muß dies auch mit (A−B) und (A'−B') der Fall sein, nach § 3. Lehrsatz 13., und ebenso müssen sich auch die Seiten (B−D) und (B'−D') der Dreiecke BDE und B'D'E' auf s schneiden, desgleichen die Seiten (G−H) und (G'−H') der Dreiecke BGH und B'G'H', da sich (B−H) oder (A−B) und (B'−H') oder (A'−B') und (B−G) und (B'−G') auf s treffen; daraus folgt, daß auch der Durchschnittspunkt der Seiten (B−C) und (B'−C') der Dreiecke BCH und B'C'H' und der Durchschnittspunkt der Seiten (C−D) und (C'−D') der Dreiecke CDH und C'D'H' auf s liegt, u. s. w. Kurz, es läßt sich auf diese Weise zeigen, daß jede zwei Gerade, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, sich auf einer und derselben Geraden s schneiden. Man muß daher, wie man jede Gerade einer Figur als Punktreihe anzusehen genöthigt war, jede Ecke als Scheitel eines Strahlbüschels betrachten, z. B. A als Scheitel des von den Geraden (A−B), (A−D), (A−E) u. s. w., G als Scheitel des von den Strahlen (G−A), (G−B), (G−C) etc. gebildeten Strahlbüschels u. s. w. Wir können also sagen:

1. **Erklärung.** Zwei geradlinige ebene Figuren heißen dann auf einander projicirt, wenn die Verbindungsgeraden von je zwei Punkten, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, sich in einem und demselben Punkte S schneiden, und die Durchschnittspunkte von je zwei Geraden, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, auf einer und derselben Geraden s liegen.

Man sieht aus dem Bisherigen, daß jetzt der Begriff der ebenen Figur ein ganz anderer wird, als er in der Elementar-Geometrie gefaßt wird. Denn es kommt hier nicht eine endliche Anzahl begrenzter Gerader, sondern eine unendliche Anzahl unbegrenzter Gerader in Betracht. Denn man hätte, von dem ursprünglich gegebenen Fünfeck ausgehend, noch beliebig viele andere Linien und Punkte construiren können, hätte z. B. den Durchschnitt J von (B—C) mit (A—E) aufsuchen und ihn mit H, oder G oder C durch eine neue Gerade verbinden können, die Gerade (J—G) z. B. hätte wieder irgend eine der bisherigen Geraden z. B. (B—E) in M getroffen, und man hätte nun jeden der bisher gefundenen Punkte wieder mit M verbinden können, wodurch wieder eine Anzahl neuer Linien entstanden wäre. Man hätte ferner den Durchschnitt jeder derselben mit jeder der bisherigen aufsuchen und so wieder Stoff zum Ziehen neuer Linien erhalten können u. s. w. Jedes Paar auf gleiche Weise aus den Figuren ABCDE und A'B'C'D'E' erhaltener Punkte und Gerader müßten in Projection stehen, indem die Verbindungslinien jedes Paares solcher Punkte durch S gehen, der Durchschnittspunkt jedes Paares solcher Geraden auf s liegen muß. Man wird aus dem Vorigen gesehen haben, daß es gar nicht nöthig ist, von einem Fünfeck, Sechseck u. s. w. auszugehen, um die in Betracht kommenden Punkte und Geraden zu erhalten, daß man vielmehr auf einfachere Weise ganz dasselbe hätte erreichen können. Hat man nämlich zwei Punktreihen, deren jede, außer dem gemeinsamen Durchschnittspunkt wenigstens noch zwei Punkte enthält, z. B. die Punktreihen s,ABCD und 𝓈,𝒜ℬ𝒞𝒟, Fig. 66., und verbindet man jeden Punkt der einen Reihe mit jedem der anderen (es sind, um die Figur nicht zu sehr zu überladen, nur einige dieser Geraden gezogen), so erhält man zugleich eine Menge neuer Punkte, indem jede dieser Geraden sowohl jede andere, als auch die ursprünglichen Geraden s und 𝓈 schneidet; von diesen Punkten verbinde man wieder jeden mit jedem, sowohl der ursprünglich gegebenen als der neu gefundenen, und fahre so fort, so erhält man eine unendliche Anzahl von Punkten sowohl als Geraden, mithin auch eine unendliche Anzahl von Vielecken, Vielseiten (im Sinne von § 3. Erklärung 15. und § 5. Erklärung 3.), und ebenso einfache Vielecke. Es entsteht z. B. ein Fünfeck aefgh, dessen Ecken bezüglich sind die Punkte (𝒜—A)·(𝒟—D), (𝒟—D)·(𝒜—B), (𝒜—B)·(𝒞—C), (𝒞—C)·(ℬ—B), (ℬ—B)·(𝒜—A)*) und umgekehrt hätte man von

*) Unter (M—N)·(P—Q) ist nach § 1. Erklärung 2. der Durchschnittspunkt

diesem Fünfeck ausgehend, wie in Fig. 65., wieder alle übrigen Geraden und Punkte erhalten können. Wir haben also, von zwei Punktreihen ausgehend, ein solches Netz construirt, wie wir es dem Begriff der Projection nach brauchen (s. Erklärung 1.). Indem man ferner jeden Punkt mit jedem anderen verbindet, entstehen eine unendliche Menge Punktreihen, z. B. auf a, auf h, auf u, auf v u. s. w. und umgekehrt hätte man, indem man mit irgend einem beliebigen Paare derselben ebenso verfährt, wie mit s,ABCD und $\mathfrak{s}$,$\mathfrak{ABCD}$, auf die letztgenannten zurückkommen können, so daß es also ganz gleichgültig ist, ob man die Construction des Netzes mit s,ABCD und $\mathfrak{s}$,$\mathfrak{ABCD}$ oder mit einem anderen Paare beginnt. Zugleich sind aber auch eine unendliche Menge Strahlbüschel entstanden, z. B. S,abcd und $\mathfrak{S}$,$\mathfrak{abcd}$, und augenscheinlich hätte man auch mit jedem beliebigen Paar Strahlbüschel, z. B. eben mit S,abcd und $\mathfrak{S}$,$\mathfrak{abcd}$ die Construction des Netzes beginnen können, indem man den Durchschnittspunkt jedes Strahls des einen Büschels mit jedem Strahl des anderen Büschels gesucht, jeden solchen Durchschnittspunkt mit jedem anderen verbunden hätte, von den Durchschnittspunkten der so erhaltenen Geraden unter sich sowohl als mit den Strahlen der ursprünglich gegebenen Strahlbüschel wieder nach jedem anderen Punkte Gerade gezogen hätte, u. s. w. So hätte z. B. hier der Durchschnitt ($a \cdot \mathfrak{a}$) den Punkt A, der Durchschnitt ($d \cdot \mathfrak{d}$) den Punkt E oder $\mathfrak{E}$, der Durchschnitt ($\mathfrak{a} \cdot b$) den Punkt F geliefert, die Verbindungsgerade ($a \cdot \mathfrak{a}$) — ($d \cdot \mathfrak{d}$)*) hätte die Gerade s, die Verbindungsgerade ($\mathfrak{a} \cdot b$) — ($d \cdot \mathfrak{d}$) hätte die Gerade $\mathfrak{s}$ geliefert. Der Durchschnitt ($a \cdot \mathfrak{s}$) hätte $\mathfrak{A}$ gegeben, der Durchschnitt von ($\mathfrak{A}$ — $\mathfrak{S}$) mit s den Punkt B, der Durchschnittspunkt ($c \cdot \mathfrak{c}$) hätte den Punkt G bestimmt, der Durchschnitt von ($\mathfrak{A}$ — G) mit s den Punkt C, der Durchschnittspunkt ($b \cdot \mathfrak{b}$) hätte H bestimmt, der Durchschnitt von (C — H) mit $\mathfrak{s}$ den Punkt $\mathfrak{C}$, endlich der Durchschnitt von (S — $\mathfrak{S}$) mit s und $\mathfrak{s}$ die Punkte D, $\mathfrak{D}$. Man wäre also von den Strahlbüscheln S,abcd und $\mathfrak{S}$,$\mathfrak{abcd}$ ausgehend, wieder zu den Punktreihen s,ABCD und $\mathfrak{s}$,$\mathfrak{ABCD}$ gekommen. Es ist also schon hieraus klar, daß man auch, von Strahlbüscheln ausgehend, ein beliebiges Vieleck und Vielseit erhalten kann. Direkt überzeugt man sich sogleich davon, indem offenbar ein Fünfeck AEFGH entsteht, dessen (nicht alle gezogene) Seiten die Geraden ($\mathfrak{a} \cdot a$) — ($\mathfrak{d} \cdot d$), ($\mathfrak{d} \cdot d$) — ($\mathfrak{a} \cdot b$), ($\mathfrak{a} \cdot b$) — ($\mathfrak{c} \cdot c$), ($\mathfrak{c} \cdot c$) — ($\mathfrak{b} \cdot b$), ($\mathfrak{b} \cdot b$) — ($\mathfrak{a} \cdot a$) bilden. Solche, aus einer unendlichen Menge von Punktreihen und Strahlbüscheln bestehende Figuren, wie Fig. 66. bilden die Grundlage der „Projection einer Figur auf eine andere".

2. Erklärung. Das Netz aller, unendlich vielen,

---

zweier Geraden zu verstehen, von denen die Richtung der einen durch die Punkte M, N, die der anderen durch die Punkte P, Q bestimmt ist.

*) Unter ($m \cdot n$) — ($p \cdot q$) ist die Verbindungsgerade zweier Punkte zu verstehen, von denen der Ort des einen durch den Durchschnitt der Geraden m, n, der des anderen durch den Durchschnitt der Geraden p, q bestimmt ist.

Punktreihen und Strahlbüschel, welches durch zwei, in derselben Ebene liegende, gleichartige Gebilde der ersten Stufe, also entweder durch zwei Punktreihen s,ABCD, 𝔰,𝔄𝔅ℭ𝔇, oder S,abcd, 𝔖,𝔞𝔟𝔠𝔡 erzeugt wird, heißt ein: „**Gebilde zweiter Stufe**“ oder ein „**ebenes System**“. Fig. 66.

3. Lehrsatz. Jedes von Punktreihen s,ABCD; 𝔰,𝔄𝔅ℭ𝔇 erzeugte ebene System kann auch als von Strahlbüscheln S,abcd; 𝔖,𝔞𝔟𝔠𝔡 erzeugt gedacht werden. Fig. 66.

3. Lehrsatz. Jedes von Strahlbüscheln S,abcd, 𝔖,𝔞𝔟𝔠𝔡 erzeugte ebene System kann auch als von Punktreihen s,ABCD, 𝔰,𝔄𝔅ℭ𝔇 erzeugt gedacht werden. Fig. 66.

Diese Erklärung sowohl als der Lehrsatz ergeben sich aus dem Vorigen unmittelbar. Zugleich leuchtet sogleich die Richtigkeit des folgenden Satzes ein:

4. Lehrsatz. Zur Erzeugung eines ebenen Systems sind mindestens nöthig, aber auch vollkommen hinreichend zwei Punktreihen s,AB; 𝔰,𝔄𝔅, deren jede außer ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte E, 𝔈 zwei Punkte A, B; 𝔄, 𝔅 enthält, oder:

Zur Erzeugung eines ebenen Systems ist mindestens nöthig, aber auch vollkommen hinreichend ein vollständiges Viereck AB𝔄𝔅. Fig. 66.

4. Lehrsatz. Zur Erzeugung eines ebenen Systems sind mindestens nöthig, aber auch vollkommen hinreichend zwei Strahlbüschel S,ab; 𝔖,𝔞𝔟, deren jeder außer dem gemeinschaftlichen Verbindungsstrahl der Scheitel e, 𝔢, zwei Strahlen a, b; 𝔞, 𝔟 enthält, oder:

Zur Erzeugung eines ebenen Systems ist mindestens nöthig, aber auch vollkommen hinreichend ein vollständiges Vierseit ab𝔞𝔟. Fig. 66.

Denn drei Punkte, auch wenn sie nicht in derselben Geraden liegen, geben nur zum Ziehen von drei Geraden Anlaß, die sich eben nur in den gegebenen Punkten, und sonst nirgends schneiden; desgleichen erzeugen drei Gerade, auch wenn sie sich nicht in einem und demselben Punkte schneiden, nur drei Durchschnittspunkte und keinen mehr. Vier Punkte aber, oder ein vollständiges Viereck Fig. 43. geben zum Ziehen von sechs Geraden Veranlassung, durch die man außer den gegebenen noch drei neue Punkte erhält, deren jeder mit jedem anderen sowohl der ursprünglich gegebenen, als der neu gefundenen durch eine Gerade verbunden werden kann; setzt man dies fort, so erhält man ein ebenes System. Ebenso geben vier Gerade, oder ein vollständiges Vierseit Fig. 44. sechs Punkte, und, wenn man jeden mit jedem anderen sowohl der durch die ursprünglich gegebenen Linien bestimmten Punkte, als der neu gefundenen durch eine Gerade verbindet, drei neue Gerade, u. s. w.

das Ziehen von Linien fortsetzend, erhält man auch hier ein ebenes System.

Es mögen endlich noch ein Paar Bemerkungen hier Platz finden, die sich unmittelbar aus dem Vorigen ergeben und im Folgenden öfter angewendet werden sollen. Da bei der Construction eines ebenen Systems das Bestimmen von Geraden und Punkten bis in das Unendliche fortgeht, so daß sich die Ebene mit einem immer dichter werdenden Netz von Geraden und Punkten überzieht, so sieht man, daß man durch hinlängliche Fortsetzung des Ziehens von Geraden, wenn in der Ebene des Systems irgend ein beliebiger Punkt P oder eine beliebige Gerade p gegeben ist, jedenfalls früher oder später einmal ein Paar Gerade erhalten muß, die sich in P schneiden, und daß man ebenso jedenfalls früher oder später einmal ein Paar Punkte erhalten muß, die auf der Geraden p liegen. Es läßt sich also sowohl P als p als zu dem gegebenen Systeme gehörend ansehn. Wie früh oder spät man zu P oder p gelangt, hängt von der Lage dieser Gebilde P oder p selbst und von der Lage der das System erzeugenden Gebilde ab. Man hat also den

5. Lehrsatz. Jede in der Ebene eines ebenen Systems liegende Gerade p läßt sich als zu diesem System gehörend ansehn.

5. Lehrsatz. Jeder in der Ebene eines ebenen Systems liegende Punkt P läßt sich als zu diesem System gehörend ansehn.

Hieraus folgt unmittelbar, wenn man sich in derselben Ebene mit dem gegebenen noch ein zweites System construirt denkt:

6. Lehrsatz. Liegen zwei ebene Systeme in derselben Ebene, so kann jede Gerade p dieser Ebene als sowohl zu dem einen, als zu dem anderen Systeme gehörend angesehen werden.

6. Lehrsatz. Liegen zwei ebene Systeme in derselben Ebene, so kann jeder Punkt P dieser Ebene als sowohl zu dem einen, als zu dem anderen dieser Systeme gehörend angesehen werden.

Nachdem so die Fundamentalbegriffe des Projicirens einer Figur auf eine andere festgestellt sind, gehen wir, wie im § 1., an die praktische Ausführung unserer Aufgabe, wiederum vom Einfachsten anfangend. Wir fangen demnach mit der Projection eines Dreiecks auf ein anderes an, da das Dreieck die einfachste ebene Figur ist, obschon durch dasselbe kein System erzeugt werden kann, wie oben gezeigt wurde.

7. Aufgabe. Gegeben zwei beliebige Dreiecke ABC, A'B'C'; dieselben so zu legen, daß (A—A'), (B—B'), (C—C') sich in einem und demselben Punkte schneiden. Fig. 67.

7. Aufgabe. Gegeben zwei beliebige Dreiseite abc, a'b'c'; dieselben so zu legen, daß (a·a'), (b·b'), (c·c') auf einer und derselben Geraden liegen. Fig. 68a. 68b.

Auflösung der Aufgabe links. Man construire durch das eine Dreieck A′B′C′ einen ganz beliebigen, drei Strahlen enthaltenden Strahlbüschel S,abc, und construire, wenn b innerhalb des nach § 1. Erklärung 22. spitzen Winkels ac liegt, über BC einen Kreisbogen, der den Winkel bc als Peripheriewinkel enthält, dann mache man auf derselben Seite von BC, auf welcher der Mittelpunkt des Kreises liegt, Winkel ACD = ab, und construire nun über BC aus den Seiten BA, CA das Dreieck ABC fertig, entweder auf der einen oder auf der anderen Seite von BC, und ziehe AD, die den Kreisumfang zum zweiten Male in S_1, (wenn A und D auf derselben Seite von BC liegen) oder in S_2 (wenn A und D auf verschiedenen Seiten von BC liegen) schneidet, und verbinde diesen so erhaltenen Punkt S_1 oder S_2 mit A, B, C, so ist für S_1, der Winkel $BS_1C = bc$; $BS_1A = BS_1D = BCD = ba$, also Strahlbüschel $S_1, a_1 b_1 c_1$ = Strahlbüschel S,abc, für S_2 ist Winkel $BS_2C = 180^0 - bc$, $BS_2A = 180^0 - ab$; es ist also der Nebenwinkel von $BS_2C = bc$, der von $BS_2A = ab$, also auch Strahlbüschel $S_2, a_2 b_2 c_2$ = S,abc. Man kann daher in beiden Fällen das Dreieck ABC in den Strahlbüschel S,abc legen, indem man von S aus entweder auf a, b, c nach derselben Seite hin, und zwar nach der, auf welcher ab und bc spitze Winkel sind, Stücke bezüglich gleich S_1A, S_1B, S_1C abträgt, und die Endpunkte dieser Strecken verbindet, oder, indem man von S aus auf a, b, c und zwar auf a und c nach der Seite hin, wo Winkel ab und bc zugleich spitz sind, S_2A, S_2C, auf b aber nach der entgegengesetzten Seite S_2B trägt, und die erhaltenen Punkte verbindet. Es können bei der genannten Construction folgende Fälle statt finden, sowohl wenn A und D auf derselben, als wenn sie auf verschiedenen Seiten von BC liegen: Wenn man denjenigen Theil der Strahlen a, b, c, der sich auf der Seite von S befindet, wo die spitzen Winkel ab, bc sind, mit „Strahl a, b, c" schlechtweg bezeichnet, den auf der anderen Seite von S liegenden Theil aber als: „Verlängerung des Strahls a, b, c", so findet folgendes statt. Liegt 1) S auf dem Bogen DC, so ist $\angle CSB = bc$, $\angle DSB = ab$; liegt zugleich A auf derselben Seite von S wie D, so fällt, wenn man das $\triangle ABC$ in den Strahlbüschel S,abc einträgt, A auf a; B auf b; C auf c; liegt aber A auf der anderen Seite von S als D, so fällt beim Eintragen, B auf b; C auf c; A in die Verlängerung von a. Liegt 2) S auf dem Bogen DB, so ist $\angle CSB = bc$, $\angle DSB = 180^0 - ab$; befinden sich nun A und D auf derselben Seite von S, so fällt beim Eintragen des Dreiecks ABC in den Büschel S,abc, B auf b; C auf c; A auf die Verlängerung von a; befindet sich A auf der anderen Seite von S, als D, so fällt A auf a, B auf b, C auf c. Liegt 3) S auf dem Bogen BC, so ist $\angle CSB = 180^0 - bc$, $\angle DSB = ab$; befindet sich A auf derselben Seite von S wie D, so fällt beim Eintragen des Dreiecks ABC in den Büschel S,abc A auf a; B auf b; C in die Verlängerung von c; liegt A auf der anderen Seite von S als

D, so fällt A nach a; C nach c; B in die Verlängerung von b. Und dies sind, wie bemerkt wurde, die einzigen möglichen Fälle, von denen stets einer vorkommen muß, mag man das Dreieck ABC auf der einen oder der anderen Seite von BC construirt haben. Nie kann die Auflösung unmöglich werden, so lange nicht ein Strahlbüschel angenommen wird, dessen Scheitel S in unendlicher Entfernung liegt. Es ist also für einen beliebigen Strahlbüschel S,abc, dessen Scheitel nicht im Unendlichen liegt, möglich, irgend zwei Dreiecke ABC, A′B′C′ auf einander zu projiciren und nach § 3. Lehrsatz 13. liegen dann auch die Durchschnittspunkte $(A-B)\cdot(A'-B')$, $(A-C)\cdot(A'-C')$, $(B-C)\cdot(B'-C')$ auf einer und derselben Geraden s. — Gehen wir nun über zur Auflösung der Aufgabe rechts, ein Paar Dreiseite abc, a′b′c′ für eine Punktreihe zu projiciren. Eine Auflösung ergiebt sich sogleich. Man ziehe eine Gerade s parallel einer Seite, z. B. a′ des Dreiseits a′b′c′, welche die Seiten b′, c′ bezüglich in $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{B}'$ trifft, Fig. 68 a. mache dann $B\mathfrak{S} = \mathfrak{B}'\mathfrak{S}'$ und ziehe durch $\mathfrak{S}$ eine Gerade parallel zu c, welche die Seite b in $\mathfrak{D}$ trifft, dann zieht man durch $\mathfrak{D}$ eine Parallele s zu a, so ist die endliche von den Punkten $(s\cdot b)$, $(s\cdot c)$ begrenzte Strecke $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ der s gleich der von den Punkten $(s\cdot b')$, $(s\cdot c')$, begrenzten Strecke $\mathfrak{B}'\mathfrak{S}'$. Man kann also die Dreiseite in eine solche Lage bringen, daß a und a′ durch den Punkt ∞, b und b′ durch C″, c und c′ durch B″ der Punktreihe s, ∞C″B″ gehn. Die Verbindungsgeraden $(a\cdot b)-(a'\cdot b')$, $(a\cdot c)-(a'\cdot c')$, $(b\cdot c)-(b'\cdot c')$ gehn dann durch einen und denselben Punkt S nach § 3. Lehrsatz 13. Weniger einfach ist die Construction, wenn man die Gerade s nicht parallel mit einer der Seiten des Dreiseits a′b′c′ zieht, sondern so, daß sie von a′ in A geschnitten wird Fig. 68b. Dann construire man über der Strecke BC einen Kreisbogen, der den Winkel bc als Peripheriewinkel enthält, über CA einen Kreisbogen, der den Winkel ac als Peripheriewinkel faßt, verbinde die Mittelpunkte M_1, M_2 dieser beiden Kreise durch eine Gerade und lege durch sie als Durchmesser einen Kreis. Von M_2 (oder M_1 aus; beides führt zu demselben Resultat), ziehe man eine Sehne $M_2Q = \frac{1}{2}AB$, was sowohl nach der einen, als nach der anderen Seite von M_1M_2 geschehen kann, und ziehe durch C eine Gerade, parallel (M_2-Q)*), die den um M_1 beschriebenen Kreis in $\mathfrak{A}$ schneidet, ziehe $B\mathfrak{A}$, $A\mathfrak{B}$, so erhält man ein dem Dreieck ABC congruentes Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{S}$. Dieselbe Construction kann man auch machen, indem man von M_1 aus die Strecke $\frac{1}{2}AB$ als Sehne in den Kreis um M_1, M_2 einträgt, $M_1Q' = \frac{1}{2}AB$ macht, und durch C eine Parallele mit (M_1-Q') zieht. Man sieht leicht, daß wenn man Q′ unter M_1M_2 annimmt, man dieselbe Gerade als Parallele zu (M_1-Q') erhält, die auch parallel (M_2-Q) ist, Q oberhalb M_1M_2 angenommen, und umgekehrt. Daß das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{S}$

*) In der Figur ist die Gerade durch C parallel der von M_2 nach dem oberen Q gehenden Geraden gezogen.

congruent ABC ist, folgt so: Man ziehe die Perpendikel M_1P_1 und M_2P_2 auf $C\mathfrak{A}$, so muß M_1P_1 auch durch Q gehn. Denn da $(C-\mathfrak{A}) \parallel (M_2-Q)$, so muß (M_1-P_1) auch $\perp (M_2-Q)$ stehn; es giebt aber auf (M_2-Q) nur eine durch M_1 gehende Senkrechte, nämlich $(Q-M_1)$, da dann der Winkel M_1QM_2 ein Peripheriewinkel im Halbkreis ist. Bezeichnen wir den Durchschnitt von (M_1-M_2) mit $(C-\mathfrak{A})$ durch $\mathfrak{B}$, so ist nun $\mathfrak{A}P_1 = CP_1$, $\mathfrak{B}P_2 = CP_2$, also $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = CP_1 + P_1\mathfrak{B} = P_1\mathfrak{B} + 2P_2\mathfrak{B} + P_1\mathfrak{B} = 2P_1\mathfrak{B} + 2P_2\mathfrak{B} = 2 . P_1P_2$. Es ist aber $P_1P_2 \# M_2Q$, und M_2Q war gleich $\frac{1}{2}AB$, also ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 2 . \frac{1}{2}AB = AB$. Es ist also, da nach der Construction $\angle \mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = bc$, $\angle \mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A} = ac$ ist, $\triangle \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \cong \triangle ABC$. Man kann also die Dreiseite abc und a'b'c' für die Punktreihe s,ABC projiciren. Die Construction wird aber unmöglich, wenn $\frac{1}{2}AB > M_1M_2$ ist, indem dann die Punkte Q unmöglich sind. Es ist jedoch leicht, dieß zu vermeiden. Man mache nämlich Fig. 69. $A'M' = 2 \cdot AB$, wo AB die von den Punkten $(a \cdot c)$, $(b \cdot c)$ begrenzte Strecke im Dreiseit abc ist, und zugleich $A'M' \perp b'$, ziehe durch M' eine Parallele zu b', welche die c' in N' schneidet. In einem beliebigen Punkte C'', der aber nicht zwischen A' und N', aber doch mit N' auf derselben Seite von A' liegt, ziehe man eine Parallele mit a', welche die b' in U' trifft; bestimme dann auf b' einen solchen Punkt W', daß sich verhält $W'U' : C'U' = 2 \cdot BC : AC$, und ziehe durch einen beliebigen Punkt B'', der mit W' auf derselben Seite von C', aber nicht zwischen W' und C' liegt, durch C'' die Gerade $(B''-C'')$ oder s'', welche die a' in A'' trifft. Man nehme nun die Punktreihe s'',A''B''C'' als die Punktreihe s,ABC Fig. 68b. an, und mache mit ihr die daselbst angegebene Construction, so läßt sich leicht zeigen, daß dann die Construction stets möglich ist. Denn da $A'M' = 2 \cdot AB$ ist, ist auch das Loth von N' auf $b' = 2 . AB$; also das Loth von jedem Punkt C'', der außerhalb der endlichen Strecken A'N' liegt, $> 2 \cdot AB$; mithin jede andre, auf b' nicht senkrechte Gerade C''B'' um so mehr $> 2 \cdot AB$. Zieht man ferner $(W'-C'')$, welche die a' in X trifft, so ist, da $W'U' : C'U' = 2BC : AC$ war, auch $W'C'' : XC'' = 2BC : AC$, also, da $B''C'' > W'C''$; $A''C'' < XC''$ ist, $B''C'' : A''C'' > 2BC : AC$; oder $\frac{B''C''}{A''B''} > 2 \cdot \frac{BC}{AC}$ oder $\frac{B''C''}{A''C''} > 2 \cdot \frac{\sin bc}{\sin ac}$. Es ist also, wenn die in Fig. 68b. angewendete Punktreihe s,ABC ebenso construirt ist, wie s'',A''B''C'', in Fig. 68b. $\frac{BC}{AC} > \frac{2 \cdot \sin bc}{\sin ac}$; oder $\frac{BC}{2 \cdot \sin bc} > \frac{AC}{\sin ac}$; oder $\frac{BC}{2 \cdot \sin bc} > 2 \cdot \frac{AC}{2 \cdot \sin ac}$. Es ist aber offenbar $\frac{BC}{2 \cdot \sin bc}$ der Radius R des durch B, C, $\mathfrak{A}$, $\frac{AC}{2 \cdot \sin ac}$ der Radius r des durch A, C, $\mathfrak{B}$ gehenden Kreises. Also ist dann $R > 2r$, folglich jedenfalls $M_1M_2 > \frac{1}{2}R$; Nun ist aber in Fig. 69. B''C'', also in Fig. 68b. auf der Geraden s, $BC > 2 \cdot AB$, um so mehr also der

Durchmesser des größeren Kreises $2R > 2 \cdot AB$; also $R > AB$, also $\frac{1}{2}R > \frac{1}{2}AB$, und da $M_1M_2 > \frac{1}{2}R$ sein muß, $M_1M_2 > \frac{1}{2}AB$. Also ist die Construction möglich. Man sieht, daß jederzeit die Strecke BC auf s in Fig. 68b. auf diese Weise bestimmt werden kann; es lassen sich also stets zwei Dreiseite abc, a′b′c′ für eine Punktreihe s,ABC projiciren, und nach § 3. Lehrsatz 13. schneiden sich dann (vergl. Fig. 68a.) die Geraden $(a \cdot b) - (a' \cdot b')$, $(a \cdot c) - (a' \cdot c')$, $(b \cdot c) - (b' \cdot c')$ in einem und demselben Punkte S. Man sieht also:

8. Lehrsatz. Zwei Dreiecke ABC und A′B′C′ können jederzeit so gelegt werden, daß sich die Verbindungsgeraden (A–A′), (B–B′), (C–C′) in einem und demselben in endlicher Entfernung liegenden Punkte S schneiden. Fig. 67.

8. Lehrsatz. Zwei Dreiseite abc und a′b′c′ können jederzeit so gelegt werden, daß die Durchschnittspunkte (a·a′), (b·b′), (c·c′) auf einer und derselben in endlicher Entfernung liegenden Geraden s liegen. Fig. 68a. 68b.

Zugleich ergiebt sich aus dem Vorigen der

9. Lehrsatz. Zwei Dreiecke ABC und A′B′C′ können jederzeit so gelegt werden, daß sie für einen beliebigen gegebenen, drei Strahlen enthaltenden Strahlbüschel S,abc in Projection stehn, wenn sich nur dessen Scheitel in endlicher Entfernung befindet. Fig. 67.

9. Lehrsatz. Zwei Dreiseite a″b″c″ und a′b′c′ können **nicht** jederzeit so gelegt werden, daß sie für eine beliebige gegebene, drei Punkte enthaltende Punktreihe s,ABC in Projection stehn, auch wenn sie sich in endlicher Entfernung befindet. Dieß ist unmöglich, wenn $\frac{1}{2}A''B'' > M_1M_2$ wird. Wohl aber läßt sich jederzeit ein dem einen Dreiseit a″b″c″ ähnliches abc finden, für welches dies möglich ist. Fig. 68b. 69.

Der Grund, warum die links berührte Aufgabe stets, die rechts erwähnte nicht immer lösbar ist, liegt offenbar darin, daß wir es bei ersterer mit Strahlen, also Geraden, die nach einer Dimension hin Ausdehnung haben, zu thun haben, während bei der Aufgabe rechts Punkte in Frage kommen, denen nach keiner Dimension Ausdehnung zukommt, die sich nicht, wie die Geraden, verlängern lassen.

Schwieriger als die Projection des Dreiecks und Dreiseits ist die des Vierecks und Vierseits, also nach Lehrsatz 4. und Erklärung 1. des ebenen Systems. Um sie zu lösen, müssen wir die hiebei vorkommenden Gesetze genauer untersuchen.

§ 7.

Collineation.

Es leuchtet aus § 6. Erklärung 1 und 2. und Lehrsatz 4. ein, daß es auf die Anzahl der Ecken und Seiten, sobald dieselbe vier oder mehr beträgt, gar nicht mehr ankommt, denn die Projection des Vierecks, Fünfecks u. s. w., des Vierseits, Fünfseits, u. s. w. fällt zusammen in die Projection des ebenen Systems, oder genauer, die Projection eines ebenen Systems auf ein anderes.

Es seien nun Fig. 70. zwei durch die Punktreihenpaare s,ABCD, $\mathfrak{s}$,$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und s′,A′B′C′D′, $\mathfrak{s}'$,$\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ bestimmte ebene Systeme in Projection auf einander. Die beiden erstgenannten Punktreihen erzeugen das erste, die beiden letztgenannten das zweite System. Oder auch es seien zwei durch die Strahlbüschelpaare S,abcd, $\mathfrak{S}$,$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und S′,a′b′c′d, $\mathfrak{S}'$,$\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ bestimmte ebene Systeme in Projection auf einander. Wenn man will, kann man auch, im Anschluß an den Anfang des § 6. sich denken, die Fünfecke AB$\mathfrak{B}$S$\mathfrak{A}$ und A′B′$\mathfrak{B}'$S′$\mathfrak{A}'$ oder die Fünfseite ab$\mathfrak{b}$s$\mathfrak{a}$ und a′b′$\mathfrak{b}'$s′$\mathfrak{a}'$ sein in Projection auf einander, in dem Sinne, wie dieser Begriff § 6. Erklärung 1. festgestellt worden war. Man wird sich erinnern, daß ihm zu Folge die Verbindungsgeraden jeder zwei Punkte, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, sich in einem und demselben Punkte Σ (in Fig. 65: S) schneiden. Es war aber, bevor die Erklärung 1. ausgesprochen wurde, in § 6. gezeigt worden, daß damit **nothwendig** verbunden ist, daß sich jede zwei Gerade, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben (von denen also die des zweiten Systems ebenso aus den erzeugenden Grundgebilden hervorgebracht worden ist, wie die des ersten) auf einer und derselben Geraden σ (in Fig. 65: s) schneiden. Es müssen also, wenn man die Verbindungsgeraden irgend zweier Punkte von gleicher geometrischer Bedeutung zieht, z. B. ($\mathfrak{C}-\mathfrak{C}'$) (S−S′), ($\mathfrak{S}-\mathfrak{S}'$), oder die Verbindungsgerade der Punkte (c · $\mathfrak{b}$) und (c′ · $\mathfrak{b}'$) u. s. w. dieselben durch Σ gehn; und die Durchschnittspunkte irgend zweier Geraden von derselben geometrischen Bedeutung z. B. ($\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}'$), (s · s′), ($\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s}'$), oder die Durchschnittspunkte der Geraden (C−$\mathfrak{B}$) und (C′−$\mathfrak{B}'$) u. s. w. auf σ liegen. Man erhält daher nach §. 2. Erklärung 5. den

1. **Lehrsatz.** Stehen zwei ebene Systeme in Projection, so sind die **Punktreihen**, die **auf zwei Geraden**, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, von den Durchschnitten mit anderen Geraden, die ebenfalls dieselbe geometrische Bedeutung haben, gebildet werden, conform. Fig. 70.

I. **Lehrsatz.** Stehen zwei ebene Systeme in Projection, so sind die Strahlbüschel, die an zwei Punkten, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, von den Verbindungsgeraden mit anderen Punkten, die ebenfalls dieselbe geometrische Bedeutung haben, gebildet werden, conform. Fig. 70.

Es ist also die Punktreihe, die z. B. auf der Geraden $(\mathcal{S}-\mathfrak{s})$ des ersten Systems durch die Durchschnittspunkte mit den Geraden $(\mathcal{A}-\mathcal{B})$, $(A-\mathcal{B})$, $(A-B)$, $(B-\mathcal{B})$, $(B-\mathcal{D})$ u. s. w. gebildet wird, conform der Punktreihe, die auf der Geraden $(\mathcal{S}'-\mathfrak{s}')$ des zweiten Systems durch die Durchschnittspunkte mit den Geraden $(\mathcal{A}'-\mathcal{B}')$, $(A'-\mathcal{B}')$, $(A'-B')$, $(B'-\mathcal{B}')$, $(B'-\mathcal{D}')$ u. s. w. gebildet wird, die Punktreihe, die auf der Geraden $(\mathcal{A}-B)$ des ersten Systems durch die Durchschnittspunkte mit den Geraden $(\mathcal{A}-\mathcal{B})$, $(A-\mathcal{S})$, $(A-\mathcal{B})$, $(A-B)$, $(S-\mathcal{B})$ u. s. w. gebildet wird, ist conform der Punktreihe, die auf der Geraden $(\mathcal{A}'-B')$ des zweiten Systems durch die Durchschnittspunkte mit den Geraden $(\mathcal{A}'-\mathcal{B}')$, $(A'-\mathcal{S}')$, $(A'-\mathcal{B}')$, $(A'-B')$, $(S'-\mathcal{B}')$ u. s. w. gebildet wird; und so bei jedem anderen Paare von Geraden, die in beiden Systemen dieselbe geometrische Bedeutung haben, d. h. auf gleiche Weise aus den die Systeme erzeugenden hervorgegangen sind. Ebenso ist der Strahlbüschel, welcher durch die Verbindungsgeraden des Punktes $(c\cdot\mathfrak{f})$ des ersten Systems mit den Punkten $(\alpha\cdot\mathfrak{b})$, $(a\cdot\mathfrak{b})$, $(a\cdot b)$, $(b\cdot\mathfrak{b})$, $(b\cdot\mathfrak{d})$ u. s. w. gebildet wird, conform dem Strahlbüschel, welcher durch die Verbindungsgeraden des Punktes $(c'\cdot\mathfrak{f}')$ des zweiten Systems mit den Punkten $(\alpha'\cdot\mathfrak{b}')$, $(a'\cdot\mathfrak{b}')$, $(a'\cdot b')$, $(b'\cdot\mathfrak{b}')$, $(b'\cdot\mathfrak{d}')$ u. s. w. gebildet wird; der Strahlbüschel, welcher durch die Verbindungsgeraden des Punktes $(\alpha\cdot b)$ des ersten Systems mit den Punkten $(\alpha\cdot\mathfrak{b})$, $(a\cdot c)$, $(a\cdot\mathfrak{b})$, $(a\cdot b)$, $(s\cdot\mathfrak{b})$ u. s. w. gebildet wird, conform dem Strahlbüschel, welcher durch die Verbindungsgeraden des Punktes $(\alpha'\cdot b')$ des zweiten Systems mit den Punkten $(\alpha'\cdot\mathfrak{b}')$, $(a'\cdot c')$, $(a'\cdot\mathfrak{b}')$, $(a'\cdot b')$, $(s'\cdot\mathfrak{b}')$ u. s. w. gebildet wird, und so bei jedem anderen Paare Strahlbüschel, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben.

Es seien nun umgekehrt zwei Systeme gegeben, in denen alle Paare Punktreihen von derselben geometrischen Bedeutung conform sein, so müssen es auch die Strahlbüschel sein nach § 1. Lehrsatz 13. Sind z. B., Fig. 70., die Punktreihen $\mathfrak{f},\mathcal{A}\mathcal{S}\mathcal{D}\mathcal{B}$ und $\mathfrak{f}',\mathcal{A}'\mathcal{S}'\mathcal{D}'\mathcal{B}'$ conform, so sind es auch die Strahlbüschel, deren Strahlen durch diese Punkte gehen, mag ihr Scheitel in S und S'; $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$; A und A' u. s. w. oder sonst wo liegen. Und umgekehrt, sind in zwei Systemen alle Paare gleichnamiger Strahlbüschel conform, so sind es auch die Punktreihen. Ein Paar solcher Punktreihen, Fig. 71., seien a,ABE und $a'A'B'E'$; b,BCF und $b'B'C'F'$; c,CDE und $c',C'D'E'$; d,ADF und $d',A'D'F'$ (vgl. § 2. Lehrsatz 12.). Es sei nun M der Gegenpunkt (§ 2. Erklärung 15.) der Punktreihe auf a, N der auf d; P' der Gegenpunkt der Punktreihe auf a'; Q' derjenige auf d', so daß also $a,ABEM\infty \;\overline{\wedge}\; a',A'B'E'\infty P'$; $d,ADFN\infty \;\overline{\wedge}\; d',A'D'F'N'\infty Q'$ ist. Durch ein Paar zusammengehöriger Punkte, z. B. E und E' ziehe man Gerade r, und r' bezüglich parallel zu den Geraden $(M-N)$, $(P'-Q')$, die kurz mit m, p' bezeichnet werden mögen, so daß also p die Verbindungsgerade der unendlich entfernten Punkte der Punktreihen auf a und d, m' die Verbindungsgerade der unendlich entfernten Punkte der Punktreihen auf a' und d' bezeichnet. Es sind also p und m'

selbst als in unendlicher Ferne liegend zu denken, und es sind zugleich m und m′; p und p′ Gerade von derselben geometrischen Bedeutung. Da nun r ‖ m ist, so liegt der Durchschnittspunkt (r · m) im Unendlichen, oder, da auch p im Unendlichen liegt, der Durchschnittspunkt (r · m) liegt auf p oder es geht r durch den Durchschnittspunkt (m · p). Da nun r′ ‖ p′ ist, also dieselbe im Unendlichen schneidet, m′ aber im Unendlichen liegt, so kann der unendlich entfernte Punkt, in dem r′ die p′ trifft, auch als der Durchschnittspunkt von p′ mit m′ angesehen werden; es geht also r′ durch den Durchschnittspunkt (m′ · p′); (m · p) und (m′ · p′) aber sind ein Paar Punkte von derselben Bedeutung in beiden Systemen, desgleichen E und E′; also sind auch r und r′ ein Paar Gerade, die in denselben auf gleiche Weise entstehen, und folglich sind die auf ihnen entstehenden Punktreihen der Voraussetzung nach conform, und zwar sind (r · m) und (r′ · m′) entsprechende Punkte der conformen Theilung. Aber (r · m) liegt im Unendlichen, da r ‖ m war, (r′ · m′) liegt auch im Unendlichen, da m′ im Unendlichen liegt. Die Punktreihen auf r und r′ sind also proportional (vgl. § 3. Erklärung 21.). Ebenso sind, wenn T und T′ irgend ein Paar zusammengehöriger Punkte der Punktreihen auf a und a′ sind, die durch sie zu m und zu p′ parallel gezogenen Geraden t, t′ ebenfalls zusammengehörig und proportional. Es ist also Punktreihe $r, EGH\infty \overline{\wedge}\, r', E'G'H'\infty$,

oder also $$\frac{EG}{HG} = \frac{E'G'}{H'G'}.$$

Ist nun $EG = E'G'$, so folgt hieraus auch $HG = H'G'$, und wenn X und X′ irgend ein anderes Paar zusammengehöriger Punkte auf r und r′ wäre, so müßte sein

$$\frac{EG}{HG} : \frac{EX}{HX} = \frac{E'G'}{H'G'} : \frac{E'X'}{H'X'};$$

und also nach der vorigen Gleichung

$$\frac{EX}{HX} = \frac{E'X'}{H'X'};$$

oder, wenn man sich X als außerhalb der endlichen Strecke EH, also X′ ebenfalls als außerhalb der endlichen Strecke E′H′ liegend vorstellt:

$$\frac{EH}{HX} + \frac{HX}{HX} = \frac{E'H'}{H'X'} + \frac{H'X'}{H'X'}$$

oder $$\frac{EH}{HX} = \frac{E'H'}{H'X'};$$

und da $EH = E'H'$ ist: $HX = H'X'$;

also auch $EX = E'X'$; $GX = G'X'$ u. s. w. Kurz, es wären dann auf r und r′ die Abschnitte zwischen je zwei entsprechenden Punkten gleich groß, und die Punktreihen auf r und r′ könnten so auf einander gelegt werden, daß je zwei entsprechende Punkte zusammenfielen. Ist aber EG nicht gleich E′G′, so kann auch HG nicht gleich H′G′ sein, da $\frac{EG}{HG} = \frac{E'G'}{H'G'}$ ist. Ist z. B. $E'G' < EG$, so folgt aus dieser Glei-

chung, daß auch $H'G' < HG$ sein muß. Denken wir uns nun in beiden Systemen Parallele zu r und r' gezogen, z. B. u und u' der Art, daß sie von d und d' zwischen den Punkten H und F; H' und F' geschnitten werden, so kann auf allen diesen die Strecke $Y'Z' < XZ$ sein. Es tritt aber jedenfalls, wenn wir die Geraden u, u', immer weiter nach F zu rücken lassen, wenn sie durch F und F' gehen, der Fall ein, daß $YZ = Y'Z'$ wird; nämlich jedes wird $= 0$; hieraus kann jedoch nicht gefolgert werden, daß auch $VF = V'F'$ werde. Lassen wir aber u und u' über $(V-F)$ und $(V'-F')$ hinausrücken, so fällt, wenn u nach m kommt, u' nach m', also in das Unendliche. Es ist also die Strecke NL eine endliche, die Strecke N'L' auf m' eine unendliche; also $N'L' > NL$; im Punkt F und F' aber war $YZ = Y'Z'$. Da nun beim Fortrücken der u und u' von der Lage $(V-F)$, $(V'-F')$ bis m, m' die Strecke YZ, Y'Z' stetig wächst, so muß es nothwendig zwischen $(V-F)$ und m; $(V'-F')$ und m' eine Lage s geben, in der $YZ = Y'Z'$ ist, und also $UY = U'Y'$. Wäre $H'G' > HG$, also $HG < H'G'$ gewesen, also auch $EG < E'G'$, so hätte sich ebenso zeigen lassen, daß jedenfalls ein Paar zu r und r' paralleler Geraden da sein muß, die gleich sind; es muß nämlich unter denen, die sich zwischen $(B'-W')$ und p' ziehen lassen, eine geben, die der gleichnamigen des ersten Systems gleich ist. Es sei nun also $s,UYZ = s',U'Y'Z'$, also $UY = U'Y'$, $UZ = U'Z'$, $YZ = Y'Z'$, so überzeugt man sich, wie oben, daß jeder weitere Punkt X, X' ebenfalls in beiden Systemen gleiche Entfernung von einem gleichnamigen Punktpaar der s und s' hat, daß also $UX = U'X'$, $YX = Y'X'$, $ZX = Z'X'$ u. s. w. ist. Es lassen sich also die Punktreihen s,UYZ ...., $s',U'Y'Z'$ .... so auf einander legen, daß jede zwei entsprechenden Punkte zusammenfallen. Man wird jedoch bemerken, daß die Schlüsse, welche zu diesem Resultat führten, nicht gemacht werden können, wenn die Punktreihen auf a und a'; d und d' proportional sind; indem dann die Gerade m ebenso wie m' in das Unendliche fällt, und die Folgerung, daß zwischen F und NL einmal $YZ = Y'Z'$ sein müsse, nicht mehr gemacht werden kann. In diesem Falle kann man aber jedenfalls in beiden Systemen irgend ein Paar andere Vierecke oder Vierseite finden, in denen die Punktreihen nicht proportional getheilt sind, und auf sie denselben Beweis anwenden, wie er hier gegeben wurde. Lassen sich aber ein Paar solcher Vierecke oder Vierseite nicht finden, sind also alle Paare gleichnamiger Punktreihen in beiden Systemen proportional getheilt, so kann auch nicht behauptet werden, daß es eine Punktreihe $s,UYZ = s',U'Y'Z'$ geben müsse. Ebenso wenig kann es behauptet werden, wenn sämmtliche gleichnamige Strahlbüschel gleich sind, der Art, daß je zwei gleichnamige Strahlen gleiche Winkel einschließen, wenn also, Fig. 72., die Winkel $ab = a'b'$, $bc = b'c'$, $cd = c'd'$, $de = d'e'$, $af = a'f'$, $fg = f'g'$, $gh = g'h'$, $hc = h'c'$, $cl = c'l'$, $lk = l'k'$, $kf = k'f'$, $fe = f'e'$, $bf = b'f'$, $cf = c'f'$ u. s. w. ist. Denn zieht man dann durch S den Strahl $n \parallel f$, und sucht den

gleichnamigen des zweiten Systems, so muß dieser $\| f'$ sein, da $na = fa$, aber nach der Voraussetzung $fa = f'a'$ ist, also auch $n'a' = f'a'$, also $n' \| f'$ sein muß. Ebenso muß, wenn $q \| c$ ist, der gleichnamige $q' \| c'$ sein, wenn $t \| b$ ist, muß auch $t' \| b'$ sein, u. s. w. Es muß also Punktreihe $f, \mathcal{S}\mathfrak{S}\mathfrak{M}\infty \;\overline{\wedge}\; f', \mathcal{S}'\mathfrak{S}'\mathfrak{M}'\infty$; $c, S\mathfrak{S}M\infty \;\overline{\wedge}\; c', S'\mathfrak{S}'M'\infty$; $b, S\mathfrak{B}\mathfrak{E}\infty \;\overline{\wedge}\; b', S'\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'\infty$ sein u. s. w., es müssen also dann alle Punktreihen proportional sein. Dieser Fall soll aber vor der Hand ausgeschlossen werden. Legt man also die Geraden s und s', Fig. 71., so auf einander in eine einzige Gerade σ, Fig. 70., daß die entsprechen-Punkte zusammenfallen, so convergiren also gleichnamige Gerade in $U, Y, Z, X, \ldots$, es schneiden sich nun $(S-\mathfrak{A})$ und $(S'-\mathfrak{A}')$ in U; $(S-A)$ und $(S'-A')$ in Y; $(A-\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{A}'-A')$ in Z, daher treffen sich nach § 3. Lehrsatz 13. $(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}')$, $(S-S')$, $(A-A')$ in einem und demselben Punkte Σ. Schneiden sich ferner $(\mathfrak{A}-\mathfrak{S})$ und $(\mathfrak{A}'-\mathfrak{S}')$ im Punkt X der σ, so treffen sich nach demselben Lehrsatz, wenn er auf die Dreiecke $\mathfrak{A}A\mathfrak{S}$, $\mathfrak{A}'A'\mathfrak{S}'$ angewendet wird, $(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}')$, $(A-A')$, $(\mathfrak{S}-\mathfrak{S}')$ in einem und demselben Punkte. Da nun $(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}')$, $(A-A')$ sich in Σ treffen, so muß auch $(\mathfrak{S}-\mathfrak{S}')$ durch Σ gehen. Ebenso muß, wenn sich $(\mathfrak{A}-B)$ und $(\mathfrak{A}'-B')$ in demselben Punkte der σ schneiden, auch $(B-B')$ durch Σ gehen und so läßt es sich für jedes Paar gleichnamiger Punkte beweisen. Man sieht sogleich, daß dieser letzte Theil der Untersuchung die Umkehrung der in § 6. Behufs Aufstellung der Erklärung 1. angestellten ist. Fassen wir jetzt Beides zusammen, so erhalten wir den

2. Lehrsatz. Gehen in zwei in derselben Ebene liegenden Systemen die Verbindungsgeraden jeder zwei Punkte, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, durch einen und denselben Punkt Σ, so liegen die Durchschnittspunkte von je zwei Geraden, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, auf einer und derselben Geraden σ. Fig. 70.

2. Lehrsatz. Liegen in zwei in derselben Ebene liegenden Systemen die Durchschnittspunkte jeder zwei Geraden, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, auf einer und derselben Geraden σ, so gehen die Verbindungsgeraden von je zwei Punkten, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, durch einen und denselben Punkt Σ. Fig. 70.

Ferner sahen wir im Anfang der letzten Untersuchung.

3. Lehrsatz. Sind in zwei ebenen Systemen jede zwei Punktreihen, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, conform; so sind auch jede zwei Strahlbüschel, welche dieselbe geometrische

3. Lehrsatz. Sind in zwei ebenen Systemen jede zwei Strahlbüschel, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, conform; so sind auch jede zwei Punktreihen, welche dieselbe geometrische

Bedeutung haben, conform. Fig. 70.

Bedeutung haben, conform. Fig. 70.'

Hieran schließt sich also, wie im Vorigen gezeigt wurde, nach § 6. Erklärung 1. und 2. der

4. Lehrsatz. Sind in zwei ebenen Systemen jede zwei Punktreihen, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, conform, so lassen sich die Systeme in Projectionslage bringen. Fig. 70.

4. Lehrsatz. Sind in zwei ebenen Systemen jede zwei Strahlbüschel, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, conform, so lassen sich die Systeme in Projectionslage bringen.

5. Lehrsatz. Der Lehrsatz 4. kann **nicht** ausgesprochen werden, wenn je zwei Punktreihen, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, **proportional** sind, d. h. wenn auf jeden zwei conformen Punktreihen den unendlich entfernten Punkten dieselbe geometrische Bedeutung zukommt. Fig. 71.

Dieser Fall soll vor der Hand von unserer Betrachtung ausgeschlossen sein.

5. Lehrsatz. Der Lehrsatz 4. kann **nicht** ausgesprochen werden, wenn je zwei Strahlbüschel, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, **gleich** sind, d. h. wenn je zwei Gerade, denen dieselbe geometrische Bedeutung zukommt, gleiche Winkel einschließen. Fig. 71.

Dieser Fall soll vor der Hand von unserer Betrachtung ausgeschlossen sein.

In Folge von Lehrsatz 3 und 4. definiren wir jetzt:

6. Erklärung. Zwei Systeme, die in eine solche Lage gebracht werden können, daß die Verbindungsgeraden von je zwei Punkten, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, d. h. die in beiden Systemen auf gleiche Weise aus den das System erzeugenden Grundgebilden entstanden sind, sich in einem und demselben Punkte Σ Fig. 70. schneiden,

oder auch:

Zwei Systeme, in denen jede zwei Punktreihen, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, conform sind, heißen **collinear**.

6. Erklärung. Zwei Systeme, die in eine solche Lage gebracht werden können, daß die Durchschnittspunkte von je zwei Geraden, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, d. h. die in beiden Systemen auf gleiche Weise aus den die Systeme erzeugenden Grundgebilden entstanden sind, auf einer und derselben Geraden σ Fig. 70. liegen,

oder auch:

Zwei Systeme, in denen jede zwei Strahlbüschel, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, conform sind, heißen **collinear**.

Daß diese Erklärungen, weder die erste mit der zweiten, noch die links stehende mit der rechts stehenden, sich nicht im Widerspruch befinden, geht aus den Lehrsätzen 1, 2, 3, 4 sogleich hervor. Es enthalten also die verschiedenen Erklärungen nur verschiedene Auffassungen derselben Sache, wie dies schon § 2. Erklärung 5. bei Erläuterung des Begriffs der Conformität eintrat.

7. Erklärung. Jede zwei Punkte, die in zwei collinearen Systemen dieselbe geometrische Bedeutung haben, d. h. auf dieselbe Weise aus den das System erzeugenden Grundgebilden hervorgegangen sind, z. B. A, A′; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$; $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$; S, S′ Fig. 70. heißen **homolog**.

7. Erklärung. Jede zwei Gerade, die in zwei collinearen Systemen dieselbe geometrische Bedeutung haben, d. h. auf dieselbe Weise aus den das System erzeugenden Grundgebilden hervorgegangen sind, z. B. a, a′; α, α'; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$; s, s′ Fig. 70. heißen **homolog**.

8. Erklärung. Auch Punktreihen, die in zwei collinearen Systemen auf homologen Geraden von den Durchschnitten mit anderen homologen Geraden gebildet werden, heißen **homolog**.

8. Erklärung. Auch Strahlbüschel, die in zwei collinearen Systemen an homologen Punkten von den Verbindungsgeraden mit anderen homologen Punkten gebildet werden, heißen **homolog**.

Es sind also z. B. die Punktreihen s,ABCD und s′,A′B′C′D′, $\mathfrak{s}$,$\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{s}'$,$\mathfrak{A}'\mathfrak{S}'\mathfrak{D}'\mathfrak{B}'$; die Strahlbüschel S,abcd und S′,a′b′c′d′, $\mathfrak{S}$,$\alpha\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{S}'$,$\alpha'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ homolog. Nach Lehrsatz 1. aber sind je zwei solcher Punktreihen und Strahlbüschel conform, wie auch in der Erklärung 6. bereits berücksichtigt ist. Der Wichtigkeit dieses Umstandes wegen mag er indessen, obschon er bereits in der Definition von: „collinear" enthalten ist, nochmals besonders hingestellt werden, als:

9. Lehrsatz. Jede zwei homologe Punktreihen collinearer Systeme sind conform.

9. Lehrsatz. Jede zwei homologe Strahlbüschel collinearer Systeme sind conform.

Nach § 2. Erklärung 8. heißen die Punkte, z. B. A und A′, B und B′ u. s. w. entsprechende Punkte der conformen Punktreihen s,ABCD und s′,A′B′C′D′, sowie die Strahlen a und a′, b und b′ u. s. w. entsprechende Strahlen der conformen Strahlbüschel S,abcd und S′,a′b′c′d′; nach Erklärung 7. aber heißen jetzt A und A′, B und B etc., a und a′, b und b′ etc. homolog. Man sieht also:

10. Lehrsatz. Jede zwei homologe Punkte collinearer Systeme sind zugleich

10. Lehrsatz. Jede zwei homologe Geraden collinearer Systeme sind zugleich

entsprechende Punkte homologer Punktreihen.	entsprechende Strahlen homologer Strahlbüschel.

Ueberhaupt wird der Ausdruck: „entsprechend“ mit „homolog“ vertauscht, wenn die Grundgebilde nicht für sich und als ein Ganzes bildend, sondern nur als Theile eines Systems auftreten. — Es folgt ferner aus der zweiten der Definitionen in Erklärung 6. sogleich der:

11. **Lehrsatz.** Sind zwei ebene Systeme einem dritten collinear, so sind sie auch zu einander collinear.

In Fig. 70. lagen die collinearen Systeme nun so, daß sich wirklich die Verbindungsgeraden von je zwei homologen Punkten in einem und demselben Punkte Σ schneiden, und daß die Durchschnittspunkte von je zwei homologen Strahlen wirklich auf einer und derselben Geraden σ liegen. Der Definition 6. nach können allerdings zwei collineare Systeme gleich von Hause aus so liegen, aber sie müssen es nicht.

12. **Aufgabe.** Zwei ebene collineare Systeme in beliebiger Lage zu construiren. Fig. 73a 73b.

Auflösung 1. Man nehme α) zwei aus unendlich vielen Punkten (wobei der Punkt E oder $\mathcal{E}$, E′ oder $\mathcal{E}'$, der im Durchschnitte der Geraden s und $\mathfrak{s}$, s′ und $\mathfrak{s}'$ liegt, mit einbegriffen ist) bestehende conforme Punktreihenpaare (man construirt solche am einfachsten, indem man zwei beliebige Strahlbüschel construirt und durch den einen die Transversalen s und s′, durch den anderen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ zieht, so erhält man auf s und s′, auf $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ conforme Punktreihen nach § 1. Lehrsatz 11.), also Fig. 73a. s,ADCPBE.... $\overline{\wedge}$ s′,A′D′C′P′B′E′....; $\mathfrak{s},\mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{D}\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{E}$ .... $\overline{\wedge}$ $\mathfrak{s}',\mathcal{A}'\mathcal{P}'\mathcal{D}'\mathcal{C}'\mathcal{B}'\mathcal{E}'$...., wo die Anzahl der Punkte unbegrenzt ist und ziehe die Geraden (A $-$ $\mathcal{A}$), (A $-$ $\mathcal{B}$), (A $-$ $\mathcal{C}$)...., (A′ $-$ $\mathcal{A}'$), (A′ $-$ $\mathcal{B}'$), (A′ $-$ $\mathcal{C}'$)...., (B $-$ $\mathcal{A}$), (B $-$ $\mathcal{B}$), (B $-$ $\mathcal{C}$)...., (B′ $-$ $\mathcal{A}'$), (B′ $-$ $\mathcal{B}'$), (B′ $-$ $\mathcal{C}'$).... u. s. w., kurz, man verbinde jeden Punkt der einen Punktreihe mit jedem Punkt der anderen, so entstehen zwei ebene Systeme, deren eins von den Punktreihen auf s und $\mathfrak{s}$, deren anderen denen auf s′ und $\mathfrak{s}'$ erzeugt wird. Da die Anzahl der Punkte auf s, $\mathfrak{s}$; s′, $\mathfrak{s}'$ unendlich ist, so müssen sich natürlich in jedem Punkte der von s und $\mathfrak{s}$, sowie der von s′ und $\mathfrak{s}'$ bestimmten Ebene unzählig viele Strahlen schneiden. Geht nun z. B. im ersten System durch den Durchschnittspunkt S der Geraden (A $-$ $\mathcal{A}$), (C $-$ $\mathcal{C}$) auch die Gerade (B $-$ $\mathcal{B}$), so ist leicht zu sehen, daß auch durch den Durchschnittspunkt S′ der Geraden (A′ $-$ $\mathcal{A}'$), (C′ $-$ $\mathcal{C}'$) im zweiten System die Gerade (B′ $-$ $\mathcal{B}'$) gehen muß. Denn man ziehe (S $-$ E), (S′ $-$ E′), so entsteht bei S ein Strahlbüschel S,acbe und es ist Punktreihe s,ACBE $\overline{\wedge}$ $\mathfrak{s},\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{E}$. Im zweiten System verbinde man S′ durch die Gerade b′ mit dem dem Punkte $\mathcal{B}$ entsprechenden $\mathcal{B}'$, so muß diese Gerade b′ die s′ in einem solchen Punkte X′ treffen, daß Punktreihe s′,A′C′X′E′ $\overline{\wedge}$ $\mathfrak{s}',\mathcal{A}'\mathcal{C}'\mathcal{B}'\mathcal{E}'$ ist. Nach der Voraussetzung ist aber $\mathfrak{s}',\mathcal{A}'\mathcal{C}'\mathcal{B}'\mathcal{E}'$ $\overline{\wedge}$ $\mathfrak{s},\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{E}$, also muß auch sein s′,A′C′X′E′ $\overline{\wedge}$ s,ACBE.

Es muß also X′ der dem Punkte B der $\mathfrak{s}$ entsprechende Punkt B′ sein, oder es muß $(S' - \mathfrak{B}')$ auch durch B′ gehen, oder es müssen, wenn $(A - \mathfrak{A})$, $(C - \mathfrak{C})$, $(B - \mathfrak{B})$ sich in einem Punkte S schneiden, sich auch die homologen Geraden $(A' - \mathfrak{A}')$, $(C' - \mathfrak{C}')$, $(B' - \mathfrak{B}')$ des zweiten Systems in einem und demselben Punkte S′ schneiden. Ebenso müssen, wenn sich $(A - \mathfrak{C})$, $(D - \mathfrak{D})$, $(B - \mathfrak{B})$ in $\mathfrak{S}$ schneiden, sich $(A' - \mathfrak{C}')$, $(D' - \mathfrak{D}')$, $(B' - \mathfrak{B}')$ in einem Punkte $\mathfrak{S}'$ treffen, wenn sich $(A - \mathfrak{B})$, $(C - \mathfrak{C})$, $(B - \mathfrak{A})$ in einem Punkte M schneiden, sich auch $(A' - \mathfrak{B}')$, $(C' - \mathfrak{C}')$, $(B' - \mathfrak{A}')$ in einem Punkte M′ treffen. Da nun die ursprünglichen Punktreihen conform waren, so folgt, daß auch Strahlbüschel $S',a'c'b'e' \overline{\wedge}\, S,acbe$, $\mathfrak{S}',\alpha'\delta'\beta'\varepsilon' \overline{\wedge}\, \mathfrak{S},\alpha\delta\beta\varepsilon$ u. s. w. ist, kurz, daß jedes Paar auf dieselbe Weise entstandener Strahlbüschel conform ist. Sind ferner im ersten System die Punkte S, $\mathfrak{S}$ je die Durchschnittspunkte der Geraden a, c; α, δ, im zweiten System die Punkte S′, $\mathfrak{S}'$ die Durchschnittspunkte der homologen Geraden a′, c′; α′, δ′, und schneidet $(S - \mathfrak{S})$ die $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{s}$ in den Punkten $\mathfrak{B}$, B, so muß $(S' - \mathfrak{S}')$ die $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{s}'$ in den homologen Punkten $\mathfrak{B}'$, B′ treffen. Denn, es schneiden sich dann also $(A - \mathfrak{A})$, $(C - \mathfrak{C})$, $(B - \mathfrak{B})$ in S, also nach dem Vorigen auch $(A' - \mathfrak{A}')$ $(C' - \mathfrak{C}')$ $(B' - \mathfrak{B}')$ in S′, oder $(B' - \mathfrak{B}')$ geht durch S′, und $(A - \mathfrak{C})$, $(D - \mathfrak{D})$, $(B - \mathfrak{B})$ in $\mathfrak{S}$, also auch $(A' - \mathfrak{C}')$, $(D' - \mathfrak{D}')$, $(B' - \mathfrak{B}')$ in $\mathfrak{S}'$, oder $(B' - \mathfrak{B}')$, geht durch $\mathfrak{S}'$. Es geht also $(B' - \mathfrak{B}')$ sowohl durch S′ als durch $\mathfrak{S}'$ oder $(S' - \mathfrak{S}')$ schneidet die $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{s}'$ in $\mathfrak{B}'$ und B′. Da nun Strahlbüschel $S,acbe$ und $S',a'c'b'e'$ conform sind, so bilden die Durchschnittspunkte ihrer entsprechenden Strahlen auf homologen Geraden, z. B. auf $(P - \mathfrak{P})$, $(P' - \mathfrak{P}')$ conforme Punktreihen, ebenso aber auch die Strahlbüschel $\mathfrak{S},\alpha\delta\beta\varepsilon$ und $\mathfrak{S}',\alpha'\delta'\beta'\varepsilon'$. Zieht man aber $(\mathfrak{S} - \mathfrak{P})$, $(\mathfrak{S}' - \mathfrak{P}')$, so schneiden sie nach dem Vorigen $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$, zieht man $(\mathfrak{S} - P)$, $(\mathfrak{S}' - P')$, so schneiden sie $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ in entsprechenden Punkten, zieht man von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ nach dem Durchschnittspunkt M, M′ von $(P - \mathfrak{P})$, $(P' - \mathfrak{P}')$ mit $(C - \mathfrak{C})$, $(C' - \mathfrak{C}')$, so schneiden $(\mathfrak{S} - M)$, $(\mathfrak{S}' - M')$ nach dem Vorigen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ in entsprechenden Punkten $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$; D, D′. Es hat also die von dem Strahlbüschel $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ auf $(P - \mathfrak{P})$, $(P' - \mathfrak{P}')$ erzeugte Punktreihe mit der von S, S′ erzeugten drei Punkte P, P′; $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$; M, M′ als entsprechende gemein. Es sind also die von einem Paar entsprechender Strahlen der Büschel $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ auf $(P - \mathfrak{P})$, $(P' - \mathfrak{P}')$ erzeugten Punkte zugleich entsprechende Punkte in den von den entsprechenden Strahlen der Büschel S, S′ auf $(P - \mathfrak{P})$, $(P' - \mathfrak{P}')$ erzeugten conformen Punktreihen. Ebenso wird jedes Paar auf dieselbe Weise entstandener Gerader z. B. $(\mathfrak{A} - B)$, $(\mathfrak{A}' - B')$ von den Strahlbüscheln, bezüglich $S,acbe$ und $S',a'c'b'e'$, $(A - \mathfrak{B})$, $(A' - \mathfrak{B}')$ von $\mathfrak{S},\alpha\delta\beta\varepsilon$; $\mathfrak{S}',\alpha'\delta'\beta'\varepsilon'$ u. s. w. conform getheilt. Verbindet man nun wieder jeden Punkt der Punktreihe auf $(\mathfrak{A} - B)$ mit jedem auf $(A - \mathfrak{B})$ und ebenso jeden Punkt der Punktreihe auf $(\mathfrak{A}' - B')$ mit jedem auf $(A' - \mathfrak{B}')$, so entstehen wieder conforme Strahlbüschel, und dieselben Folgerungen wiederholen sich immer vom Neuen. Man sieht also, daß man lauter conforme Punktreihen- und Strahlbüschelpaare in beiden

Systemen erhält. Die Systeme sind also nach Erklärung 6. collinear. Anstatt jedoch gleich ganze Punktreihen anzunehmen, kann man auch β) je drei Punkte z. B. A, C, B auf s, 𝔄, 𝔖, 𝔅 auf 𝔰; A′, C′, B′ auf s′, 𝔄′, 𝔖′, 𝔅′ auf 𝔰′ oder natürlich auch irgend drei andere Punkte auf s und 𝔰, s′ und 𝔰′, annehmen, wenn es nur homologe Punkte auf s und s′, 𝔰 und 𝔰′ sind, z. B. A, D, C auf s, A′, D′, C′ auf s′, 𝔖, 𝔇, 𝔅 auf 𝔰, 𝔖′, 𝔇′, 𝔅′ auf 𝔰′; man bestimme nun, indem man auf s und 𝔰 willkürlich andere Punkte, z B. (wenn auf s und s′, 𝔰 und 𝔰′ die erstgenannten drei Punkte A, C, B; A′, C′, B′; 𝔄, 𝔖, 𝔅; 𝔄′, 𝔖′, 𝔅′ angenommen sind) D, P...., 𝔇, 𝔓.... festsetzt, die entsprechenden Punkte D′, P′...., 𝔇′, 𝔓′.... auf s′ und 𝔰′ (vergl. § 2. Lehrsatz 12. Aufgabe 18.), und verfahre, nachdem man so conforme Punktreihen gebildet, wie in α). Am einfachsten wird man natürlich dabei den Durchschnittspunkt E (oder 𝔈), E′ (oder 𝔈′) mit unter die ursprünglich willkürlich angenommenen Punkte rechnen, also z. B. A, B, E auf s, A′, B′, E′ auf s′; 𝔄, 𝔅, 𝔈 auf 𝔰, 𝔄′, 𝔅′, 𝔈′ auf 𝔰′ annehmen. Man sieht aber sogleich, daß die Auflösung sowohl in α) als auch die letztere manches Widerwärtige hat. Denn, abgesehen von der großen Unbequemlichkeit, kann man doch nur Punktreihen von einer beschränkten, nicht von einer unendlichen Anzahl von Punkten construiren. Dieß führt nun auf eine dritte Construction. Man überlege, daß, wenn, wie in β) erwähnt wurde, die Punkte A, B, E; 𝔄, 𝔅, 𝔈; A′, B′, E′; 𝔄′, 𝔅′, 𝔈′ willkürlich angenommen sind, der Durchschnittspunkt E oder 𝔈, E′ oder 𝔈′ gar nicht angenommen zu werden braucht. Denn entweder man wird erst Gerade s, 𝔰; s′, 𝔰′ ziehn, und auf ihnen beliebig A, B; 𝔄, 𝔅; A′, B′; 𝔄′, 𝔅′ wählen, dann hat man den Durchschnittspunkt schon im Voraus gewählt durch das Ziehen der Geraden s, 𝔰; s′, 𝔰′; oder man wird erst die Punkte A, B; 𝔄, 𝔅; A′, B′; 𝔄′, 𝔅′ auf dem Papier notiren und dann die Geraden (A — B), (𝔄 — 𝔅), (A′—B′), (𝔄′—𝔅′) ziehn; auch dann ist bereits der Durchschnittspunkt E, E′ durch die Punkte A, B; 𝔄, 𝔅; A′, B′; 𝔄′, 𝔅′ bestimmt. Mit einem Worte, man nehme γ) ein vollständiges Viereck AB𝔅𝔄, A′B′𝔅′𝔄′, setze fest, A′ soll dem A, B′ dem B, 𝔅′ dem 𝔅, 𝔄′ dem 𝔄 homolog sein, ziehe nun (A—𝔄), (A′—𝔄′), (A—𝔅), (A′—𝔅′), (B—𝔄), (B′—𝔄′), (B — 𝔅), (B′ — 𝔅′), verbinde die so entstehenden Durchschnittspunkte wieder unter einander und mit den ursprünglich angenommenen vier Punkten, so läßt sich auch direkt zeigen, daß jede Gerade p′ des zweiten Systems die s′ und 𝔰′ in einem solchen Punkte treffen muß, daß ihr Durchschnittspunkt P′, 𝔓′ dem Durchschnittspunkt P, 𝔓 der homologen Geraden p des ersten Systems mit s, 𝔰 entsprechend ist in den Punktreihen s,APBE, s′,A′P′B′E′; 𝔰,𝔄𝔓𝔅𝔈, 𝔰′,𝔄′𝔓′𝔅′𝔈′; daß man also dieselben, und einander collinearen Systeme erhält, als wären die unter α) erwähnten Punktreihen erst, und aus ihnen das System construirt worden. Denn in den vollständigen Vierecken AB𝔅𝔄, A′B′𝔅′𝔄′ ist nach § 3. Lehrsatz 17. Punktreihe s,ACBE, ebenso 𝔰,𝔄𝔖𝔅𝔈, deßgleichen s′,A′C′B′E′, 𝔰′,𝔄′𝔖′𝔅′𝔈′ harmonisch, also s′,A′C′B′E′ ⊼

s,ACBE, 𝔰,𝔄𝔖𝔅𝔈 ⊼ 𝔰′,𝔄′𝔖′𝔅′𝔈′. Zieht man nun z. B. (A − 𝔖), (A′ − 𝔖′), welche die (B − 𝔅), (B′ − 𝔅′) bei 𝔖, 𝔖′ schneiden und verbindet 𝔖, 𝔖′ mit einem der bisher gefundenen Punkte, z. B. mit M, M′, so ist in den vollständigen Vierecken 𝔖𝔖M𝔅, 𝔖′𝔖′M′𝔅′ nach § 3. Lehrsatz 17. Punktreihe a,A𝔄SN und a′,A′𝔄′S′N′ harmonisch; also auch die Strahlbüschel, die von den Geraden (M − A), (M − 𝔄), (M − S), (M − N); (M′ − A′), (M′ − 𝔄′), (M′ − S′), (M′ − N′) an M und M′ gebildet werden, also auch Punktreihe s,ABCD und s′,A′B′C′D′ harmonisch, also s,ADCB ⊼ s′,A′D′C′B′. Nun war s,ACBE ⊼ s′,A′C′B′E′, also nach § 2. Lehrsatz 11. auch s,ADCBE ⊼ s′,A′D′C′B′E′; es ist also auch Strahlbüschel 𝔖,𝔞𝔡𝔟𝔢 ⊼ 𝔖′,𝔞′𝔡′𝔟′𝔢′, also auch Punktreihe 𝔰,𝔖𝔇𝔅𝔈 ⊼ 𝔰′,𝔖′𝔇′𝔅′𝔈′. Es war aber auch 𝔰,𝔄𝔖𝔅𝔈 ⊼ 𝔰′,𝔄′𝔖′𝔅′𝔈′, also nach § 2. Lehrsatz 11. auch 𝔰,𝔄𝔖𝔇𝔅𝔈 ⊼ 𝔰′,𝔄′𝔖′𝔇′𝔅′𝔈′. Verbindet man ferner noch ein Paar Punkte, z. B. R und M, R′ und M′ durch Gerade, welche die s und 𝔰 in P, 𝔓, deren homologe die s′, 𝔰′ in P′, 𝔓′ schneiden, so ist, da Strahlbüschel 𝔖,𝔞𝔡𝔟𝔢 ⊼ 𝔖′,𝔞′𝔡′𝔟′𝔢′ ist, auch Punktreihe a,ANSR ⊼ a′,A′N′S′R′, also auch der Strahlbüschel der an M von (M − A), (M − N), (M − S), (M − R) gebildet wird, dem an M′ von (M′ − A′), (M′ − N′), (M′ − S′), (M′ − R′) gebildeten conform, also auch Punktreihe s,ADCP ⊼ s′,A′D′C′P′, also nach § 2. Lehrsatz 11. auch s,ADCPBE ⊼ s′,A′D′C′P′B′E′ und auch wegen der conformen Strahlbüschel bei M und M′, Punktreihe 𝔰,𝔅𝔇𝔖𝔓 ⊼ 𝔰′,𝔅′𝔇′𝔖′𝔓′, also auch 𝔰′𝔄𝔓𝔖𝔇𝔅𝔈 ⊼ 𝔰′,𝔄′𝔓′𝔖′𝔇′𝔅′𝔈′. Man sieht, wie sich diese Betrachtungen und Folgerungen fortsetzen lassen, und daß jede zwei homologe Gerade die s, s′; 𝔰, 𝔰′ in entsprechenden Punkten der durch A, B, E; A′, B′, E′; 𝔄, 𝔅, 𝔈; 𝔄′, 𝔅′, 𝔈′ bestimmten Punktreihen schneiden. Dieß sind aber dieselben, die in α) als schon fertig im Voraus construirt angenommen waren. Man kann sich also der Mühe dieser Construction überheben, und braucht bloß vier Punkte jedes Systems beliebig anzunehmen, da, wie bemerkt wurde, E und E′ durch sie schon bestimmt ist, man braucht also nur zwei vollständige Vierecke zu wählen und zu bestimmen, daß sie homologe Vierecke in zwei collinearen Systemen sein, und welcher Punkt des einen A′, B′, 𝔄′, 𝔅′, dem Punkte A, B, 𝔄, 𝔅 des anderen homolog sein soll. Es lassen sich also dieselben (nämlich durch dieselben Vierecke bestimmten) Systeme auf mehrfache Art collinear auf einander beziehen, denn man hätte auch annehmen können, daß B′ dem A, A′ dem B, 𝔅′ dem 𝔄, 𝔄′ dem 𝔅 homolog sein solle ꝛc. Man pflegt jedoch schon durch die Bezeichnung anzudeuten, wie die Vierecke auf einander bezogen werden sollen.

Auflösung 2. Man construire α) zwei aus unendlich vielen Strahlen bestehende, conforme Strahlbüschel S,adcpbe.... ⊼ S′,a′d′c′p′b′e′...., 𝔖,𝔞𝔭𝔡𝔠𝔟𝔢.... ⊼ 𝔖′,𝔞′𝔭′𝔡′𝔠′𝔟′𝔢′.... (dies geschieht am einfachsten, indem man zwei beliebige Punktreihen annimmt, und die Punkte der einen mit zwei beliebigen, außerhalb ihrer Richtung liegenden Punkten S und S′, die der anderen mit zwei anderen Punkten, 𝔖 und 𝔖′ verbindet; so

entstehen nach § 1. Lehrsatz 11. bei S und S′, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ conforme Strahlbüschel). Man suche nun den Durchschnittspunkt jedes Strahls an S mit jedem Strahl an $\mathfrak{S}$, und ebenso von S′ mit jedem an $\mathfrak{S}'$. Von diesen Durchschnittspunkten verbinde man wieder jeden mit jedem Fig. 73b. u. s. w. Es entstehen dadurch eine Menge Punktreihen, z. B. s,ACBE, $\mathfrak{s}$,$\mathfrak{ADBE}$ u. s. w., s′,A′C′B′E′, $\mathfrak{s}'$,$\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'$ u. s. w. Denn man überzeugt sich auf ganz analoge Weise, wie bei Auflösung 1, daß, wenn mehrere Punkte A, C, B; $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ des ersten Systems auf einer Geraden s, $\mathfrak{s}$ liegen, auch die homologen Punkte A′, C′, B′; $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ des zweiten Systems auf je einer Geraden s′, $\mathfrak{s}'$ liegen; und ebenso davon, daß, wenn man den Durchschnittspunkt (s · $\mathfrak{s}$) oder B oder $\mathfrak{B}$ im ersten System mit S und $\mathfrak{S}$, sowie im zweiten (s′ · $\mathfrak{s}'$) mit S′, $\mathfrak{S}'$ durch Gerade verbindet, man entsprechende Strahlen β, β' der Büschel $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ und entsprechende Strahlen b, b′ der Büschel S, S′ erhält; und endlich davon, daß, wenn man homologe Punkte P, P′ beider Systeme mit homologen Punkten A, C, B, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ....; A′, C′, B′, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ .... durch Gerade verbindet, man zwei conforme Strahlbüschel mit dem Scheitel (p · $\mathfrak{p}$) oder P und (p′ · $\mathfrak{p}'$) oder P′ erhält. Daraus folgt weiter, daß die Verbindungsgeraden jedes Paares auf dieselbe Weise entstandener Punkte, z. B. (α · b), (α' · b′), mit den Punktreihen s,ACBE und s′,A′C′B′E′, der Durchschnittspunkte (a · β), (a′ · β') mit den Punkten der Punktreihen $\mathfrak{s}$,$\mathfrak{ADBE}$ und $\mathfrak{s}'$,$\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'$ conforme Strahlbüschel bilden. Verfährt man mit diesen wieder, wie mit den ursprünglichen, so wiederholen sich dieselben Folgerungen. Man erhält also Systeme, in denen lauter conforme Strahlbüschel- und Punktreihenpaare vorkommen. Die Systeme sind also nach Erklärung 6 collinear. Man kann aber auch β) statt ganzer Strahlbüschel nur solche nehmen, die aus drei Strahlen bestehen, und zu jedem Strahl des einen Strahlbüschels erst den entsprechenden im homologen Strahlbüschel suchen. Unter diesen Strahlen wird man am bequemsten den Strahl e oder ε, e′ oder ε' mit annehmen. Es ist dies jedoch gar nicht nöthig, indem durch vier andere Strahlen, a, b; α, β; a′, b′; α', β' derselbe schon gegeben ist (s. Auflösung 1.). Man wird daher aus denselben Gründen, wie sie bei Auflösung 1. entwickelt wurden, lieber γ) zwei vollständige Vierseite ab$\beta\alpha$, a′b′$\beta'\alpha'$ annehmen und festsetzen, a′ solle dem a, b′ dem b, α' dem α, β' dem β homolog sein. Dann läßt sich auch hier direct zeigen, daß man zwei collineare Systeme erhält. Denn es ist nach § 3. Lehrsatz 17. Strahlbüschel S,acbe, $\mathfrak{S}$,$\alpha c\beta\varepsilon$; S′,a′c′b′e′, $\mathfrak{S}'$,$\alpha'c'\beta'\varepsilon'$ harmonisch, also S,acbe $\overline{\wedge}$ S′,a′c′b′e′, $\mathfrak{S}$,$\alpha c\beta\varepsilon$ $\overline{\wedge}$ $\mathfrak{S}'$,$\alpha'c'\beta'\varepsilon'$. Man suche ferner (a · c), (a′ · c′) und verbinde sie mit (b · β), (b′ · β') durch die Geraden $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$ und bestimme die Durchschnitte ($\mathfrak{s}$. m), ($\mathfrak{s}'$ · m′), so ist in den vollständigen Vierseiten $\mathfrak{s}$cmβ und $\mathfrak{s}'$c′m′β' Strahlbüschel A,aαsn und A′,a′α's′n′ harmonisch, also auch die Punktreihen, die auf m, m′ durch die Punkte (m · a), (m · α), (m · s), (m · n); (m′ · a′), (m′ · α'), (m′ · s′), (m′ · n′) gebildet werden und daher Strahlbüschel S,abcd und S′,a′b′c′d′ harmonisch, also

$S, abcd \,\overline{\wedge}\, S', a'b'c'd'$, also auch $S, adcbe \,\overline{\wedge}\, S', a'd'c'b'e'$ und $\mathfrak{s}, \alpha\delta c\beta e \,\overline{\wedge}\, \mathfrak{s}', \alpha'\delta'c'\beta'e'$. Zieht man noch von S und $\mathfrak{s}$, S' und $\mathfrak{s}'$ nach den Punkten $(r \cdot m)$, $(r' \cdot m')$ die Strahlen p, $\mathfrak{p}$; p', $\mathfrak{p}'$, so läßt sich, wie bei Auflösung 1. beweisen, daß auch Strahlbüschel $S, adcpbe \,\overline{\wedge}\, S', a'd'c'p'b'e'$ $\mathfrak{s}, \alpha\mathfrak{p}c\delta\beta e \,\overline{\wedge}\, \mathfrak{s}', \alpha'\mathfrak{p}'c'\delta'\beta'e'$ ist. Man überzeugt sich also, daß man so dieselben Systeme wieder erhält, welche auch die Auflösung α) geliefert hat und hat zugleich die Gewißheit, daß jedes Paar homologer von S und S', $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ ausgehender Geraden p, p'; $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ entsprechende Strahlen in conformen Strahlbüscheln sein müssen. Man sieht auch hier, daß dieselben Vierseite auf verschiedene Weise collinear auf einander bezogen werden können; auch bei ihnen pflegt man schon durch die Bezeichnung anzudeuten, welche Gerade in dem einen System als die homologe einer bestimmten Geraden, z. B. a (oder b, oder α oder β) des anderen angesehen werden soll.

Es war im Vorigen angenommen worden, daß man beide Systeme zugleich entstehen lasse. Man kann aber auch so verfahren δ): Aus einem beliebigen vollständigen Viereck oder Vierseit entwickelt man das von ihm erzeugte System (s. § 6. Lehrsatz 4.); dann suche man ein Paar Punktreihen $s', A'B'C'D'$, $\mathfrak{s}', \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$, die irgend einem Paare Punktreihen in diesem Systemconform sind (vergl. Auflösung α), β)), und entwickle das aus ihnen entstehende System, oder statt der Punktreihen nehme man Strahlbüschel. Kürzer aber verfährt man so: Man markire vier beliebige Punkte A', B', $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, von denen aber keine drei in derselben Geraden liegen, setze fest, daß der Punkt A' irgend einem Punkte des ersten Systems, z. B. dem Punkt A, B' dem B, $\mathfrak{A}'$ dem $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$ dem $\mathfrak{B}$ homolog sein solle (von den Punkten A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dürfen aber nicht drei auf einer Geraden liegen), und construire aus dem von A', B', $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, gebildeten vollständigen Viereck das System, so ist dies collinear dem ersten (s. Auflösung γ)). Statt der Punkte A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; A', B', $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ kann man auch Gerade a, b, α, β; a', b', α', β' nehmen, von denen keine drei durch denselben Punkt gehn. Man kann also zu jedem beliebigen System nicht bloß eins, sondern unzählig viele collineare construiren; einmal deßwegen, weil man statt der vier Punkte A', B', $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ irgend welche andere hätte nehmen können; sodann weil man auch, nachdem sie einmal gewählt sind, hätte festsetzen können, daß z. B. der in A' liegende Punkt dem in B liegenden des ersten Systems, der in B' liegende z. B. dem in A liegenden homolog sein solle. Man hätte dann aus $A'B'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ zwar dieselben Geraden und Punkte, also dasselbe System erhalten, wie vorher, aber in diesem würde nun die Gerade $(\mathfrak{A}' - B')$, die früher der $(\mathfrak{A} - B)$ homolog war, jetzt der $(\mathfrak{A} - A)$ homolog sein u. s. w.

Aus dem Bisherigen folgen nun mehrere Sätze. Einmal aus der Construction, sowie aus dem Umstand, daß jede zwei homologen Punkte entsprechende Punkte conformer Punktreihen, und jede zwei homologe Gerade entsprechende Strahlen conformer Strahlbüschel sein müssen, es aber zu jedem Punkt der einen nur einen einzigen entspre-

chenden der anderen Punktreihe, zu jedem Strahl des einen nur einen entsprechenden Strahl des anderen Strahlbüschels giebt nach § 2. Lehrsatz 10. folgt der

13. Lehrsatz. In zwei collinearen Systemen giebt es zu jedem Punkt des einen Systems einen, aber auch **nur einen** homologen Punkt des anderen Systems. Fig. 73a. 73b.

13. Lehrsatz. In zwei collinearen Systemen giebt es zu jeder Geraden des einen Systems eine, aber auch **nur eine** homologe Gerade des anderen Systems. Fig. 73a. 73b.

Ebenso ergiebt sich aus der Construction:

14. Lehrsatz. Liegt in einem von zwei collinearen Systemen ein Punkt auf einer Geraden, so liegt der homologe Punkt im zweiten System auf der homologen Geraden. Fig. 73a. 73b.

14. Lehrsatz. Geht in einem von zwei collinearen Systemen eine Gerade durch einen Punkt, so geht die homologe Gerade im zweiten System durch den homologen Punkt. Fig. 73a. 73b.

Ferner:

15. Lehrsatz. Einer durch die geradlinige Verbindung zweier Punkte des einen von zwei collinearen Systemen entstandenen Geraden ist die durch die geradlinige Verbindung der homologen Punkte des anderen Systems entstandene Gerade homolog. Fig. 73a. 73b.

15. Lehrsatz. Einem durch den Durchschnitt zweier Geraden des einen von zwei collinearen Systemen entstandenen Punkt ist der durch den Durchschnitt der homologen Geraden des anderen Systems entstandene Punkt homolog. Fig. 73a. 73b.

Endlich ergiebt sich aus der Auflösung 1); 2). der Aufgabe 12. der

16. Lehrsatz. Das zu einem gegebenen System collineare System ist vollständig bestimmt:

α) wenn von beiden zwei conforme Punktreihen $s, ADCB \ldots . \overline{\wedge}\, s', A'D'C'B' \ldots .$; $\mathfrak{s}, \mathfrak{ADCB} \ldots . \overline{\wedge}\, \mathfrak{s}', \mathfrak{A}'\mathfrak{D}'\mathfrak{C}'\mathfrak{B}' \ldots .$ gegeben sind;

β) wenn von beiden je zwei Richtungen $s, s', \mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ und auf jeder drei Punkte A, C, B; A', C', B'; $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{B}$; $\mathfrak{A}', \mathfrak{C}', \mathfrak{B}'$

16. Lehrsatz. Das zu einem gegebenen System collineare System ist vollständig bestimmt:

α) wenn von beiden zwei conforme Strahlbüschel $S, adcb \ldots . \overline{\wedge}\, S', a'd'c'b' \ldots .$; $\mathfrak{S}, \mathfrak{adcb} \ldots . \overline{\wedge}\, \mathfrak{S}', \mathfrak{a}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{b}' \ldots .$ gegeben sind;

β) wenn von beiden je zwei Punkte S, S'; $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$, und an jedem drei Strahlen a, c, b; a', c', b'; $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}', \mathfrak{c}', \mathfrak{b}'$ ge-

gegeben sind, und festgesetzt ist, daß A' dem A, B' dem B, C' dem C, $\mathfrak{A}'$ dem $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$ dem $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}'$ dem $\mathfrak{C}$ homolog sein solle;

γ) wenn von beiden vier Punkte gegeben sind, A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; A', B', $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und bestimmt ist, daß A' dem A, B' dem B, $\mathfrak{A}'$ dem $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$ dem $\mathfrak{B}$ homolog sein solle; oder: das zu einem gegebenen System collineare System ist vollständig bestimmt, wenn von beiden zwei homologe vollständige Vierecke $AB\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $A'B'\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ gegeben sind. Fig. 73a.

geben sind, und festgesetzt ist, daß a' dem a, b' dem b, c' dem c, α' dem α, β' dem β, $\mathfrak{c}'$ dem $\mathfrak{c}$ homolog sein solle;

γ) wenn von beiden vier Gerade gegeben sind, a, b, α, β; a', b', α', β', von denen keine drei sich in einem Punkte schneiden, und bestimmt ist, daß a' dem a, b' dem b, α' dem α, β' dem β homolog sein solle; oder das zu einem gegebenen System collineare System ist vollständig bestimmt, wenn von beiden zwei homologe vollständige Vierseite $ab\alpha\beta$, $a'b'\alpha'\beta'$ gegeben sind. Fig. 73b.

Aus dem Satze γ), der nur eine Wiederholung von § 6. Lehrsatz 4. ist, folgt unmittelbar der

17. Lehrsatz. Wenn in zwei collinearen Systemen vier Punkte des einen Systems, die nicht auf derselben Geraden liegen, A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, je mit den homologen Punkten des anderen Systems A', B', $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ zusammenfallen, oder:

Wenn zwei collineare Systeme mit einem Paare homologer vollständiger Vierecke $AB\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $A'B'\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ zusammenfallen, so fallen beide Systeme so zusammen, daß jeder Punkt des einen auf den homologen Punkt des andern, jede Gerade des einen auf die homologe Gerade des anderen Systems zu liegen kommt.

17. Lehrsatz. Wenn in zwei collinearen Systemen vier Gerade des einen Systems, die sich nicht in demselben Punkte schneiden, a, b, α, β, je mit den homologen Geraden des anderen Systems a', b', α', β', zusammenfallen, oder:

Wenn zwei collineare Systeme mit einem Paare homologer vollständiger Vierseite $ab\alpha\beta$, $a'b'\alpha'\beta'$ zusammenfallen, so fallen beide Systeme so zusammen, daß jede Gerade des einen auf die homologe Gerade des anderen, jeder Punkt des einen auf den homologen Punkt des andern Systems zu liegen kommt.

18. Erklärung. Von zwei Systemen die zur Bestimmung ihrer Collineation nöthigen, im Lehrsatz 16.

angegebenen Stücke als homolog festsetzen, heißt: „**Die Systeme collinear auf einander beziehen**".

Man sieht also, um noch einmal auf den Anfang des § 6. zurückzukommen, aus Lehrsatz 16.; daß wenn zwei Figuren auf einander projicirt werden sollen, von vier Paaren von Punkten oder Geraden willkürlich festgestellt werden kann, der eine, z. B. A′ solle mit A in Projection stehn 2c., daß aber dadurch von selbst zugleich mit bestimmt ist, welche von den übrigen Punkten oder Geraden außer den vier angenommenen in Projection stehn, daß also über sie vorher nichts bestimmt werden kann.

Sind Fig. 74. in zwei collinearen Systemen zwei Paar homologer Punktreihen bekannt s,FASQ $\overline{\wedge}$ s,′F′A′S′Q′; ſ,SCMR $\overline{\wedge}$ ſ,′S′C′M′R′ und liegen Q′ und R′ im Unendlichen, so sind die ihnen homologen Punkte Q und R die Gegenpunkte der auf s und ſ befindlichen Punktreihen. Ist nun ferner 𝔔 ein Punkt der Punktreihe s und zwar der unendlich entfernte, so ist der homologe Punkt 𝔔′ der conformen Punktreihe s′ der Gegenpunkt derselben und ist 𝔎 der unendlich entfernte Punkt der Reihe ſ, so ist der homologe Punkt 𝔎′ der Gegenpunkt der Punktreihe auf ſ′. Wird nun QR im ersten System gezogen, so liegt die ihr homologe Gerade im zweiten System im Unendlichen, und wird 𝔔′𝔎′ im zweiten System gezogen, so liegt die ihr homologe Gerade im ersten System im Unendlichen. Trifft nun die Gerade g des ersten Systems die (R—Q) oder m in P, so liegt da m′ im zweiten System sich im Unendlichen befindet, der dem Punkt P homologe P′ im Unendlichen. Schneiden sich zwei Gerade, z. B. (C—F) und (K—A) des ersten Systems auf m, so müssen sich (C′—F′) und (K′—A′) im zweiten im Unendlichen schneiden, also parallel sein, schneiden sich (D′—H′) und (E′—K′) im Punkte 𝔐′ der (𝔎′—𝔔′) oder p′, so müssen sich (D—H) und (E—K) im Unendlichen auf p schneiden, also parallel sein. In den verzeichneten collinearen Figuren FABMCHKEGD und F′A′B′M′C′H′K′E′G′D′ sind also, da im ersten System (F—A) und (G—D) sich im Punkt Q der m schneiden, die Geraden (F′—A′) und (G′—D′) parallel, da sich (H—F) und (B—A) im Punkt P der m schneiden, sind (H′—F′) und (B′—A′) parallel. Da ferner im zweiten System sich (E′—K′) und (G′—D′) im Punkt 𝔐′ der p′ schneiden, sind (E—K) und (G—D) parallel, und da (M′—B′) und (G′—E′) sich im Punkt 𝔑′ der p′ schneiden, sind (M—B) und (G—E) parallel. Es geht zugleich aus dem Bisherigen hervor, daß es in jedem System nur eine einzige Gerade m, p′ geben kann, die einer unendlich entfernten Geraden m′, p des andern Systems homolog ist. Denn gäbe es z. B. im ersten System noch eine solche Linie, die z. B. die Gerade g in Π schnitte, so müßte sowohl g,KBAP als g,KBAΠ $\overline{\wedge}$ g,′K′B′A′∞ sein, was nach § 2. Lehrsatz 10. unmöglich ist. Da ferner nach Lehrsatz 13. einer Geraden (R—Q) nur eine einzige Gerade (R′—Q′) des andern Systems homolog sein kann, und diese, wenn zwei Punkte, R′ und Q′

im Unendlichen liegen, ganz im Unendlichen liegen und folglich durch den unendlich entfernten Punkt der Geraden b′, e′ ꝛc. gehen muß, so kann man sagen:

19. Erklärung. Die Gerade m, p′, des einen Systems, welche der unendlich entfernten Geraden m′, p des andern Systems homolog ist, heißt **Gegenaxe** des Systems, in dem sie liegt. Fig. 74.

und also:

20. Lehrsatz. Jedes System hat nur **eine einzige** Gegenaxe m, p′ und **eine einzige** unendlich entfernte Gerade m′, p, auf welcher man sich den unendlich entfernten Punkt einer jeden Punktreihe liegend vorzustellen hat.

21. Lehrsatz. Zwei Geraden des einen Systems, die sich auf der Gegenaxe desselben schneiden, sind zwei parallele Gerade des andern Systems homolog, und umgekehrt:

Sind zwei Gerade des einen Systems parallel, so schneiden sich die ihnen homologen Geraden des andern Systems auf der Gegenaxe desselben. Fig. 74.

Es war bereits zum Behufe des Lehrsatzes 3. gezeigt worden, daß jedes Paar homologer, den Gegenaxen paralleler Gerader r, r; u, u′ ...., Fig. 71. proportional getheilt wird. Es ist aber leicht zu sehen, daß auch nur diesen Geraden die genannte Eigenschaft zukommt. Denn würden noch ein Paar, den Gegenaxen nicht paralleler Geraden, a, a′ proportional getheilt, so wären auch ihre unendlich entfernten Punkte homolog nach § 3. Lehrsatz 23. Es wäre also die Verbindungsgerade der unendlich entfernten Punkte von r und a homolog der Verbindungsgeraden der unendlich entfernten Punkte r′ und a′. Beide liegen aber im Unendlichen. Man müßte sich also nach Lehrsatz 20. auf jeder die unendlich entfernten Punkte aller Geraden des Systems, zu dem sie gehört, liegend vorstellen. Also wären auf allen Geraden beider Systeme die unendlich entfernten Punkte homolog, mithin nach § 3. Lehrsatz 22. jedes Paar homologer Punktreihen proportional, ein Fall, der durch Lehrsatz 5. vorläufig ausgeschlossen ist.

22. Lehrsatz. Jedes Paar homologer, den Gegenaxen m, p′ paralleler Geraden r, r′; u, u′; s, s′; t, t′; aber auch **nur** diese in zwei collinearen Systemen, in denen **nicht alle** homologe Punktreihen proportional getheilt sind, wird in homologen Punkten proportional (§ 3. Erklärung 21.) getheilt. Fig. 71.

Wollen wir uns jetzt über die Verhältnisse, die durch die verschiedene Lage zweier collinearen Systeme bedingt sind, orientiren, so haben wir zunächst Folgendes zu bemerken: Gesetzt, es hätten zwei collineare Systeme einen Punkt Σ der Art gemein, daß in ihm ein Paar

homologer Punkte der beiden Systeme vereinigt wären, daß also, wenn man zu dem Punkte Σ im ersten Systeme den homologen Σ' im zweiten System suchte, dieser wieder nach Σ fällt, so folgt aus Lehrsatz 14., daß, wenn eine Gerade a des ersten Systems durch Σ geht, auch die ihr homologe Gerade a' durch Σ gehen muß, denn sie müßte nach dem angeführten Lehrsatz durch Σ' gehen, Σ' aber fällt mit Σ zusammen. Ein Gleiches findet mit jedem Paar homologer Geraden b und b', c und c', d und d' u. s. w. statt, von denen b, c, d durch Σ gehen, indem dann auch b', c', d' durch Σ gehen müssen. Es sind also in Σ die Scheitel zweier homologen Strahlbüschel Σ,abcd.... und Σ',a'b'c'd'.... vereinigt. Es ist jedoch damit, daß Σ und Σ' zusammenfallen, noch nicht gesagt, daß auch jedes Paar homologer Strahlen a und a', b und b' u. s. w. zusammenfallen muß, vielmehr liegen diese Strahlen nur conjectivisch, und es **kann** vorkommen, daß ein Strahl a' mit a, oder daß zwei Strahlen a', b' mit a, b, oder daß nach § 4. Lehrsatz 1., jeder Strahl a', b', c'.... mit dem ihm homologen a, b, c.... zusammenfällt, aber es **muß** nicht. Hätten ebenso zwei collineare Systeme eine Gerade σ der Art gemein, daß in ihr ein Paar homologe Gerade der beiden Systeme vereinigt wären, daß also auch σ' nach σ fiele, und liegen auf der Geraden des ersten Systems σ die Punkte A, B, C, D.... des ersten Systems, so müssen nach Lehrsatz 14. auch die Punkte A', B', C', D'.... des zweiten Systems auf σ', oder da σ' mit σ zusammenfällt auf σ liegen. Es sind also auf σ zwei homologe Punktreihen σ,ABCD.... und σ',A'B'C'D'.... in conjectivischer Lage vereinigt. Auch hier kann es vorkommen, daß ein Punkt A' mit dem ihm homologen A, oder A', B' mit A, B, oder nach § 4. Lehrsatz 1. jeder Punkt A', B', C'.... mit dem ihm homologen A, B, C.... zusammenfällt. Man sieht also:

23. **Lehrsatz.** Fallen zwei homologe Punkte Σ und Σ' zweier collinearen Systeme in einem Punkt Σ zusammen, so befindet sich ein Paar homologer Strahlbüschel beider Systeme Σ,abcd...., Σ',a'b'c'd'.... an diesem Punkt Σ in conjectivischer Lage.

23. **Lehrsatz.** Fallen zwei homologe Gerade σ und σ' zweier collinearen Systeme in eine Gerade σ zusammen, so befindet sich ein Paar homologer Punktreihen beider Systeme σ,ABCD...., σ'A'B'C'D'.... auf dieser Gerade σ in conjectivischer Lage.

Die ursprüngliche, in Fig. 70. dargestellte, Lage zweier collinearen Systeme war nun die, daß sich die Verbindungsgeraden jeder zwei Punkte, welche dieselbe geometrische Bedeutung haben, oder nach unserer jetzigen Ausdrucksweise (s. Erklärung 7.) jeder zwei homologen Punkte durch einen und denselben Punkt Σ gehen, und als nothwendig damit verknüpft wurde bewiesen (s. Lehrsatz 2.), daß dann die Durchschnittspunkte jeder zwei Geraden von derselben geometrischen Bedeutung, d. h.

jeder zwei homologen Geraden auf einer und derselben Geraden σ liegen. Hieraus folgt aber dieses: der Strahl a, der die homologen Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ verbindet, schneidet die Gerade α in $\mathfrak{O}$, α' in $\mathfrak{O}'$. Es muß nun offenbar $\mathfrak{O}'$ der dem $\mathfrak{O}$ homologe Punkt des zweiten Systems sein. Denn die Systeme sollen ja eine solche Lage haben, daß die Verbindungsgeraden jeder zwei homologen Punkte durch einen und denselben Punkt Σ gehen Nun liegt $\mathfrak{O}$ auf α, also muß auch $\mathfrak{O}'$ auf α' liegen, nach Lehrsatz 14. Ferner muß $\mathfrak{O}'$ auf $(\mathfrak{O}-\Sigma)$ sich befinden, da $(\mathfrak{O}-\mathfrak{O}')$ durch Σ gehen soll, es muß also der Durchschnittspunkt von $(\mathfrak{O}-\Sigma)$ mit α', oder von a mit α' der dem Punkt $\mathfrak{O}$ homologe sein, da es zu $\mathfrak{O}$ nur einen einzigen homologen giebt nach Lehrsatz 13.; ebenso muß, wenn β den Strahl a in V, a' in V' trifft, V' der dem V homologe Punkt sein, ebenso W' der dem W homologe u. s. w. Kurz, es müssen auf jedem von Σ ausgehenden Strahle ein Paar homologer Punktreihen $(\mathfrak{A}-\mathfrak{O})$ und $(\mathfrak{A}'-\mathfrak{O}')$; $(A-V)$ und $(A'-V')$, $(\mathfrak{B}-W)$ und $(\mathfrak{B}'-W')$ u. s. w. vereinigt sein, nach Lehrsatz 15. Es muß also Σ ein sich selbst homologer Punkt beider Systeme sein. Denn dem Durchschnittspunkt Σ der Geraden $(\mathfrak{A}-\mathfrak{O})$ und $(A-V)$ des ersten Systems ist der Durchschnittspunkt Σ' der Geraden $(\mathfrak{A}'-\mathfrak{O}')$ und $(A'-V')$ des zweiten Systems homolog. Da nun $(\mathfrak{A}-\mathfrak{O})\cdot(A-V)$ mit $(\mathfrak{A}'-\mathfrak{O}')\cdot(A'-V')$ zusammenfällt, so fällt Σ' nach Σ d. h. Σ ist ein sich selbst homologer Punkt beider Systeme, und Strahlbüschel $\Sigma,\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$ ein sich selbst homologer Strahlbüschel beider Systeme, indem auf jedem Strahl a oder $(\mathfrak{A}-\mathfrak{O})$ des ersten Systems auch der homologe Strahl a' oder $(\mathfrak{A}'-\mathfrak{O}')$ des zweiten liegt. Denkt man sich ferner vom Punkt U der Geraden σ eine Gerade $(U-A)$ gezogen, und sucht die ihr homologe des zweiten Systems, so muß dieselbe durch A' gehen nach Lehrsatz 14., ferner aber muß die der $(U-A)$ homologe Gerade die $(U-A)$ auf der Geraden σ schneiden, weil sich homologe Gerade auf σ schneiden sollen, es muß also $(U-A')$ die der $(U-A)$ homologe Gerade des zweiten Systems sein, da es nach Lehrsatz 13. nur eine einzige homologe Gerade giebt. Ebenso muß, wenn man $(Y-B)$ zieht, $(Y-B')$, wenn man $(Z-\mathfrak{B})$ zieht, $(Z-\mathfrak{B}')$ die homologe Gerade des zweiten Systems sein u. s. w. Es ist also U der Durchschnittspunkt von $(S-\mathfrak{A})$ und $(A-U)$ und der homologen Geraden $(S'-\mathfrak{A}')$ und $(A'-U)$, Y der Durchschnittspunkt von $(S-\mathfrak{S})$ und $(B-Y)$ und der homologen Geraden $(S'-\mathfrak{S}')$ und $(B'-Y)$, Z der Durchschnittspunkt von $(\mathfrak{A}-A)$ und $(\mathfrak{B}-Z)$ und der homologen Geraden $(\mathfrak{A}'-A')$ und $(\mathfrak{B}'-Z)$ u. s. w., es sind also U, Y, Z u. s. w. sich selbst homologe Punkte beider Systeme, kurz, es müssen in jedem auf σ befindlichen Punkte ein Paar sich selbst homologer Punkte vereinigt sein, zugleich muß nach Lehrsatz 15. σ eine sich selbst homologe Gerade beider Systeme sein, da der Geraden $(U-Y)$ des einen dieselbe Gerade $(U-Y)$ des andern homolog ist; oder es ist die Punktreihe σ,UYZ.... eine sich selbst homologe Punktreihe beider Systeme, indem in jedem Punkt U, Y, Z, ... des ersten Systems auch der homologe Punkt U' Y' Z'.... des zweiten liegt.

Sagen wir nun der Kürze wegen:

24. Erklärung. Von zwei in derselben Ebene liegenden collinearen Systemen, die mit einem Paar homologer Punkte, Gerader, Punktreihen, Strahlbüschel zusammenfallen: „die Systeme haben bezüglich einen Punkt, eine Gerade, eine Punktreihe, einen Strahlbübüschel **gemein**," oder „es sind auf einer Geraden ein Paar homologer Punktreihen, in einem Punkte ein Paar homologer Strahlbüschel **vereinigt**."

so ist noch mit Berücksichtigung von Lehrsatz 3., Erklärung 7. und § 4. Lehrsatz 1. zu berücksichtigen:

25. Lehrsatz. Haben zwei ebene Systeme eine Punktreihe gemein, so können sie entweder keinen, oder zwei oder alle Punkte derselben gemein haben.

Im ersten Falle soll auch öfter gesagt werden: sie haben eine Gerade, nämlich die Richtung der Punktreihe, gemein.

25. Lehrsatz. Haben zwei ebene Systeme einen Strahlbüschel gemein, so können sie entweder keinen, oder zwei, oder alle Punkte desselben gemein haben.

Im ersten Falle soll auch öfter gesagt werden: sie haben einen Punkt, nämlich den Scheitel des Strahlbüschels gemein.

Nach Erklärung 24. können wir nun das an Fig. 70. Bewiesene in Folge von Lehrsatz 2. zusammenfassen in den

26. Lehrsatz. Haben zwei ebene Systeme einen Strahlbüschel $\Sigma,\alpha\beta\gamma\ldots.$ mit allen seinen Strahlen gemein, so haben sie auch eine Punktreihe σ,UYZ.... mit allen ihren Punkten gemein. Fig. 70.

26. Lehrsatz. Haben zwei ebene Systeme eine Punktreihe σ,UYZ.... mit allen ihren Punkten gemein, so haben sie auch einen Strahlbüschel $\Sigma,\alpha\beta\gamma\ldots.$ mit allen seinen Strahlen gemein. Fig. 70.

Haben nun zwei collineare Systeme einen Strahlbüschel $\Sigma,\alpha\beta\gamma\ldots.$ Fig. 70. mit allen Strahlen gemein, so liegen, da auf jedem Strahl α ein Paar homologer Punktreihen (𝔄—𝔒), (𝔄′—𝔒′) vereinigt sind, und also auch (C—C′), (D—D′), (𝔖—𝔖′) (𝔇—𝔇′) u. s. w. durch Σ gehen, jedes Paar homologer Punktreihen, z. B. s,ABCD und s′,A′B′C′D′, 𝔰,𝔄𝔖𝔇𝔅 und 𝔰′,𝔄′𝔖′𝔇′𝔅′ u. s. w. für das Centrum Σ perspectivisch mit einziger Ausnahme derjenigen Punktreihen α,Σ𝔄𝔒M und α,Σ𝔄′𝔒′M, β,ΣVAN und β,ΣV′A′N u. s. w., die auf den Strahlen des gemeinschaftlichen Strahlbüschels $\Sigma,\alpha\beta\gamma\ldots.$ vereinigt sind. Diese sind nach Lehrsatz 3. und Erklärung 8. conform und liegen nach § 2. und Erklärung 19. conjectivisch. Zugleich liegt auch jedes Paar homologer

Strahlbüschel S,abdc und S′,a′b′d′c′, $\mathfrak{S},\mathfrak{abdc}$ und $\mathfrak{S}',\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{d}'\mathfrak{c}'$ u. s. w. für die Axe σ perspectivisch, mit einer Ausnahme. Zieht man nämlich von irgend einem Punkte der gemeinsamen Punktreihe σ,UYZ.... z. B. von U die homologen Geraden $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}'$, oder (U–$\mathfrak{V}$) und (U–$\mathfrak{V}'$), (U–A) und (U–A′), (U–B) und (U–B′) u. s. w., so entstehen nach Lehrsatz 3. und Erklärung 8. conforme Strahlbüschel, die nach § 2. Erklärung 19. conjectivisch liegen; kein Paar homologer Grundgebilde aber liegt projectivisch. Da ganz analoge Schlüsse gelten, wenn man davon ausgeht, daß zwei collineare Systeme eine Punktreihe σ,UYZ.... mit allen Punkten gemein haben, so sieht man also:

27. Lehrsatz. Befinden sich zwei collineare Systeme in derselben Ebene, und haben sie einen Strahlbüschel $\Sigma,\alpha\beta\gamma$.... mit allen Strahlen und eine Punktreihe σ,UYZ.... mit allen Punkten gemein; so liegen alle übrigen Punktreihen theils, wie s,ABCD und s′,A′B′C′D′ etc. für dasselbe Projectionscentrum Σ perspectivisch, theils, wie $\alpha,\Sigma\mathfrak{A}\mathfrak{V}$M und $\alpha,\Sigma\mathfrak{A}'\mathfrak{V}'$M etc. conjectivisch. Die Richtungen der letzteren gehen alle durch den sich selbst homologen Punkt Σ. Kein Paar homologer Punktreihen aber liegt projectivisch. Fig. 70.

27. Lehrsatz. Befinden sich zwei collineare Systeme in derselben Ebene und haben sie eine Punktreihe σ,UYZ.... mit allen Punkten und einen Strahlbüschel $\Sigma,\alpha\beta\gamma$.... mit allen Strahlen gemein; so liegen alle übrigen Strahlbüschel theils, wie S,abdc und S′,a′b′d′c′ etc. für dieselbe Projectionsaxe σ perspectivisch, theils, wie U,$\sigma\mathfrak{u}$aμ und U,$\sigma\mathfrak{u}'$a′μ etc. conjectivisch. Die Scheitel der letzteren liegen alle auf der sich selbst homologen Geraden σ. Kein Paar homologer Strahlbüschel aber liegt projectivisch. Fig. 70.

Und umgekehrt kann man sagen:

28. Lehrsatz. Befinden sich zwei collineare Systeme in derselben Ebene und in solcher Lage, daß drei oder mehr Paar homologer Punktreihen conjectivisch liegen und durch denselben Punkt Σ gehen, so haben die Systeme auch einen Strahlbüschel $\Sigma,\alpha\beta\gamma$ mit allen Strahlen, und folglich auch eine Punktreihe σ,UYZ.... mit allen Punkten gemein. Fig. 70.

28. Lehrsatz. Befinden sich zwei collineare Systeme in derselben Ebene und in solcher Lage, daß drei oder mehr Paar homologer Strahlbüschel conjectivisch liegen und mit ihren Scheiteln auf derselben Geraden σ liegen, so haben die Systeme auch eine Punktreihe σ,UYZ.... mit allen Punkten, und folglich auch einen Strahlbüschel $\Sigma,\alpha\beta\gamma$.... mit allen Strahlen gemein. Fig. 70.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich sofort aus Fig. 70., indem, wenn α, β, γ, die Richtungen der conjectivisch liegenden Punktreihen, U, Y, Z die Scheitel der conjectivisch liegenden Strahlbüschel sind, im Falle links der mit allen Strahlen sich selbst homologe Strahlbüschel $\Sigma, \alpha\beta\gamma$ ...., im Falle rechts die mit allen Punkten sich selbst homologe Punktreihe σ,UYZ .... entsteht.

Dieß waren also die Folgerungen, die sich ergaben aus dem Falle, der die Grundlage der ganzen Untersuchung bildete, daß nämlich die collinearen Systeme einen Strahlbüschel $\Sigma, \alpha\beta\gamma$ .... mit allen Strahlen, oder eine Punktreihe σ,UYZ.... mit allen Punkten gemein haben. Es können aber offenbar die Systeme, wenigstens dem ersten Anschein nach, so liegen, daß sie

I. kein Paar homologer Grundgebilde
II. ein " " "
III. zwei " " "
IV. drei " " "
u. s. w.

gemein haben, und zwar können in den gemeinschaftlichen Grundgebilden wieder 1. oder 2. homologe Elemente vereinigt sein; der Fall, wo 2 gemeinschaftliche Grundgebilde mit 3 Elementen und also ganz zusammenfallen soll, da er bereits durch die Lehrsätze 26., 27., 28. erledigt ist, im Folgenden ausgeschlossen werden. Zugleich aber bemerkt man, daß die angegebene Reihenfolge in der Untersuchung nicht wohl festgehalten werden kann; denn haben z. B. zwei Systeme einen Strahlbüschel S mit einem Strahl s gemein, so könnte man ebenso gut auch sagen: sie haben eine Punktreihe s mit einem Punkte S gemein; hätten sie zwei Strahlbüschel S_1, S_2 gemein, so hätten sie offenbar nach Lehrsatz 15 auch die Gerade ($S_1 \frown S_2$) gemein u. s. w.; kurz man würde immer von einem Falle in einen anderen kommen. Wir ordnen daher lieber, statt nach der Anzahl der Grundgebilde, die zwei Systeme gemein haben, nach der Anzahl der Elemente, also der Punkte und Geraden, die sie gemein haben; sagen also: zwei Systeme können gemein haben:

I. 0 Paar homologer Elemente; und zwar:
A) 0 Paar Punkte; B) 0 Paar Gerader
II. 1 Paar homologer Elemente; und zwar:
A) 1 Paar Punkte; B) 1 Paar Gerader
III. 2 Paar homologer Elemente; und zwar:
A) 2 Paar Punkte; B) 2 Paar Gerader
C) 1 Paar Punkte und Paar Gerader.
u. s. w.

Die Untersuchung dieser Verhältnisse wird wesentlich durch folgende Betrachtungen erleichtert:

Es sei in zwei collinearen Systemen s,AB.... und s′,A′B′.... Fig. 75a. ein Paar homologer Punktreihen, die für einen Punkt Σ perspectivisch liegen. Zunächst ist dann der Durchschnittspunkt (s · s′)

oder D (oder D′) ein sich selbst homologer Punkt und folglich der Scheitel eines Strahlbüschels, in dem ein Paar homologer Büschel vereinigt sind, da der von Σ nach D gezogene Strahl d der Voraussetzung nach beide Geraden s und s′ in homologen Punkten trifft. Ist nun 1) Σ ein sich selbst homologer Punkt, so ist also (Σ—D) oder d eine sich selbst homologe Gerade; zugleich aber ist auch dann (Σ—A) homolog (Σ—A′), (Σ—B) homolog (Σ—B′) u. s. w. Es ist also der Strahlbüschel Σ,abd.... mit allen Strahlen sich selbst homolog, Ist 2) Σ nicht sich selbst homolog, und liegt, wenn man Σ als Punkt des einen, z. B. des ersten Systems, ansieht, der ihm homologe Punkt des anderen, z. B. des zweiten Systems*) α) auf der Geraden (Σ—D) in Σ′, so ist also (Σ—D) homolog (Σ′—D′), also ist dann (Σ—D) eine sich selbst homologe Gerade und enthält also eine sich selbst homologe Punktreihe mit einem sich selbst homologen Punkt D; ob noch ein sich selbst homologer Punkt auf d liege, kommt hier nicht in Betracht. Liegt β) der dem Σ homologe Punkt nicht auf (D—Σ), sondern z. B. in Σ″, so ziehe man (Σ″—Σ). Da diese Gerade ein Strahl des Strahlbüschels Σ,abd ist, dessen Strahlen der Voraussetzung nach die homologen Geraden s und s′ in homologen Punkten treffen, so sind die Durchschnittspunkte G, G′ mit s, s′ homolog, es ist also (Σ—G) homolog (Σ″—G′), also ist (Σ″—Σ) oder g eine sich selbst homologe Gerade, und also liegen auf ihr ein Paar homologer Punktreihen. — Sind ebenso in zwei collinearen Systemen ein Paar homologer Strahlbüschel S,ab.... und S′,a′b′.... Fig 75b. für eine Gerade σ perspectivisch, so ist zunächst die Verbindungsgerade (S—S′) oder d (oder d′) eine sich selbst homologe Gerade, und folglich die Richtung, in der ein Paar homologer Punktreihen vereinigt ist. Ist nun 1) σ eine sich selbst homologe Gerade, so ist also (σ · d) oder D ein sich selbst homologer Punkt. Zugleich ist dann auch (σ · a) homolog (σ · a′), (σ . b) homolog (σ . b′) u. s. w. Es ist also die Punktreihe σ,ABD.... mit allen Punkten sich selbst homolog. Ist 2) σ nicht sich selbst homolog und geht, wenn man σ als Gerade des einen Systems, z. B. des ersten ersieht, die ihr homologe Gerade σ′ des andern Systems α) durch (σ · d), so ist also (σ · d) homolog (σ′ · d′), also ist dann (σ · d) ein sich selbst homologer Punkt und enthält also den Scheitel zweier vereinigten homologen Strahlbüschel mit einem sich selbst homologen Strahl d. Geht β) die der σ homologe Gerade nicht durch (σ · d), sondern hat sie z. B. die Lage σ″, so bestimme man den

---

*) Es ist offenbar einerlei, ob man Σ als im ersten oder zweiten System liegend betrachtet (vgl. § 6. Lehrsatz 6.). Denn sieht man Σ als Punkt des ersten an, und liegt der homologe Punkt Σ′ des zweiten Systems auf d; und sieht nun Σ als Punkt des zweiten Systems an, so liegt dieser also auf (D′—Σ′); der dem Punkt Σ′ des zweiten Systems homologe des ersten ist aber Σ; es muß also der dem Punkt Σ im zweiten System homologe Punkt Σ_1 des ersten auf (D—Σ), liegen, also auch auf d.

Punkt ($\sigma''.\sigma$). Da dieser ein Punkt der Punktreihe σ,ABD ist, in deren Punkten der Voraussetzung nach die homologen Strahlen der homologen Strahlbüschel S, S′ sich schneiden, so müssen die Verbindungsgeraden (G—S), (G—S′) oder g, g′ sich homolog sein; es ist also ($\sigma \cdot$ g) homolog ($\sigma'' \cdot$ g′) oder G ein sich selbst homologer Punkt; also liegen an ihm ein Paar sich selbst homologer Strahlbüschel. Man erhält also den Satz:

29. Lehrsatz. Befinden sich zwei collineare Systeme in derselben Ebene und in solcher Lage, daß ein Paar homologer Punktreihen s,AB.... und s′,A′B′.... für ein Projectionscentrum Σ perspectivisch liegt und ist

1) Σ ein sich selbst homologer Punkt, so haben die Systeme einen Strahlbüschel, dessen Scheitel Σ ist, mit allen Strahlen gemein; ist aber

2) Σ kein sich selbst homologer Punkt und liegt

α) der dem Punkt Σ des einen Systems homologe Punkt Σ' des anderen auf der Verbindungsgeraden d von Σ mit dem Durchschnittspunkte (s $\cdot$ s′) oder D, so haben sie eine sich selbst homologe Gerade d und auf ihr wenigstens **einen** sich selbst homologen Punkt D gemein; es ist also D der Scheitel eines beiden Systemen gemeinsamen Strahlbüschels, in welchem wenigstens **ein** Strahl, (D—Σ) oder d sich selbst homolog ist; liegt aber

β) der dem Punkt Σ des einen Systems homologe Punkt des anderen nicht auf der Geraden (D—Σ), so haben

29. Lehrsatz. Befinden sich zwei collineare Systeme in derselben Ebene und in solcher Lage, daß ein Paar homologer Strahlbüschel S,ab.... und S′,a′b′.... für eine Projectionsaxe σ perspectivisch liegt und ist

1) σ eine sich selbst homologe Gerade, so haben die Systeme eine Punktreihe, deren Richtung σ ist, mit allen Punkten gemein; ist aber

2) σ keine sich selbst homologe Gerade und geht

α) die der Geraden σ des einen Systems homologe Gerade σ' des andern durch den Durchschnittspunkt D von σ mit der Verbindungsgeraden (S—S′) oder d, so haben sie einen sich selbst homologen Punkt D und wenigstens **eine** durch ihn gehende sich selbst homologe Gerade d gemein; es ist also d die Richtung einer beiden Systemen gemeinsamen Punktreihe, auf welcher wenigstens **ein** Punkt (d $\cdot\, \sigma$) sich selbst homolog ist; geht aber

β) die der Geraden σ des einen Systems homologe Gerade des andern nicht durch den Punkt (d $\cdot\, \sigma$), so

beide Systeme eine nicht durch d, sondern durch Σ gehende Gerade g und den Punkt D gemein; es ist also D der Scheitel eines gemeinsamen Strahlbüschels und die durch Σ gehende gemeinsame Gerade g die Richtung einer gemeinsamen Punktreihe. Fig. 75a.

haben beide Sststeme einen nicht auf d, sondern auf σ liegenden Punkt G und die Gerade d gemein; es ist also d die Richtung einer gemeinsamen Punktreihe und der auf σ liegende gemeinsame Punkt G der Scheitel eines gemeinsamen Strahlbüschels. Fig. 75b.

Liegen zwei collineare Systeme so, daß sie eine Gerade σ gemein haben, Fig. 76a, und also auch ein Paar Punktreihen auf ihr vereinigt sind; es seien aber die vereinigten Punktreihen so gelegen, daß kein Paar homologer Punkte zusammenfalle, so ergiebt sich Folgendes: Es seien nun A und A′, B und B′ zwei Paar nicht zusammenfallender homologer Punkte der Punktreihen auf σ; und M und M′, N und N′ zwei Paar homologer Punkte außerhalb der Richtung σ; so verbinde man A und B mit M und N durch die Geraden β, γ, ε, ζ; A′ und B′ mit M′ und N′ durch die Geraden β′, γ′, ε′, ζ′, so entstehen nach Lehrsatz 3. conforme Strahlbüschel A′σβγ.... ⊼ A,σβ′γ′...., B,σεζ.... ⊼ B,′σε′ζ′.... Da nun σ ein sich selbst entsprechender Strahl in jedem Paar conformer Strahlbüschel ist, oder die conformen Strahlbüschel A und A′, B und B′ mit einem Paar entsprechender Strahlen auf einander fallen, so liegen sie perspectivisch nach § 3. Lehrsatz 2.β. Es liegen also die Durchschnittspunkte K, Λ, u. s. w. der Strahlen von A und A′ auf einer Geraden μ, die Durchschnittspunkte P, Π der Strahlen von B und B′ auf einer Geraden ν. Schneiden sich nun μ und ν in Σ und zieht man den Strahl (A—Σ) oder α, und sucht den homologen des Strahlbüschels A′, so muß dieser auch durch Σ gehen, da sich jedes Paar homologer Strahlen der Strahlbüschel A und A′ auf μ schneiden. Schneidet also α die μ in Σ, so muß auch α′ durch Σ gehen; ebenso muß der dem Strahl δ homologe Strahl δ′ durch Σ gehen. Es ist also Σ sowohl der Durchschnittspunkt (α · δ) von α und δ, als auch der Durchschnittspunkt (α′ · δ′) der homologen Strahlen α′ und δ′; also ist Σ ein sich selbst homologer Punkt. Zugleich sieht man, daß dieser Schluß nicht mehr anwendbar wäre, wenn μ und ν sich auf σ selbst schnitten. Man überzeugt sich jedoch leicht, daß dieser Fall nicht eintreten kann. Denn da die Strahlbüschel A,σβγ.... und A′,σβ′γ′...., wie gezeigt wurde, perspectivisch liegen für die Axe μ, und auf σ kein Paar homologer Punkte der Voraussetzung nach liegt, so kann auch die der Geraden μ des einen Systems homologe Gerade μ′ des anderen die μ nicht auf σ schneiden, da sonst die Punkte (μ · σ) und (μ′ · σ) zusammenfielen und also ein Punkt der σ ein sich selbst homologer wäre, gegen die Voraussetzung.

Es hätten also, da die Strahlbüschel $A,\sigma\beta\gamma$, $A',\sigma\beta'\gamma'$ für μ perspectivisch liegen, und die der μ homologe Gerade μ' nicht durch $(\mu\cdot\sigma)$ gehen kann, nach Lehrsatz 29. 2) β) rechts, wenn man sich μ an die Stelle des dortigen (Fig. 75b.) σ, σ an die Stelle des dortigen d gesetzt denkt, die Systeme einen außerhalb $(\mu\cdot\sigma)$, aber auf μ, liegenden Punkt G_1 gemein; ebenso hätten sie einen auf ν, außerhalb σ, liegenden Punkt, G_2 gemein nach Lehrsatz 29. 2) β). Schnitten sich nun μ und ν auf σ, so könnten G_1 und G_2 nicht zusammenfallen, und die Systeme hätten auch eine Gerade $(G_1 - G_2)$, also auch den Durchschnitt von $(G_1 - G_2)$ mit σ als sich selbst homologen Punkt gemein, gegen die Voraussetzung, daß auf σ kein sich selbst homologer Punkt liegen soll. Es können sich also μ und ν nicht auf σ schneiden, also giebt es stets einen sich selbst homologen außerhalb σ liegenden Punkt Σ. Haben ferner zwei collineare Systeme einen Strahlbüschel mit dem Scheitel Σ gemein Fig. 76b., in welchem keine zwei homologen Strahlen zusammenfallen, und sind m und m', n und n' zwei Paar homologer Geraden, die nicht durch Σ gehen, α und α', β und β' zwei Paar homologer Strahlen der conjectivischen Strahlbüschel $\Sigma,\alpha\beta\ldots$ $\Sigma,\alpha'\beta'\ldots$, so suche man die Durchschnittspunkte B, Γ, E, Z der Strahlen α und β mit m und n, und die Durchschnittspunkte B', Γ', E', Z' der Strahlen α' und β' mit m' und n'. Nun entstehen nach Lehrsatz 3. conforme Punktreihen $\alpha,\Sigma\Gamma B\ldots \;\overline{\wedge}\; \alpha',\Sigma\Gamma'B'\ldots$, $\beta,\Sigma EZ\ldots \;\overline{\wedge}\; \beta',\Sigma E'Z'\ldots$ Da nun Σ ein sich selbst homologer Punkt ist in jedem Paar conformer Punktreihen, oder die conformen Punktreihen α und α', β und β' mit einem Paar entsprechender Punkte zusammenfallen, so liegen sie perspectivisch nach § 3. Lehrsatz 2. β. Es gehen also die Verbindungsgeraden $\varkappa$, λ u. s. w. der Punkte auf α mit denen auf α' durch einen Punkt M, die Verbindungsgeraden ρ, π u. s. w. der Punkte auf β mit denen auf β' durch einen Punkt N. Verbindet man M und N durch die Gerade σ, bestimmt den Durchschnittspunkt $(\alpha\cdot\sigma)$ oder A und sucht den homologen der Punktreihe auf α', so muß dieser auf σ liegen, da die Verbindungsgerade jedes Paares homologer Punkte auf α und α' durch M geht, und also der dem Punkt A homologe Punkt A' auf $(A - M)$ oder σ zu suchen ist. Es ist also $(\alpha'\cdot\sigma)$ der Punkt A'*), ebenso muß $(\beta'\cdot\sigma)$ oder Δ' der dem Punkt $(\beta\cdot\sigma)$ oder Δ homologe Punkt sein. Es ist also σ sowohl die Verbindungsgerade $(A - \Delta)$ von A und Δ, als auch die Verbindungsgerade $(A' - \Delta')$ der homologen Punkte A' und Δ'; also ist σ eine sich selbst homologe Gerade. Diese Schlüsse aber würden nicht mehr gelten, wenn σ die Verbindungsgerade $(M - N)$ durch Σ ginge. Man überzeugt sich aber leicht, daß dieser Fall nicht eintreten kann. Denn da die Punktreihen $\alpha,\Sigma\Gamma B$ und $\alpha',\Sigma\Gamma'B'$ perspectivisch sind für das Centrum M und in Σ kein Paar homologer Strahlen der Vor-

*) Daß in der Figur der Punkt A' mit $(\alpha'\cdot m)$ zusammenfällt, ist nur zufällig.

aussetzung nach vereinigt ist, so kann auch der dem Punkt M des einen Systems homologe Punkt M′ des anderen nicht auf (Σ⁻M) liegen, da sonst die homologen Strahlen (Σ⁻M) und (Σ⁻M′) zusammenfielen. Es hätten also, da die Punktreihen α,ΣBΓ, α',ΣB′Γ′ für M perspectivisch liegen und der dem M homologe Punkt M′ nicht auf (M⁻Σ) liegen kann, nach Lehrsatz 29. 2). β) links, wenn man sich M an die Stelle des dortigen (Fig. 75a) Σ, Σ an die Stelle des dortigen D gesetzt denkt, die Systeme eine nicht durch Σ, sondern durch M gehende Gerade g_1 gemein; ebenso hätten sie auch eine durch N, aber nicht durch Σ, gehende Gerade g_2 gemein. Ginge nun (M⁻N) durch Σ, so könnten g_1 und g_2 nicht zusammenfallen, also hätten die Systeme auch einen Punkt $(g_1 \cdot g_2)$ gemein, und also wären in der Verbindungsgeraden von Σ mit $(g_1 \cdot g_2)$ ein Paar homologer Strahlen vereinigt gegen die Voraussetzung. Es kann also σ nicht durch Σ gehen. Endlich sieht man auch, daß im Falle Fig. 75a. in dem im gemeinsamen Punkt Σ entstehenden Strahlbüschel kein Paar homologer Strahlen vereinigt sein kann, weil sonst auch auf σ ein Paar homologer Punkte vereinigt sein müßten, und daß das Umgekehrte in Fig. 75b. statt findet. Man kann also sagen:

30. **Lehrsatz. Haben zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme eine Gerade σ gemein, welche die Richtung eines Paares homologer Punktreihen darstellt, und ist kein Punkt der σ ein sich selbst homologer; so haben die Systeme auch einen außerhalb σ liegenden Punkt Σ gemein, der den Scheitel eines Paares homologer Strahlbüschel bildet, in dem kein Strahl sich selbst homolog ist. Fig. 76a.**	30. **Lehrsatz. Haben zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme einen Punkt Σ gemein, der den Scheitel eines Paares homologer Strahlbüschel bildet und ist kein Strahl des Σ ein sich selbst homologer; so haben die Systeme auch eine nicht durch Σ gehende Gerade σ gemein, welche die Richtung eines Paares homologer Punktreihen darstellt, in dem kein Punkt sich selbst homolog ist. Fig. 76b.**

Mit Hülfe der Sätze 29. und 30. können wir nun, wie wir uns oben vorgenommen hatten, die verschiedenen Verhältnisse beherrschen, die eintreten, je nachdem zwei Systeme kein, ein, zwei u. s. w. Elemente gemein haben.

I. Gesetzt, zwei Systeme hätten kein Element, und zwar zunächst A) keinen Punkt gemein, so ist die Frage, ob sie dann ein oder mehrere Gerade gemein haben können. Daß sie nicht **zwei oder mehrere** Gerade gemein haben können, folgt nun aus Lehrsatz 15., indem die Systeme sonst die Durchschnitts**punkte** gemein hätten, und der Voraussetzung nach kein **Punkt** der Systeme sich selbst homolog

ist. Hätten sie eine Gerade gemein, so würde aus Lehrsatz 30. folgen, daß die Systeme dann einen Punkt gemein haben müßten; da dieß aber gegen die Voraussetzung ist, so folgt, daß sie keine Gerade gemein haben können, wenn kein Punkt derselben ein sich selbst homologer ist. Auf ganz analoge Weise überzeugt man sich, daß, wenn die Systeme B) keine Gerade gemein haben, sie auch keinen Punkt gemein haben können. Man sieht also:

31. Lehrsatz. Haben zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme keinen Punkt gemein; so haben sie auch keine Gerade gemein.

31. Lehrsatz. Haben zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme keine Gerade gemein, so haben sie auch keinen Punkt gemein.

II. Gesetzt zwei Systeme hätten 1 Element, und zwar A) 1 Punkt gemein, so ist durch diese Annahme schon von selbst gegeben, daß in dem an diesem Punkte gebildeten Paar homologer Strahlbüschel kein Strahl ein sich selbst homologer sein kann, da sonst die Systeme zwei Elemente, den Punkt (den Scheitel des Strahlbüschels) und eine Gerade (den gemeinsamen Strahl) gemein hätten. Hätten aber zwei Systeme einen Punkt gemein und wäre keiner der von demselben ausgehenden Strahlen sich selbst homolog, so würde aus Lehrsatz 30. rechts folgen, daß sie doch eine Gerade gemein hätten, die nicht durch den Punkt ginge: Analoges ergiebt sich, wenn man annimmt, die Systeme haben B) 1 Gerade gemein. Man sieht also:

32. Lehrsatz. Haben zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme einen Punkt, aber keine durch ihn gehende Gerade gemein, so haben sie allemal auch eine nicht durch den Punkt gehende Gerade gemein.

32. Lehrsatz. Haben zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme eine Gerade, aber keinen auf ihr liegenden Punkt gemein, so haben sie allemal auch einen außerhalb der Geraden liegenden Punkt gemein.

Der Fall also, daß zwei Systeme bloß 1 Element gemein haben, kann gar nicht vorkommen.

III. Es haben zwei Systeme 2 Elemente, und zwar A) 2 Punkte, Σ,T Fig. 77a. gemein, es liege also Σ' mit in Σ, T′ mit in T, so ist offenbar zunächst (Σ—T) homolog (Σ'—T′), also die Verbindungsgerade der beiden sich selbst homologen Punkte eine sich selbst homologe Gerade. Wäre nun in keinem der beiden bei Σ und T als Scheiteln vereinigten homologen Strahlbüschel ein Strahl sich selbst homolog außer σ, fiele also in den conformen, conjectivisch liegenden Strahlbüscheln an Σ und T je nur ein Strahl σ auf den ihm homologen σ', und sind r und s, r′ und s′ die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel (s. § 2. Erklärung 15.) der in Σ vereinigten Strahlbüschel $\Sigma, r\sigma s\ldots$, $\Sigma', r'\sigma' s'\ldots$, und $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{s}'$ die entsprechenden Strahlen der rechten

Winkel der in T vereinigten Strahlbüschel T, $\mathfrak{r}\sigma\mathfrak{s}$ .... T', $\mathfrak{r}'\sigma'\mathfrak{s}'$ ...., so müßte nach § 4. Lehrsatz 2. α) β) die Aufeinanderfolge der Strahlen in Σ und Σ', und ebenso in T und T' dieselbe sein, und zugleich müßte sein: $\angle \sigma r = \angle \sigma s'$ und $\angle \sigma r' = \angle \sigma s$; $\angle \sigma \mathfrak{r} = \angle \sigma \mathfrak{s}'$ und $\angle \sigma \mathfrak{r}' = \angle \sigma \mathfrak{s}$. Heißt nun der Durchschnittspunkt von r und $\mathfrak{s}$ X, so ist der ihm homologe X'*) der Punkt (r' · $\mathfrak{s}'$); heißt der Punkt $\mathfrak{r}$ · s) Y, so ist ($\mathfrak{r}'$ · s') Y'. In den Dreiecken ΣX'T und ΣYT ist nun ΣT = ΣT, $\angle$ X'TΣ = $\angle$ YTΣ, $\angle \sigma \mathfrak{s}' = \angle \sigma \mathfrak{r}$, also sind die Dreiecke congruent, folglich X'Σ = YΣ. Ebenso ist auch △ΣXT ≅ △ΣY'T und XT = Y'T. Schneidet (X—Y) die σ in M und zieht man (M—Y') und (M—X'), so wird $\angle$ XMT = $\angle$ YMΣ, aber da XT = Y'T, $\angle \sigma \mathfrak{s} = \angle \sigma \mathfrak{r}'$ war, und MT = MT ist, so ist auch $\angle$ XMT = $\angle$ Y'MT und $\angle$ YMΣ = $\angle$ X'MΣ, also auch $\angle$ Y'MT = $\angle$ X'MΣ. Nun ist $\angle$ Y'MT + $\angle$ Y'MΣ = 180°, also auch $\angle$ X'MΣ + $\angle$ Y'MΣ = 180; folglich liegen X', M', Y' in einer geraden Linie, oder (X'—Y') schneidet die σ in M. Da nun σ sich selbst homolog und (X'—Y') homolog (X—Y) ist, so liegt in M auch der ihm homologe Punkt M', oder M ist sich selbst homolog. Es fallen also die auf σ vereinigten homologen Punktreihen mit allen Punkten zusammen nach § 4. Lehrsatz 1. Es müßten also, wenn in keinem der beiden Strahlbüschel Σ, T außer σ ein Strahl sich selbst homolog wäre, beide Systeme eine Pnnktreihe mit allen Punkten gemein haben. Soll dieß nicht der Fall sein, so müssen sie also wenigstens in einem der Scheitel Σ oder T außer σ noch einen sich selbst homologen Strahl gemein haben. Dieser Beweis ist offenbar nicht anwendbar, wenn einer der Punkte Σ oder T, z. B. letzterer im Unendlichen liegt. Fig. 77 b. Es hätten dann also die Systeme eine Gerade σ, und auf ihr einen im Endlichen und einen im Unendlichen liegenden Punkt gemein. Sind nun Q und Q' noch ein Paar homologer Punkte, so sind die Geraden (Q—T), Q'—T) oder m, m' homolog; zugleich sind sie parallel und zwar parallel σ, da T im Unendlichen liegt. Da die sich selbst homologe σ sowohl m als m' im Unendlichen trifft, so sind in dem auf m und m' liegenden Punktreihen die unendlich entfernten Punkte homolog; folglich wird nach § 3. Lehrsatz 22. m und m' proportional getheilt. Sind ferner R und R' noch ein Paar homologer Punkte auf m und m', und schneiden sich (Q—Q') und (R—R') in M, zieht man (M—Σ) und schneidet dieselbe die m in S, m' in S', so müssen S und S' ein Paar homologer Punkte der proportionalen Punktreihen auf m und m' sein nach § 3. Lehrsatz 24. Denn es ist $\frac{QS}{RS} = \frac{Q'S'}{R'S'}$ oder $\frac{QS}{Q'S'} = \frac{RS}{R'S'}$. Es sind also auf (M—Σ) zwei homologe Gerade (Σ—S) und (Σ—S') vereinigt; also ist (M—Σ) oder τ

*) In der Figur fallen (r' · $\mathfrak{s}'$) und ($\mathfrak{r}'$ · s') oder X' und Y' sehr nahe an die Gerade (X—Y).

eine sich selbst homologe Gerade. Haben die Systeme B) 2 Gerade σ, τ, Fig. 77c. gemein, so muß zunächst der Durchschnittspunkt $(\sigma \cdot \tau)$ oder $(\sigma' \cdot \tau')$ oder Σ ein sich selbst homologer sein. Hätten nun die Systeme weder auf σ noch auf τ einen sich selbst homologen Punkt und ist R der Gegenpunkt der auf σ liegenden Punktreihe des ersten Systems, S' der Gegenpunkt der auf σ liegenden Punktreihe des zweiten Systems, $\mathfrak{R}$ der Gegenpunkt der auf τ liegenden Punktreihe des ersten, $\mathfrak{S}'$ der des zweiten Systems, so müßte nach § 4. Lehrsatz 2. α) β) sein $R\Sigma = S'\Sigma$ und $\mathfrak{R}\Sigma = \mathfrak{S}'\Sigma$. Zieht man nun durch R eine Gerade x nach $\mathfrak{S}$, also eine Parallele zu τ, so ist sie eine Gerade des ersten Systems; die ihr homologe Gerade x' des zweiten Systems muß durch R' auf σ, also durch den unendlich entfernten Punkt der σ und durch $\mathfrak{S}'$ gehen. Es muß also x' durch $\mathfrak{S}'$ und parallel σ gehen. Zieht man ferner durch $\mathfrak{R}$ eine Gerade y nach S, so ist sie, da S in ∞ liegt, parallel σ; ihre homologe y' muß nun durch S' nach $\mathfrak{R}'$, also parallel τ gehen. Es ist demnach der Durchschnittspunkt $(x \cdot y)$ oder P homolog $(x' \cdot y')$ oder P' oder x, x', y, y' bilden ein Parallelogramm, in welchem Σ der Durchschnittspunkt der Diagonalen ist. Es fällt also $(\Sigma - P)$ mit $(\Sigma - P')$ zusammen, oder die Gerade m des ersten Systems mit der Geraden m' des zweiten; und da schon σ und τ sich selbst homologe Strahlen sind, so fallen in den sich selbst homologen, conjectivisch liegenden Strahlbüscheln $\Sigma, \sigma\tau m \ldots$, $\Sigma', \sigma'\tau' m' \ldots$, drei Strahlen, also nach § 4. Lehrsatz 1. alle Strahlen zusammen. Soll dieß nicht der Fall sein, so muß also w e n i g s t e n s auf e i n e r der beiden sich selbst homologen Geraden σ oder τ außer Σ noch e i n Punkt ein sich selbst homologer sein; es kann dieß aber auch auf beiden, σ und τ, zugleich stattfinden. Dieser Beweis und also auch der daraus gezogene Schluß ist unstatthaft, wenn der Durchschnittspunkt $(\sigma \cdot \tau)$ oder Σ Fig 77d. in das Unendliche fällt, σ und τ also parallel sind. Dann sind also die auf σ und τ unendlich entfernten Punkte sich selbst homolog, und nach § 3. Lehrsatz 22. sind demnach die auf σ und τ vereinigten Punktreihen proportional und haben daher § 4. Lehrsatz 2. γ) auch einen in unendlicher Entfernung liegenden Punkt gemein. Es ist also auf σ der Punkt M, auf τ der Punkt N sich selbst homolog, also auch die Gerade $(M - N)$ oder ρ sich selbst homolog. Es haben also dann die Systeme außer σ und τ noch eine dritte sich selbst homologe Gerade. Bestehen endlich C) die 2 Elemente, mit denen die Systeme zusammenfallen sollen, aus 1 Punkt und 1 Geraden, so ist dieß offenbar möglich, indem sie a) 1 Punkt und 1 durch ihn gehende Gerade oder mit anderen Worten eine Punktreihe und einen Punkt derselben gemein haben, oder indem sie β) 1 Punkt und 1 nicht durch ihn gehende Gerade gemein haben; letztere muß aber dann mit der Geraden, welche die Systeme in Folge des Zusammenfallens der Punkte nach Lehrsatz 32. gemein haben, identisch sein, indem sonst der Durchschnitt beider Geraden einen neuen sich selbst homologen Punkt lieferte. Man sieht also:

33. Lehrsatz. Haben zwei collineare, in derselben Ebene liegende Systeme zwei Punkte Σ, T gemein, so haben sie stets auch die Gerade (Σ—T) gemein. Liegen α) sowohl Σ als T in endlicher Entfernung, so haben die Systeme entweder die Gerade σ mit allen Punkten gemein, oder sie haben **wenigstens** noch 1 durch Σ oder durch T gehende Gerade, oder 1 durch Σ und 1 durch T gehende Gerade außer σ, oder einen Strahlbüschel Σ oder T mit allen Strahlen gemein. Liegt β) einer der Punkte, z. B. T im Unendlichen, so haben die Systeme allemal noch eine im Endlichen liegende Gerade gemein, die durch Σ geht. Fig. 77a., 77b.

33. Lehrsatz. Haben zwei collineare, in derselben Ebene liegende Systeme zwei Gerade σ, τ gemein, so haben sie stets auch den Punkt ($\sigma \cdot \tau$) gemein. Schneiden sich α) σ und τ in endlicher Entfernung, so haben die Systeme entweder den Strahlbüschel Σ mit allen Strahlen gemein, oder sie haben **wenigstens** noch 1 auf σ oder auf τ liegenden Punkt oder 1 auf σ und 1 auf τ liegenden Punkt außer Σ, oder eine Punktreihe σ oder τ mit allen Punkten gemein. Liegt β) der Durchschnittspunkt ($\sigma \cdot \tau$) im Unendlichen, so haben die Systeme allemal zwei im Endlichen liegende Punkte, einen auf σ und einen auf τ, und eine durch beide gehende, im Endlichen liegende Gerade (M—N) gemein. Fig. 77c., 77d.

34. Lehrsatz. Zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme können 1 Punkt und 1 Gerade gemein haben; letztere kann α) durch den Punkt, oder β) nicht durch den Punkt gehen.

34. Lehrsatz. Zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme können 1 Gerade und 1 Punkt gemein haben; letzterer kann α) auf der Geraden, oder β) nicht auf der Geraden liegen.

IV. Sollen zwei Systeme 3 Elemente gemein haben, so können dieß sein: A) 3 Punkte, und zwar α) auf derselben Geraden; dann fällt nach § 4. Lehrsatz 1. jedes Paar homologer Punkte auf der Geraden zusammen; man erhält also den in Lehrsatz 26. betrachteten Fall wieder; β) nicht auf derselben Geraden. Die Punkte seien Fig. 78. Σ_1, Σ_2, Σ_3; so sieht man sogleich, daß dann die Systeme auch drei Gerade ($\Sigma_1-\Sigma_2$), ($\Sigma_1-\Sigma_3$), ($\Sigma_2-\Sigma_3$) gemein haben müssen. Hätten sie noch einen Punkt auf einer dieser Geraden, z. B. auf ($\Sigma_1-\Sigma_2$) gemein, so erhielte man den in Lehrsatz 26. beregten Fall wieder; hätten sie noch einen Punkt außerhalb dieser drei Geraden gemein, so fielen nach Lehrsatz 17. beide Systeme ganz zusammen.

Hätten sie eine Grade, die β) nicht durch einen der Punkte $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ ginge, gemein, so käme man wieder auf Lehrsatz 26., hätten sie außer $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$, $(\Sigma_1 - \Sigma_3)$, $(\Sigma_2 - \Sigma_3)$ noch eine, durch keinen der drei Punkte gehende Gerade gemein, also vier Gerade, so fielen nach Lehrsatz 17. die Systeme zusammen. Ebenso folgt, wenn zwei Systeme B) 3 Gerade gemein haben, die α) durch denselben Punkt gehen, daß sie dann einen Strahlbüschel mit allen Strahlen gemein haben (Lehrsatz 26); gehen die drei Geraden β) nicht durch denselben Punkt, Fig. 78, so haben sie auch drei Punkte $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$, $(\sigma_1 \cdot \sigma_3)$, $(\sigma_2 \cdot \sigma_3)$ gemein. Durch Annahme einer weiteren Geraden kommt man, wie vorhin, auf die Lehrsätze 17, 26. zurück. Sind ferner die Elemente c) 2 Punkte und 1 Gerade, und liegen α) die Punkte Σ_1, Σ_2 Fig. 78. auf der Geraden σ_2, so erhält man den in Lehrsatz 33. betrachteten Fall wieder. Heißen die gemeinschaftlichen Punkte Σ_1, Σ_2, die gemeinschaftlichen Geraden σ_1 und liegt β) ein Punkt Σ_1 auf der Geraden σ_1, der andere Punkt Σ_2 außerhalb, so haben die Systeme noch eine Gerade σ_2 oder $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ gemein und man erhält den in Lehrsatz 33. als möglich hingestellten Fall wieder, daß zwei Systeme 2 Punkte Σ_1, Σ_2, die Verbindungsgerade $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ und 1 durch einen der beiden Punkte gehende Gerade σ_1 gemein haben können; liegt γ) weder Σ_1 noch Σ_2 auf der Geraden σ_1, so haben beide Systeme auf der Geraden $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ oder σ_2 drei Punkte Σ_1, Σ_2, $(\sigma_1 . \sigma_2)$ gemein, und man kommt auf Lehrsatz 26. Sind D) die drei Elemente 2 Gerade und 1 Punkt, und gehen α) beide Gerade durch den Punkt, so erhält man den in Lehrsatz 33. betrachteten Fall wieder; die Annahme β), daß eine Gerade σ_2 durch den Punkt Σ_2 gehe, die andere Gerade σ_1 nicht, giebt wieder die in Lehrsatz 33. hingestellte Möglichkeit, daß zwei Systeme zwei Gerade σ_1 und σ_2, den Durchschnittspunkt $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ und einen auf einer von beiden Geraden liegenden Punkt gemein haben können; geht γ) keine der Geraden, weder σ_1 noch σ_2 durch den Punkt Σ_1, so haben die Systeme am Punkt $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ oder Σ_2 die Strahlen σ_1, σ_2, $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ gemein und man kommt auf Lehrsatz 26. zurück. Man sieht also:

35. **Lehrsatz.** Haben zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte gemein, so haben sie allemal auch drei Gerade, nämlich die Verbindungsgeraden σ_1, σ_2, σ_3 der drei Punkte Σ_1, Σ_2, Σ_3 gemein. Fig. 78.

35. **Lehrsatz.** Haben zwei in derselben Ebene liegende collineare Systeme drei nicht durch denselben Punkt gehende Gerade gemein, so haben sie allemal auch drei Punkte, nämlich die Durchschnittspunkte Σ_1, Σ_2, Σ_3 der drei Geraden σ_1, σ_2, σ_3 gemein. Fig. 78.

36. **Lehrsatz.** Zwei in derselben Ebene liegende colli-

36. **Lehrsatz.** Zwei in derselben Ebene liegende colli-

neare Systeme können zwei Punkte, Σ_1, Σ_2, ihre Verbindungsgeraden, $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ und noch eine Gerade σ_1 gemein haben, die durch einen der Punkte geht. Fig. 78.

neare Systeme können zwei Gerade, σ_1, σ_2, ihren Durchschnittspunkt $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ und noch einen Punkt Σ_2 gemein haben, der auf einer der Geraden liegt. Fig. 78.

Man überzeugt sich leicht, daß hiemit die Reihe der Möglichkeiten rücksichtlich der Lage zweier Systeme erschöpft ist, indem man durch Fortsetzung der Untersuchung stets auf einen der früheren Fälle zurückkommt. Gesetzt z. B. es fielen zwei Systeme mit 4 Elementen, so können diese sein A) 4 Punkte; B) 4 Gerade; C) 3 Punkte und 1 Gerade; D) 3 Gerade und 1 Punkt; E) 2 Punkte und 2 Gerade; F) 2 Gerade und 2 Punkte. Es mögen nur noch kurz die Verhältnisse für die Fälle A), C), E), angegeben werden, indem sich die Anderen, B), D), F) sogleich aus ihnen finden lassen, wenn man die Worte: „Punkt" mit „Gerade", „Gerade" mit „Punkt", „Punktreihe" mit „Strahlbüschel", „Strahlbüschel" mit „Punktreihe", „Durchschnittspunkt" mit „Verbindungsgerade", „Verbindungsgerade" mit „Durchschnittspunkt" vertauscht. Es seien also die sich selbst homologen Elemente A) 4 Punkte Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4. Liegen dieselben in derselben Richtung, so erhält man den Fall in 26., ebenso, wenn 3 von ihnen in derselben Richtung liegen und 1 außerhalb; der außerhalb liegende ist dann der Scheitel des gemeinsamen Strahlbüschels; liegen keine 3 der 4 Punkte in derselben Richtung, so erhält man den Fall 17. Die Elemente seien C) 3 Punkte Σ_1, Σ_2, Σ_3 und 1 Gerade σ_1; liegen Σ_1, Σ_2, Σ_3 auf σ_1 so kommt man auf 26., Σ_1 und Σ_2 auf σ_1 und Σ_3 außerhalb führt auf 35., Σ_1 auf σ_1, Σ_2 und Σ_3 außerhalb führt auf 26., da σ_1 mit der Geraden $(\Sigma_2 - \Sigma_3)$ im Durchschnittspunkt den dritten sich selbst homologen Punkt auf $(\Sigma_2 - \Sigma_3)$, bildet; Σ_1, Σ_2, Σ_3 außerhalb σ_1, aber in derselben Richtung, führt auf 26; liegen Σ_1, Σ_2, Σ_3 außerhalb σ_1 und nicht in derselben Richtung, so bestimme man den Durchschnittspunkt Σ_4 von $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ mit σ_1 und Σ_5 von $(\Sigma_1 - \Sigma_3)$ mit σ_1. Die Systeme müssen dann die Punkte Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5 gemein haben. Dies führt auf 17. Sind von den 4 Elementen E) 2 Punkte Σ_1, Σ_2, 2 Gerade σ_1, σ_2, so kann Σ_1 und Σ_2 auf σ_1 liegen und σ_2 durch Σ_1 gehen; dies führt auf 36; liegen Σ_1 und Σ_2 auf σ_1 und fällt der Durchschnittspunkt $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ weder nach Σ_1 noch nach Σ_2, so kommt man auf 26.; liegt Σ_1 auf σ_1; Σ_2 auf σ_2 so erhält man 35., Σ_1 auf σ_1, Σ_2 weder auf σ_1 noch auf σ_2 führt auf 26., Σ_1 im Durchschnittspunkt $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$, Σ_2 weder auf σ_1 noch auf σ_2 führt auf 26., da die Verbindungsgerade $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ der dritte Strahl außer σ_1 und σ in dem bei Σ_1 entstehenden Strahlbüschel ist, liegt weder Σ_1 noch Σ_2 weder auf σ_1 noch σ_2, geht aber $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ durch $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$, so erhält man 26.; liegt endlich weder Σ_1 noch Σ_2 weder auf σ_1 noch

auf σ_2 und geht auch $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ nicht durch $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$, so gelangt man auf 26. Fallen ferner die Systeme mit fünf oder sechs Elementen zusammen, so erscheint der Fall 36. nicht mehr; fallen sie mit sieben oder mehr Elementen zusammen, so kann auch der Fall 35. nicht mehr vorkommen und man wird stets entweder auf 26. oder auf 17. geführt.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so können wir den Satz aussprechen, indem wir die nothwendig mit einander verbundenen Bedingungen unter derselben Nummer aufführen und den Fall Lehrsatz 33. β) links unter die folgende Nummer 4); den Lehrsatz 33. β) rechts erwähnten Fall unter die Nummer 3) mit einbegreifen.

37. Lehrsatz. Liegen zwei collineare Systeme in derselben Ebene, so können sie folgende verschiedene Lagen einnehmen:

1) Die Systeme haben vier Punkte und zugleich jeden anderen Punkt, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 17.)

2) Die Systeme haben eine Gerade und jeden Punkt auf ihr, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 26.)

3) Die Systeme haben drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 35.)

4) Die Systeme haben zwei Punkte, ihre Verbindungsgerade und noch eine, durch einen dieser Punkte gehende, Gerade, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 33. β. links; 36.)

5) Die Systeme haben einen Punkt und eine durch ihn gehende Gerade, auf dieser aber, außer dem einen, keinen zweiten Punkt, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 34 α.)

6) Die Systeme haben einen Punkt und eine nicht durch ihn gehende Gerade,

37. Lehrsatz. Liegen zwei collineare Systeme in derselben Ebene, so können sie folgende verschiedene Lagen einnehmen:

1) Die Systeme haben vier Gerade und zugleich jede andere Gerade, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 17.)

2) Die Systeme haben einen Punkt und jede Gerade durch ihn, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 26.)

3) Die Systeme haben drei nicht durch denselben Punkt gehende Gerade, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 33. β. 35.)

4) Die Systeme haben zwei Gerade, ihren Durchschnittspunkt und noch einen, auf einer dieser Geraden liegenden Punkt, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 36.)

5) Die Systeme haben eine Gerade und einen auf ihr liegenden Punkt, durch diesen aber, außer der einen, keine zweite Gerade, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 34 α.)

6) Die Systeme haben eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt, aber

aber keine durch ihn gehende Gerade, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 32.)

7) Die Systeme haben keinen Punkt, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 31.)

keinen auf ihr liegenden Punkt, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 32.)

7) Die Systeme haben keine Gerade, als sich selbst homolog, gemein. (Lehrsatz 31.)

Untersuchen wir jetzt wieder, wie wir Behufs Aufstellung des Lehrsatzes 27. und 28. thaten, die aus diesen verschiedenen Lagen sich ergebenden Projectionsverhältnisse der Punktreihen und Strahlbüschel, und fangen mit dem im Lehrsatz 37. 7.) aufgestellten Fall, als dem einfachsten an, nehmen also an, zwei Systeme hätten weder einen Punkt, noch eine Gerade gemein, so ergiebt sich sogleich aus dieser Annahme, daß weder ein Paar homologer Strahlbüschel noch Punktreihen conjectivisch liegen kann, weil sie sonst einen Punkt und eine Gerade gemein haben müßten; ebenso wenig kann ein Paar homologer Punktreihen oder Strahlbüschel perspectivisch liegen; denn sonst hätten sie ebenfalls einen Punkt, nämlich den Durchschnittspunkt der Geraden, auf denen sie liegen, und die Verbindungsgeraden der Scheitel der Strahlbüschel gemein. Es liegen also alle Paare homologer Punktreihen und Strahlbüschel projectivisch.

Im Falle Lehrsatz 37. 6) liegen, da Σ Fig. 76a. 76b. ein sich selbst homologer Punkt ist, jede zwei homologen, den Punkt Σ enthaltenden Punktreihen perspectivisch. Läge nun das Projectionscentrum eines solchen Paares homologer Punktreihen, z. B. α und α' Fig. 76a. außerhalb σ in Σ', so kann dieß der Voraussetzung nach kein sich selbst homologer Punkt sein; es müßte also nach Lehrsatz 29. 2. α) und β) wo man jetzt Σ an die Stelle von D, Σ' an die Stelle von Σ setze, entweder (Σ'—Σ), oder irgend eine andere durch Σ' gehende Gerade sich selbst homolog sein; so lange Σ' außerhalb σ liegt, ist aber beides unmöglich, da, wenn es eine durch Σ' gehende, sich selbst homologe Gerade σ' gäbe, mag sie nun nach Σ oder irgend anders wohin gehen, zu folgern wäre, daß der Durchschnittspunkt $(\sigma \cdot \sigma')$ mit σ ein sich selbst homologer wäre, gegen die Voraussetzung. Es kann also Σ' nur auf σ liegen. Also das Projectionscentrum jeder zwei perspectivisch liegenden homologen Punktreihen liegt auf σ; ebenso geht die Projectionsaxe jeder zwei perspectivisch liegender Strahlbüschel z. B. derjenigen in A und A' Fig. 76b. ꝛc. durch Σ. Alle anderen Paare homologer Punktreihen, die nicht durch Σ gehen, müssen projectivisch liegen, (wovon man sich ebenso überzeugt, wie bei Erörterung des Falls 7.), desgleichen alle Paare homologer Strahlbüschel, deren Scheitel nicht auf σ liegen.

Im Falle: Lehrsatz 37. 5) liegt, wenn Σ der sich selbst homologe Punkt, σ die durch ihn gehende, sich selbst homologe Gerade heißt, jedes Paar homologer Punktreihen, dessen Richtungen durch Σ gehen, perspectivisch, und zwar jedes Paar für ein auf σ liegendes Projectionscentrum. Denn läge für ein Paar homologer Punktreihen das

Projectionscentrum außerhalb σ in Σ', so müßte nach Lehrsatz 29. 2. α) β) entweder $(\Sigma' - \Sigma)$ sich selbst homolog sein, gegen die Voraussetzung, daß σ die einzige sich selbst homologe Gerade der Systeme sein soll; oder es müßte eine andere durch Σ' gehende Gerade sich selbst homolog sein, was ebenfalls gegen die Voraussetzung streitet, daß auf σ nur der Punkt Σ sich selbst homolog sein soll. Ebenso liegt jedes Paar homologer Strahlbüschel, deren Scheitel auf σ liegen, perspectivisch und man überzeugt sich durch analoge Schlüsse, daß die Axe allemal durch Σ gehen muß. Daß kein Paar Punktreihen außer denen, deren Richtungen durch Σ gehen, perspectivisch liegen kann, folgt wie im Falle 7); ebenso daß kein Paar Strahlbüschel, deren Scheitel nicht auf σ liegen, perspectivisch liegen kann, desgleichen, daß kein Paar Strahlbüschel außer Σ und kein Paar Punktreihen, außer σ, conjectivisch liegen kann.

Im Falle: Lehrsatz 37. 4) liegt jedes Paar homologer Punktreihen Fig. 79., deren Richtungen α, α' durch Σ_2 gehen, perspectivisch. Läge das Projectionscentrum Σ' außerhalb σ_2 und außerhalb σ_1; so müßte entweder nach Lehrsatz 29. 2) α) $(\Sigma' - \Sigma_2)$ sich selbst homolog sein, dieß ist aber nur möglich, wenn Σ' auf σ_2 liegt, da sonst $(\Sigma' - \Sigma_2)$ mit σ_1 einen sich selbst homologen Durchschnittspunkt erzeugen würde, gegen die Voraussetzung; oder es müßte nach Lehrsatz 29. 2. β) eine durch Σ', aber nicht durch Σ_2 gehende Gerade sich selbst homolog sein. Der Voraussetzung nach ist aber nur eine sich selbst homologe, nicht durch Σ_2 gehende Gerade da, nämlich σ_1; es kann also Σ' auch nur auf σ_1 liegen. Ferner liegt auch jedes Paar homologer Punktreihen β, β', die durch Σ_1 gehen, perspectivisch. Läge ihr Projectionscentrum außerhalb σ_1 und σ_2 in Σ''; so müßte nach Lehrsatz 29. 2. α) Σ'' auf einer sich selbst homologen, durch Σ_1 gehenden Geraden liegen, also entweder auf σ_1 oder auf σ_2, oder nach Lehrsatz 29. 2. β) auf einer anderen durch Σ'', aber nicht durch Σ_1 gehenden sich selbst homologen Geraden. Dies ist aber nicht möglich, da es eine andere sich selbst homologe Gerade als σ_1 und σ_2 nicht giebt. Es kann also Σ'' nur auf σ_1 oder auf σ_2 liegen. Auf analoge Weise überzeugt man sich, daß die Projectionsaxen der perspectivisch liegenden Strahlbüschel, deren Scheitel auf σ_1 liegen, durch Σ_1 oder durch Σ_2 gehen müssen. Daß kein anderes Paar Punktreihen und Strahlbüschel perspectivisch liegen kann, davon überzeugt man sich wie oben. Daß kein anderes Paar Punktreihen, außer σ_1 und σ_2 conjectivisch liegen kann, ergiebt sich daraus, daß, wenn dies mit einer durch Σ_1 oder Σ_2 gehenden Geraden der Fall wäre, dieß gegen die Voraussetzung stritte, daß von Σ_1 nur eine, von Σ_2 nur zwei sich selbst homologe Gerade ausgehen sollen; daß keine weder durch Σ_1 noch durch Σ_2 gehende Punktreihe conjectivisch sein kann, ergiebt sich daraus, weil sonst auf σ_1 und σ_2 noch ein Paar sich selbst homologer Punkte entständen. Lägen ein Paar Strahlbüschel conjectivisch außer Σ_1, Σ_2, so hätten die Systeme noch einen Punkt gemein, gegen die Voraussetzung.

Im Falle Lehrsatz 37. 3), Fig. 78. überzeugt man sich, wie im vorigen Falle 4) leicht, daß das Projectionscentrum eines Paares homologer Punktreihen, deren Richtungen z. B. durch Σ_1 gehen, auf σ_1 oder σ_2 oder σ_3 liegen muß, daß die Projectionsaxe eines Paares Strahlbüschel, deren Scheitel z. B. auf σ_1 liegen, durch Σ_1 oder Σ_2 oder Σ_3 gehen muß; daß ferner kein Paar Punktreihen perspectivisch liegen kann, deren Richtungen nicht durch Σ_1 oder Σ_2 oder Σ_3 gehen, daß kein Paar Strahlbüschel perspectivisch liegen kann, deren Scheitel nicht auf σ_1 oder σ_2 oder σ_3 liegen, daß ferner kein Paar Strahlbüschel und Punktreihen conjectivisch liegt, außer Σ_1, Σ_2, Σ_3, σ_1, σ_2, σ_3. Der Fall: Lehrsatz 37. 2) ist schon durch den Lehrsatz 27. und 28. erörtert; der Fall: Lehrsatz 37. 1) bedarf keiner weiteren Untersuchung.

Fassen wir also das Resultat dieser Erörterungen zusammen, so haben wir drei wesentlich verschiedenen Fälle zu unterscheiden, wenn wir vom Fall 1) ganz absehen:

I. Ein Theil der Paare homologer Punktreihen liegt perspectivisch für **dasselbe** Projectionscentrum Σ (Lehrsatz 29); der andere Theil der Paare homologer Punktreihen liegt conjectivisch, und ihre Richtungen gehen alle durch das Projectionscentrum Σ (Lehrsatz 27.) **Kein** Paar homologer Punktreihen aber liegt projectivisch. (Lehrsatz 27, 37. 2)).

II. Ein oder mehrere Paare homologer Punktreihen liegen conjectivisch, aber nicht so, daß die Richtungen von drei oder mehr Paaren durch einen und denselben Punkt Σ gehen (Lehrsatz 28); die übrigen Paare homologer Punktreihen liegen **theils** perspectivisch, aber für **verschiedene** Projectionscentra, **theils** projectivisch. (Lehrsatz 37. 3), 4), 5), 6)).

III. **Alle** Paare homologer Punktreihen liegen projectivisch; keines weder conjec-

und zugleich:

I. Ein Theil der Paare homologer Strahlbüschel liegt perspectivisch für **dieselbe** Projectionsaxe σ (Lehrsatz 29.); der andere Theil der Paare homologer Strahlbüschel liegt conjectivisch und ihre Scheitel liegen alle auf der Projectionsaxe σ (Lehrsatz 27). **Kein** Paar homologer Strahlbüschel aber liegt perspectivisch. (Lehrsatz 27d, 37. 2)).

II. Ein oder mehrere Paare homologer Strahlbüschel liegen conjectivisch, aber nicht so, daß die Scheitel von drei oder mehr Paaren auf einer und derselben Geraden σ liegen (Lehrsatz 28.); die übrigen Paare homologer Strahlbüschel liegen **theils** perspectivisch, aber für **verschiedene** Projectionsaxen, **theils** projectivisch. (Lehrsatz 37. 3), 4), 5), 6)).

III. **Alle** Paare homologer Strahlbüschel liegen projectivisch, keines weder conjec-

tivisch, noch perspectivisch. (Lehrsatz 37. 7)).

tivisch, noch perspectivisch. (Lehrsatz 37. 7)).

Da beim Eintreten des Falles I. offenbar die durch die perspectivische Lage bewirkten Verhältnisse die wichtigeren sind, indem alle aus der conjectivischen Lage ohne Einwirkung perspectivisch liegender Grundgebilde sich ergebenden Verhältnisse im Falle II. behandelt werden; da ebenso im Falle II. wieder die perspectivisch und projectivisch gelegenen Grundgebilde an Bedeutung zurücktreten und nur in sofern in Betracht kommen, als sie Aufschlüsse geben über die Gesetze, denen die conjectivisch liegenden unterworfen sind; so definiren wir:

38. Erklärung. Die Lage zweier collinearen, in einer und derselben Ebene befindlichen Systeme heißt, wenn die Punktreihen und Strahlbüschel, aus denen die Systeme bestehen, die unter I. angegebene Lage haben: **„perspectivisch"**; wenn die Punktreihen und Strahlbüschel, aus denen die Systeme bestehen, die unter II. angegebene Lage haben: **„conjectivisch"**; wenn die Punktreihen und Strahlbüschel, aus denen die Systeme bestehen, die unter III. angegebene Lage haben: **„projectivisch"**.

Vergl. § 2. Erklärung 19. Wir haben nun diese drei Fälle im Folgenden genauer zu betrachten.

§ 8.

Perspectivische Lage ebener Systeme. Affinität. Aehnlichkeit. Congruenz.

1. Erklärung. Der Scheitel des den beiden perspectivisch collinearen Systemen gemeinschaftlichen Strahlbüschels (§ 7. Lehrsatz 26), Σ heißt das **„Collineationscentrum"**. Fig. 70.

2. Erklärung. Jeder Strahl $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$, des den beiden perspectivisch collinearen Systemen gemeinschaftlichen Strahlbüschels $\Sigma, \alpha\beta\gamma \ldots.$ heißt ein: **„Collineationsstrahl"**. Fig. 70.

1. Erklärung. Die Richtung der den beiden perspectivisch collinearen Systemen gemeinschaftlichen Punktreihe (§ 7. Lehrsatz 26), σ heißt die **„Collineationsaxe"**. Fig. 70.

2. Erklärung. Jeder Punkt U, Y, Z.... der den beiden perspectivisch collinearen Systemen gemeinschaftlichen Punktreihe σ,UYZ.... heißt ein: **„Collineationspunkt"**. Fig. 70.

Wäre in zwei perspectivisch collinearen Systemen noch ein Punkt M Fig. 80. außer dem Collineationscentrum Σ und den Punkten der Collineationsaxe ein sich selbst homologer, so hätten beide Systeme ein Viereck ABMΣ (oder ΑΓΜΣ, oder ΒΓΜΣ etc.) gemein und fielen

also nach § 7. Lehrsatz 17. ganz zusammen; wäre außer der Collineationsaxe und den Strahlen des Collineationscentrums noch eine Gerade μ sich selbst homolog, so hätten die beiden Systeme ein Vierseit $\alpha\beta\mu\sigma$ (oder $\alpha\gamma\mu\sigma$, oder $\beta\gamma\mu\sigma$ etc.) gemein und fielen also nach § 7. Lehrsatz 17. ganz zusammen. Man erhält also den

3. Lehrsatz. In zwei perspectivisch collinearen Systemen ist außer dem Collineationscentrum und den Collineationspunkten kein Punkt sich selbst homolog. Fig. 80.

3. Lehrsatz. In zwei perspectivisch collinearen Systemen ist außer der Collineationsaxe und den Collineationsstrahlen keine Gerade sich selbst homolog. Fig. 80.

Da ferner nach § 7. Erklärung 38. jedes Paar homologer Punktreihen entweder perspectivisch liegen soll für das Collineationscentrum Σ, oder conjectivisch, aber auf einer durch Σ gehenden Geraden, da ferner jedes Paar homologer Strahlbüschel entweder perspectivisch liegen soll für die Collineationsaxe σ, oder conjectivisch, aber mit dem Scheitel in einem Punkte der Collineationsaxe liegend, so läßt sich allgemein sagen:

4. Lehrsatz. Die Verbindungsgerade jedes Paares homologer Punkte A und A′, $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ u. s. w. in zwei perspectivisch collinearen Systemen geht durch das Collineationscentrum Σ. Fig. 70.

4. Lehrsatz. Der Durchschnittspunkt jedes Paares homologer Gerader a und a′, α und α', u. s. w. in zwei perspectivisch collinearen Systemen liegt auf der Collineationsaxe σ. Fig. 70.

Da es nach § 7. Lehrsatz 13. zu jedem Punkt nur einen einzigen homologen und zu jeder Geraden nur eine einzige homologe Gerade giebt, und man sonst in Widerspruch mit Lehrsatz 4. geriethe, kann man umgekehrt sagen:

5. Lehrsatz. Ist in einem Paar perspectivisch collinearer Systeme Σ das Collineationscentrum, und A ein Punkt des einen Systems, so muß der ihm homologe Punkt A′ des anderen Systems auf der Geraden $(\Sigma - A)$ liegen. Fig. 70.

5. Lehrsatz. Ist in einem Paar perspectivisch collinearer Systeme σ die Collineationsaxe und a eine Gerade des einen Systems, so muß die ihr homologe Gerade a′ des anderen Systems durch den Punkt $(\sigma \cdot \alpha)$ gehen. Fig. 70.

Da ferner nach Erklärung 1. und 2. sowohl das Collineationscentrum als jeder Collineationspunkt sich selbst homolog ist und außer diesen nach Lehrsatz 3. kein anderer sich selbst homologer Punkt vorhanden ist; da ferner sowohl die Collineationsaxe als jeder Collineationsstrahl sich selbst homolog ist und außer diesen keine sich selbst homologe Gerade

vorhanden ist, so kann man das bereits § 7. Lehrsatz 27. Ausgesprochene genauer ausdrücken, indem man sagt (vgl. § 4. Lehrsatz 1.):

6. Lehrsatz. Jeder Collineationsstrahl a u. s. w. enthält die Richtung, in der ein Paar homologer conjectivisch gelegener Punktreihen $a,\Sigma\mathfrak{A}\mathfrak{O}M$ und $a,\Sigma\mathfrak{A}'\mathfrak{O}'M$ u. s. w., sich befinden, die mit zwei Paar entsprechenden Punkten zusammenfallen. Diese Punkte sind: das Collineationscentrum Σ und der Durchschnittspunkt M des Collineationsstrahls a mit der Collineationsaxe σ. Fig. 70.

6. Lehrsatz. Jeder Collineationspunkt U u. s. w. enthält den Scheitel eines Paares homologer conjectivisch gelegener Strahlbüschel $U,\sigma u\mathfrak{a}\mu$ und $U,\sigma u'\mathfrak{a}'\mu$ u. s. w., die mit zwei Paar entsprechenden Strahlen zusammenfallen. Diese Strahlen sind: die Collineationsaxe σ und die Verbindungsgerade μ des Collineationspunktes U mit dem Collineationscentrum Σ. Fig. 70.

Bei der perspectivischen Lage giebt es wieder der Lage nach mehrere Fälle zu unterscheiden, und man definirt:

7. Erklärung. Zwei perspectivisch collineare Systeme heißen: **einstimmig** perspectivisch collinear, wenn die auf den Collineationsstrahlen vereinigten homologen Punktreihen $a,\Sigma\mathfrak{A}\mathfrak{O}M$ und $a,\Sigma\mathfrak{A}'\mathfrak{O}'M$ u. s. w. einstimmig verlaufen; Fig. 70., 81a., 81b.; sie heißen **entgegengesetzt** perspectivisch collinear, wenn sie entgegengesetzt verlaufen. Fig. 81c. 81d.

7. Erklärung. Zwei perspectivisch collineare Systeme heißen: **einstimmig** perspectivisch collinear, wenn die an den Collineationspunkten vereinigten homologen Strahlbüschel $U,\sigma\mathfrak{a}u\mu$ und $U,\sigma\mathfrak{a}'u'\mu$ (oder $U,\sigma u\alpha\mu$ und $U,\sigma\mathfrak{a}'u'\mu$) u. s. w. einstimmig verlaufen; Fig. 70; 81a; 81b; sie heißen: **entgegengesetzt** perspectivisch collinear, wenn sie entgegengesetzt verlaufen. Fig. 81c; 81d.

Man sieht sogleich, daß beide Erklärungen dasselbe aussagen, indem der Verlauf der in Rede stehenden Punktreihen von dem der Strahlbüschel abhängt und umgekehrt. Bisweilen wird die Erklärung auch in der Form gegeben, daß man sagt:

8. Erklärung. Die perspectivische Collineation zweier ebenen Systeme heißt **einstimmig**, wenn das Collineationscentrum Σ und der Collineationspunkt M, beide **zugleich** auf der **endlichen**, von

8. Erklärung. Die perspectivische Collineation zweier ebenen Systeme heißt **einstimmig**, wenn die Collineationsaxe σ und der Collineationsstrahl μ beide **zugleich** in der Fläche des **spitzigen**,

zwei homologen Punkten $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ bestimmten Strecke $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$. Fig. 81b., oder beide **zugleich** auf der **unendlichen**, von zwei homologen Punkten $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ bestimmten Strecke $\mathfrak{O}\infty\mathfrak{O}'$. Fig. 70., liegen; die Collineation heißt **entgegengesetzt**, wenn das Collineationscentrum Σ auf der **endlichen** und **zugleich** der Collineationspunkt M auf der **unendlichen** Strecke $\mathfrak{O}\infty\mathfrak{O}'$, Fig. 81d., oder das Collineationscentrum Σ auf der **unendlichen** und **zugleich** der Collineationspunkt M auf der **endlichen** Strecke $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$, Fig. 81c. liegt.

von zwei homologen Geraden $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}'$ bestimmten Winkels $\mathfrak{u}\mathfrak{u}'$, oder beide **zugleich** in der Fläche des **stumpfen**, von zwei homologen Geraden $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}'$ bestimmten Winkels $180^0 - \mathfrak{u}\mathfrak{u}'$ Fig. 70, 81a, 81b. liegen; die Collineation heißt **entgegengesetzt**, wenn die Collineationsaxe σ in der Fläche des **spitzigen** und **zugleich** der Collineationsstrahl μ in der Fläche des stumpfen, Fig. 81c. oder, die Collineationsaxe in der Fläche des **stumpfen** und **zugleich** der Collineationsstrahl μ in der Fläche des **spitzigen** Winkels $\mathfrak{u}\mathfrak{u}'$ Fig. 81d. liegt.

Man sieht leicht, daß diese Erklärungen nichts anderes sind, als die in 7. aufgestellten, denn der einstimmige oder entgegengesetzte Verlauf der Punktreihen, von dem in 7. die Rede war, wird nur bedingt von der Lage des Collineationscentrums Σ und des Collineationspunkts M, in welchem der Collineationsstrahl α, auf dem die Punktreihen liegen, die Collineationsaxe schneidet; der einstimmige oder entgegengesetzte Verlauf der Strahlbüschel wird nur bedingt von der Lage der Collineationsaxe σ und des Collineationsstrahls μ, welcher den Collineationspunkt U, an welchem die Strahlbüschel liegen, mit dem Collineationscentrum verbindet. Auch sieht man sogleich, daß die in Fig. 70., 80a. und 81b. dargestellten Fälle nicht etwa verschieden sind, denn auch in Fig. 70., wo Σ auf $\mathfrak{O}\infty\mathfrak{O}'$ lag, hätte man sogleich ein Paar Punkte finden können, die so liegen, daß Σ auf der endlichen von ihnen bestimmten Strecke sich befindet. Denn sucht man die Gegenpunkte O, Q' der auf α vereinigten Punktreihen $\alpha,\Sigma\mathfrak{A}\mathfrak{O}M$ und $\alpha'\Sigma\mathfrak{A}'\mathfrak{O}'M$, so liegen dieselben nach § 4. Lehrsatz 2. α) a), weil Σ und M die Hauptpunkte sind, außerhalb der endlichen Strecke ΣM. Ist nun $\mathfrak{P}$ ein außerhalb ΣM liegender Punkt des ersten Systems, so muß, da der homologe Punkt $\mathfrak{P}'$ des zweiten Systems die Eigenschaft haben muß, daß $\alpha,\Sigma\mathfrak{A}'\mathfrak{O}'MQ'\mathfrak{P}'\infty \;\overline{\wedge}\; \alpha,\Sigma\mathfrak{A}\mathfrak{O}M\infty\mathfrak{P}O$ ist, $\mathfrak{P}'$ zwischen Q' und ∞ liegen. Es sind also $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ ein Paar homologer Punkte von derselben Beschaffenheit, wie $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ in Fig. 81. b, sie liegen nämlich so, daß Σ und M auf der endlichen Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ sich befinden. Man sieht zugleich hieraus, daß der einem Punkt $\mathfrak{W}$ zwischen M und ∞ des ersten Systems homologe Punkt $\mathfrak{W}'$ des zweiten auf der endlichen Strecke MQ' sich befinden muß. Es haben also $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ dieselben Eigenschaften, wie $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}'$ in Fig. 81a., nämlich es

liegt sowohl Σ als M auf der unendlichen Strecke $P \infty P'$. Es ist also auch der Fig. 81. a. dargestellte Fall von dem Fig. 70. verzeichneten nicht verschieden. Auf dieselbe Weise überzeugt man sich, daß auch die Fig. 81. c. und Fig. 81. d. schematisch dargestellten Fälle identisch sind. Man sieht also:

9. Lehrsatz. Es giebt nur zwei wesentlich verschiedene Fälle der perspectivischen Collineation, nämlich die einstimmige und die entgegengesetzte perspectivische Collineation.

Da nach § 7. Erklärung 19. die Gegenaxe m des ersten Systems der unendlich entfernten Geraden m′ des zweiten homolog ist, nach Lehrsatz 4. aber homologe Gerade sich auf der Collineationsaxe σ schneiden, die unendlich entfernte m′ aber die σ in dem unendlich entfernten Punkte schneidet, so muß auch m die σ in dem unendlich entfernten Punkte treffen, d. h. es muß m parallel σ sein. Aus denselben Gründen muß auch $p' \parallel \sigma$ sein. Zugleich muß nach § 7. Erklärung 6. $\alpha, \Sigma M \infty O \,\overline{\wedge}\, \alpha, \Sigma M Q' \infty$ sein, also: $\frac{\Sigma M}{\infty M} : \frac{\Sigma O}{\infty O} = \frac{\Sigma M}{Q'M} : \frac{\Sigma \infty}{Q' \infty}$, oder $\Sigma O = MQ'$. Man sieht also:

10. Lehrsatz. In zwei perspectivisch collinearen Systemen sind die Gegenaxen m, p′ parallel zur Collineationsaxe σ. Fig. 70.

11. Lehrsatz. In zwei perspectivisch collinearen Systemen ist die Entfernung ΣO des Collineationscentrums Σ von dem Durchschnittspunkte O der einen Gegenaxe m mit einem Collineationsstrahl α ebenso groß als die Entfernung MQ′ des auf diesem Collineationsstrahl α liegenden Collineationspunkts M von dem Durchschnittspunkte Q′ der anderen Gegenaxe p′ mit diesem Collineationsstrahl α. Fig. 70.

Zugleich folgt aus Erklärung 7. und § 4. Lehrsatz 2. α) a) und β):

12. Lehrsatz. Ist die Collineation zweier perspectivisch collinearer Systeme **einstimmig**, so liegen die Durchschnittspunkte O, Q′, der beiden Gegenaxen m, p′ mit jedem Collineationsstrahl C auf der **unendlichen** Strecke $\Sigma \infty M$, die von dem Collineationscentrum und dem auf dem Strahl α befindlichen Collineationspunkt M gebildet wird, Fig. 70., 81a., 81b.; ist die Collineation **entgegengesetzt**, so liegen die Durchschnittspunkte O, Q′ auf der **endlichen**, von Σ und M gebildeten Strecke ΣM Fig. 81c., 81d.

Zieht man ferner eine Gerade r des ersten Systems parallel zur Gegenaxe und also auch nach Lehrsatz 10. parallel zur Collineationsaxe,

und sucht die ihr homologe Gerade r' des zweiten Systems, so muß nach § 7. Lehrsatz 22. das Gesetz gelten:

13. Lehrsatz. Jede zwei der Collineationsaxe σ zweier perspectivisch collinearen Systeme parallele homologe Gerade r und r', t und t' u. s. w. werden in homologen Punkten proportional getheilt und umgekehrt.

Werden in zwei perspectivisch collinearen Systemen, in welchen **nicht jedes** Paar homologer Punktreihen proportional getheilt wird, ein oder mehrere Paare homologer Gerader r und r', t und t' u. s. w. in homologen Punkten proportional getheilt, so müssen sie alle einander und der Collineationsaxe σ parallel sein; wegen §. 7. Lehrsatz 20.

13*. Aufgabe. Die Gegenaxen m, p' zweier perspectivisch collinearen Systeme zu finden. Fig. 82.

Auflösung. Man suche irgend ein Paar homologer Punkte S und S', und ziehe von S eine Gerade c parallel einem, gleichgültig welchem, Collineationsstrahl α, welche die Collineationsaxe σ in Γ schneidet, und ziehe dann $(S'-\Gamma)$, die den Strahl α in Q' trifft, so ist eine durch Q' zu σ parallel gezogene Gerade die Gegenaxe p' des zweiten Systems. Denn da S' homolog S ist, und nach Lehrsatz 4. jede zwei homologen Geraden sich auf der Collineationsaxe schneiden, so ist $(S'-\Gamma)$ oder c' homolog $(S-\Gamma)$ oder c, und da nach Lehrsatz 4. auf jedem Collineationsstrahl z. B. α, ein Paar homologer Punktreihen vereinigt sind, so ist auch nach § 7. Lehrsatz 15. der Durchschnittspunkt $(\alpha \cdot c')$ homolog dem Durchschnittspunkt $(\alpha \cdot c)$. Da aber $c \parallel \alpha$ ist, so liegt $(\alpha \cdot c)$ im Unendlichen. Es ist also Q' derjenige Punkt des zweiten Systems, der dem unendlich entfernten der Geraden α im ersten System homolog ist. Es geht also nach § 7. Lehrsatz 20. die unendlich entfernte Gerade p des ersten Systems durch $(\alpha \cdot c)$, und also die der p homologe Gerade p' durch $(\alpha \cdot c')$, oder die Gegenaxe des zweiten Systems geht durch $(\alpha \cdot c')$. Nach Lehrsatz 10. ist sie aber auch parallel σ, also ist die durch $(\alpha \cdot c')$ parallel zu σ gezogene Gerade p' die Gegenaxe des zweiten Systems. Um die des ersten, m, zu finden, kann man nun nach Lehrsatz 11. und 12., wenn Q' auf $\Sigma \infty M$ oder auf ΣM liegt, einen solchen Punkt O sogleich finden, der ebenso liegt, wie Q', und für den $\Sigma O = MQ'$ ist; eine durch ihn zu σ parallel gezogene Gerade m ist dann die zweite Gegenaxe. Man kann aber auch ebenso verfahren, wie bei der Construction von p', indem man von S' aus zu einem beliebigen Collineationsstrahl z. B. wieder zu α eine Parallele d' zieht, welche die σ in Δ trifft und dann $(S-\Delta)$ zieht, welche die α in O schneidet. Statt durch O und Q' eine Parallele zur Collineationsaxe zu ziehen, kann man auch einen zweiten Punkt Q'_1, O_1 der Gegenaxen suchen, indem man von S und S' aus Parallelen zu einem anderen Collineations-

strahl z. B. zu β zieht und so verfährt, wie oben für α angegeben wurde.

14. **Aufgabe. Ein Paar perspectivisch collineare Systeme zu zeichnen.** Fig. 70.

Auflösung 1. α). Man zeichne einen beliebigen Strahlbüschel $\Sigma,\alpha\beta\gamma\delta$.... Fig. 70. und schneide ihn durch zwei Paar Transversalen s und s', $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ der Art, daß die Durchschnittspunkte $(s\cdot\mathfrak{s})$ oder $\mathfrak{E}$ und $(s'\cdot\mathfrak{s}')$ oder $\mathfrak{E}'$ auf demselben Strahl des Büschels Σ liegen, so entstehen die conformen Punktreihen $s,ABCD \;\overline{\wedge}\; s',A'B'C'D'$ und $\mathfrak{s},\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{B} \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{s}',\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\mathfrak{B}'$. Nun verbinde man jeden Punkt der Punktreihe auf s mit jedem Punkt der Reihe auf $\mathfrak{s}$ durch Gerade, und ebenso jeden Punkt der Punktreihe auf s' mit jedem der Reihe auf $\mathfrak{s}'$, so erhält man ein Paar collinearer Systeme nach § 7. Aufgabe 12. Auflösung 1. α). Da nun in den Dreiecken $\mathfrak{A}A\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A}'A'\mathfrak{E}'$ die Verbindungsgeraden $(\mathfrak{A}'-\mathfrak{A})$, $(A'-A)$, $(\mathfrak{E}'-\mathfrak{E})$ durch denselben Punkt Σ gehen, so schneiden sich nach § 3. Lehrsatz 13. die Geraden $(\mathfrak{A}-A)$ und $(\mathfrak{A}'-A')$, $(\mathfrak{A}-\mathfrak{E})$ und $(\mathfrak{A}'-\mathfrak{E}')$, $(A-\mathfrak{E})$ und $(A'-\mathfrak{E}')$ auf derselben Geraden σ; aus denselben Gründen müssen die Durchschnittspunkte der Seiten in den Dreiecken $\mathfrak{E}\mathfrak{A}B$ und $\mathfrak{E}'\mathfrak{A}'B'$, also die Durchschnittspunkte von $(\mathfrak{A}-\mathfrak{E})$ und $(\mathfrak{A}'-\mathfrak{E}')$, $(B-\mathfrak{E})$ und $(B'-\mathfrak{E}')$, $(\mathfrak{A}-B)$ und $(\mathfrak{A}'-B')$ in derselben Geraden liegen. Da aber $(B-\mathfrak{E})$ und $(B'-\mathfrak{E}')$ dieselben Geraden sind, wie $(A-\mathfrak{E})$ und $(A'-\mathfrak{E}')$, so muß also der Durchschnittspunkt von $(\mathfrak{A}-B)$ und $(\mathfrak{A}'-B')$ auch auf σ liegen. Ein Gleiches läßt sich zeigen von $(A-\mathfrak{B})$ und $(A'-\mathfrak{B}')$. Schneiden sich nun $(\mathfrak{A}-B)$ und $(A-\mathfrak{B})$ in $\mathfrak{S}$, $(\mathfrak{A}'-B')$ und $(A'-\mathfrak{B}')$ in $\mathfrak{S}'$, so liegen also die Durchschnittspunkte der Seiten $(A-B)$ und $(A'-B')$, $(A-\mathfrak{S})$ und $(A'-\mathfrak{S}')$, $(B-\mathfrak{S})$ und $(B'-\mathfrak{S}')$ auf derselben Geraden σ; also müssen sich nach § 3. Lehrsatz 13. die Geraden $(A'-A)$, $(B'-B)$, $(\mathfrak{S}'-\mathfrak{S})$ in demselben Punkte schneiden. Da sich nun $(A'-A)$ und $(B'-B)$ in Σ schneiden, muß auch $(\mathfrak{S}'-\mathfrak{S})$ durch Σ gehen, u. s. w. Man sieht, daß die Systeme perspectivisch liegen.

Auflösung 1. β). Man ziehe eine beliebige Gerade σ, und zeichne zwei Paar für σ perspectivisch liegender Strahlbüschel $S,acbd$ und $S',a'c'b'd'$, $\mathfrak{S},\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{S}',\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'\mathfrak{d}'$, jedoch so, daß $(S-\mathfrak{S})$ und $(S'-\mathfrak{S}')$ sich auf σ schneiden, und suche den Durchschnittspunkt jedes Strahls des Büschels S mit jedem Strahl des Büschels $\mathfrak{S}$, und ebenso jedes Strahls des Büschels S' mit jedem Strahl des Büschels $\mathfrak{S}'$ so erhält man zwei collineare Systeme nach § 7. Aufgabe 12. Auflösung 2. α) und überzeugt sich, wie bei der Auflösung 1. α), daß sie perspectivisch liegen.

Auflösung 2. α). Man kann die Auflösung 1. α) vereinfachen, indem man statt der Punktreihen $\mathfrak{s},\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{s}',\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\mathfrak{B}'$ die gemeinsame Punktreihe σ,UYZ.... Fig. 70. nimmt. Man construire also einen Strahlbüschel $\Sigma,\alpha\beta\gamma$.... und schneide ihn durch zwei Transversalen s und s'. Durch den Durchschnittspunkt $(s\cdot s')$ ziehe man eine be-

liebige dritte Transversale σ. Fig. 83a. Die Geraden s, s', σ, werden nun von den Strahlen des Strahlbüschels Σ bezüglich in A, B, C, D...., A', B', C', D'...., A, B, Γ, Δ...., geschnitten. Zieht man nun von jedem beliebigen Punkte der σ, A, B, Γ, Δ, E, Z, H.... aus Gerade nach jedem Durchschnittspunkte, A, B, C, D...., A', B', C', D'...., so sind (A—A) und (A—A'), (A—B) und (A—B'), (A—C) und (A—C')...., (B—A) und (B—A'), (B—B) und (B—B'), (B—C) und (B—C') etc. homologe Gerade perspectivisch collinearer Systeme. Denn man hat ein Paar von Punktreihen s,ABCD.... und σ,ABΓΔ...., die das erste, und ein anderes Paar Punktreihen s',A'B'C'D' und σ,ABΓΔ...., die das zweite System erzeugen. Nun ist der Construction nach s,ABCD.... $\overline{\wedge}$ s',A'B'C'D', und σ,ABΓΔ.... gleich und also auch $\overline{\wedge}$ σ,ABΓΔ.... Das von den Punktreihen s und σ erzeugte System ist also dem von den Punktreihen σ und s' erzeugten nach § 7. Aufgabe 12. Auflösung 1. α) collinear, und zugleich liegen sie perspectivisch, da sie eine Punktreihe σ,ABΓΔ.... mit allen Punkten gemein haben, und einen Strahlbüschel $\Sigma,\alpha\beta\gamma\delta$.... mit allen Strahlen; (denn es sind auf α z. B. die homologen Geraden (A—A) und (A—A'), auf β sind (B—B) und (B—B') vereinigt, also ist Σ ein sich selbst homologer Punkt, und α, β, γ.... sich selbst homolog). Man kann sich auch direct davon überzeugen. Denn schneiden sich (Γ—A) oder a und (B—C) oder b in E., (Γ—A') oder a' und (B—C') oder b' in E', so hat man zwei Dreiecke AEB und A'E'B', in denen (A—E) und (A'—E'), (A—B) und (A'—B'), (B—E) und (B'—E') sich auf derselben Geraden σ schneiden, also müssen nach § 3. Lehrsatz 13. (A—A'), (B—B'), (E—E') durch denselben Punkt gehen; folglich geht (E—E'), da die ersten beiden sich in Σ schneiden, ebenfalls durch Σ u. s. w.

Auflösung 2. β). Statt der Strahlbüschel 𝔖,𝔞𝔟𝔠𝔡 und 𝔖',𝔞'𝔟'𝔠'𝔡' Fig 70. kann man den gemeinsamen, $\Sigma,\alpha\beta\gamma\delta$.... nehmen. Man ziehe also eine beliebige Gerade σ, Fig. 83b., und beschreibe zwei für sie als Axe perspectivische Strahlbüschel S,abcd und S',a'b'c'd'. Auf der Verbindungsgeraden (S—S') ihrer Scheitel nehme man einen beliebigen Punkt Σ an, und ziehe von ihm als Scheitel beliebige Strahlen, und bestimme die Durchschnitte jedes Strahl α, β, γ, δ, ε, ζ, η, des Strahlbüschels Σ mit jedem Paar entsprechender Strahlen der Strahlbüschel S und S', so ist jedes so entstehende Punktpaar ein Paar homologer Punkte zweier perspectivisch collinearer Systeme. Denn das eine wird erzeugt von S,abcd.... und $\Sigma,\alpha\beta\gamma\delta$...., das andere von S',a'b'c'd'.... und $\Sigma,\alpha\beta\gamma\delta$...., und es ist S,abcd.... $\overline{\wedge}$ S',a'b'c'd'.... und $\Sigma,\alpha\beta\gamma\delta$.... $\overline{\wedge}$ $\Sigma,\alpha\beta\gamma\delta$.... u. s. w. Der Beweis ist dem für Auflösung 2. α) ganz analog.

Nach § 7. Lehrsatz 16. ist durch ein Paar homologer Vierecke AB𝔄𝔅, A'B'𝔄'𝔅' Fig. 70. die Collineation zweier Systeme vollständig bestimmt. Liegen dieselben nun perspectivisch, oder, mit anderen Worten, befinden sich nicht allein A und A', B und B', 𝔄 und 𝔄', 𝔅 und 𝔅' in Projection für denselben Punkt Σ, sondern zugleich auch der Durch-

schnittspunkt von (A−B) und ($\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$) mit dem Durchschnittspunkt von (A′−B′) und ($\mathfrak{A}'-\mathfrak{B}'$), der Durchschnittspunkt von (A−$\mathfrak{B}$) und ($\mathfrak{A}$−B) mit dem Durchschnittspunkte von (A′−$\mathfrak{B}'$) und ($\mathfrak{A}'$−B′), der Durchschnittspunkt von (A−$\mathfrak{A}$) und ($\mathfrak{B}$−B) mit dem Durchschnittspunkt von (A′−$\mathfrak{A}'$) und ($\mathfrak{B}'$−B′), so sieht man aus der Auflösung 1. α) der Aufgabe 14., daß dann beide Systeme perspectivisch liegen. Denn nimmt man auf (A−B) oder s einen beliebigen Punkt C an, und sucht denjenigen Punkt C′ auf (A′−B′) oder s′, der die Beschaffenheit hat, daß, wenn man den Durchschnittspunkt von (A−B) und ($\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$) mit $\mathfrak{C}$, den von (A′−B′) und ($\mathfrak{A}'-\mathfrak{B}'$) mit $\mathfrak{C}'$ bezeichnet, s,$\mathfrak{C}$ABC $\barwedge$ s′,$\mathfrak{C}'$A′B′C′ ist, so kann es nur einen einzigen solchen Punkt auf s′ geben nach § 2. Lehrsatz 10., und es muß (C−C′) durch Σ gehen, da dieß mit ($\mathfrak{C}-\mathfrak{C}'$), (A−A′), (B−B′) der Fall ist. Ebenso giebt es zu D nur einen entsprechenden Punkt D′ auf s′, zu $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{s}$ nur einen entsprechenden $\mathfrak{S}'$ auf $\mathfrak{s}'$, zu $\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{s}$ nur einen entsprechenden $\mathfrak{D}'$ auf $\mathfrak{s}'$ u. s. w. Es sind also zwei Paare conformer Punktreihen s,ABCD $\barwedge$ s′,A′B′C′D′, $\mathfrak{s}$,$\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ $\barwedge$ $\mathfrak{s}'$,$\mathfrak{A}'\mathfrak{S}'\mathfrak{D}'\mathfrak{B}'$ vollkommen durch die Annahme bestimmt, und nach Auflösung 1. α) zu Aufgabe 14. liegen die Systeme perspectivisch. Ja es ist schon die Voraussetzung, daß nicht allein $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ in Projection stehen sollen, sondern auch S und S′, T und T′ insofern zu viel, als, wie in der genannten Auflösung gezeigt wurde, wenn $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$, und jedes andere Paar entsprechender Punkte auf s und s′, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ in Projection stehen, von selbst folgt, daß dieß auch mit S und S′, T und T′ der Fall sein muß. Ebenso überzeugt man sich, daß, wenn zwei vollständige Vierseite ab$\alpha\beta$, a′b′$\alpha'\beta'$ zweier collinearer Systeme perspectivisch liegen, dieß mit den ganzen Systemen der Fall sein muß. Man kann also sagen:

15. Lehrsatz. Liegt ein Paar homologer vollständiger Vierecke AB$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, A′B′$\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ zweier collinearer Systeme perspectivisch, so liegen die ganzen Systeme perspectivisch. Fig. 70.

15. Lehrsatz. Liegt ein Paar homologer vollständiger Vierseite ab$\alpha\beta$, a′b′$\alpha'\beta'$ zweier collinearer Systeme perspectivisch, so liegen die ganzen Systeme perspectivisch. Fig. 70.

Zugleich sieht man, daß hier auf deu Unterschied von Viereck und Vierseit nichts ankommt, denn liegen die ganzen Systeme perspectivisch, so ist dieß auch der Fall mit den durch vier Punkte bestimmten sechs Geraden, also mit einem Vierseit, dessen Seiten die Verbindungslinien der vier Punkte sind, und umgekehrt.

Der letzte Lehrsatz giebt uns nun auch den Weg an zur Auflösung der

16. Aufgabe. Zwei ebene collineare Systeme in perspectivische Lage zu bringen. Fig. 84.

Diese Aufgabe kommt nach dem Lehrsatz 15. zurück auf die

Aufgabe: Zwei vollständige Vierecke oder Vierseite auf einander zu projiciren in dem § 6. Erklärung 1 ausgesprochenen Sinne.

Auflösung*). Das eine System werde mit I., das andere mit II. bezeichnet. Fig. 84. Man wähle in beiden ein Paar homologer Vierecke oder Vierseite. Sie sollen im Folgenden immer durch „Vierecke“ bezeichnet werden. Sie seien ABCD und A'B'C'D'. Nun suche man die Gegenaxen m, p' der beiden Systeme I. und II. Dieß geschieht nach § 7. Lehrsatz 19., 20. indem man auf zwei Paar homologen Geraden z. B. auf BC und B'C', BA und B'A' die Gegenpunkte der auf ihnen befindlichen Punktreihen sucht nach § 2. Aufgabe 18. Es schneide nun (Fig. 84. links) m die (A—B) in L, die (A—C) in M, p' schneide die (A'—B') in J', die (A'—C') in K'. (Fig. 84. rechts). Nun beschreibe man über LM ein Dreieck $LM\Sigma \sim \triangle J'K'A'$, über $J'K'$ ein Dreieck $J'K'\mathfrak{S}' \sim \triangle LMA$ und ziehe im System I. eine Gerade $(N-R) \parallel (L-M)$ oder m, so daß sie von Σ so weit absteht, als $(J'-K')$ von $\mathfrak{S}'$, ziehe ferner $(\Sigma-R) \parallel (A-C)$ $(\Sigma-N) \parallel (A-B)$, so wird $\angle \Sigma NR = \angle ALM = \angle \mathfrak{S}'J'K'$, $\angle \Sigma RN = \angle AML = \angle \mathfrak{S}'K'J'$, also $\triangle \Sigma NR \sim \triangle \mathfrak{S}'J'K'$. Da sich in ähnlichen Dreiecken die Seiten verhalten, wie die zugehörigen Perpendikel, die Perpendikel aber von Σ auf NR und von $\mathfrak{S}'$ auf $J'K'$ der Construction nach gleich sind, so ist $NR = J'K'$, also $\triangle \Sigma NR \cong \triangle \mathfrak{S}'J'K'$. Schneidet nun $(\Sigma-N)$ die m in T, so bestimme man auf $(\Sigma-N)$ einen solchen Punkt X, daß die Punktreihen $\Sigma T \infty X$ und $\Sigma \infty NX$ conform sind, oder daß

$$\frac{\Sigma T}{\infty T} : \frac{\Sigma X}{\infty X} = \frac{\Sigma \infty}{N \infty} : \frac{\Sigma X}{NX},$$

oder, daß
$$\Sigma T = NX$$
ist, und mache auf $(\Sigma-R)$ die Strecke $RY = \Sigma W$, wenn W den Durchschnittspunkt von $(R-\Sigma)$ mit m bezeichnet; dann muß $(X-Y) \parallel (R-N)$ sein. Denn es ist $\triangle \Sigma NR \sim \triangle \Sigma TW$, weil $(N-R) \parallel (T-W)$ oder m ist; also verhält sich $\Sigma N : \Sigma R = \Sigma T : \Sigma W$ und da $NX = \Sigma T$, $RY = \Sigma W$ ist, $\Sigma N : \Sigma R = XN : YR$, woraus folgt $(X-Y) \parallel (R-N)$. Nimmt man jetzt Σ als Collineationscentrum, $(X-Y)$ als Collineationsaxe σ an, so kann man $(L-M)$, $(N-R)$, als Gegenaxen zweier perspectivisch collinearer Systeme betrachten nach Lehrsatz 10. und 11. Man construire nun ein zu dem Viereck ABCD perspectivisch collineares $\mathfrak{ABCD}$, so läßt sich zeigen, daß dieß mit A'B'C'D' congruent sein muß. Denn um $\mathfrak{A}$ zu finden, hat man, da Σ das Collineationscentrum, $(L-M)$ und $(R-N)$ die Gegenaxen sein sollen, auf $(\Sigma-A)$ einen Punkt $\mathfrak{A}$ der Art zu suchen, daß, wenn $(\Sigma-A)$ die $(L-M)$ in Q, die $(N-R)$ in $\mathfrak{Q}$ schneidet, die Punktreihe $\Sigma AQ\infty$ $\overline{\wedge}\ \Sigma\mathfrak{A}\infty\mathfrak{Q}$, oder

*) Vergl. L. J. Magnus: „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie“. § 13. Aufgabe [21]. I. und: Essen: „Vorschule der neueren Geometrie, insbesondere eine elementare Darstellung der Verwandtschaft und der Kegelschnitte enthaltend,“ in Grunert's „Archiv der Mathematik und Physik. Theil 29. pag. 179.

$$\frac{\Sigma A}{QA} : \frac{\Sigma\infty}{Q\infty} = \frac{\Sigma\mathfrak{A}}{\infty\mathfrak{A}} : \frac{\Sigma\mathfrak{Q}}{\infty\mathfrak{Q}},$$

oder $\Sigma A : QA = \Sigma\mathfrak{A} : \Sigma\mathfrak{Q}$ *)

ist. Nun ist Viereck $A'J'\mathfrak{S}'K' \sim$ Viereck ΣLAM, denn es ist $\angle A' = \angle \Sigma$; $\angle J' = \angle L$; $\angle \mathfrak{S}' = \angle A$; $\angle K' = \angle M$, und ferner $\angle \gamma' = \angle \gamma$; $\angle \delta' = \angle \delta$; $\angle \eta' = \angle \eta$; $\angle \vartheta' = \angle \vartheta$; $\angle (\beta' + \alpha') = \angle (\beta + \alpha)$; $\angle (\varepsilon' + \zeta') = \angle (\varepsilon + \zeta)$. Es verhält sich ferner, weil $\triangle J'K'A' \sim \triangle LM\Sigma$ ist:

$$J'K' : LM = J'A' : L\Sigma;$$

und, weil $\triangle J'K'\mathfrak{S}' \sim \triangle LMA$ ist:

$$J'K' : LM = J'\mathfrak{S}' : LA;$$

also auch $J'A' : L\Sigma = J'\mathfrak{S}' : LA;$

oder $J'A' : J'\mathfrak{S}' = L\Sigma : LA.$

Da nun auch $\angle (\eta' + \vartheta') = \angle (\eta + \vartheta)$ ist, so ist auch $\triangle J'A'\mathfrak{S}' \sim \triangle L\Sigma A$ und ebenso $\triangle K'A'\mathfrak{S}' \sim \triangle M\Sigma A$; folglich ist auch $\angle \alpha' = \angle \alpha$, $\angle \beta' = \angle \beta$ etc. und es verhält sich

$$\Sigma A : QA = A'\mathfrak{S}' : Q'\mathfrak{S}',$$

also ist nach *) $\Sigma\mathfrak{A} : \Sigma\mathfrak{Q} = A'\mathfrak{S}' : Q'\mathfrak{S}'.$

Nun war $\triangle \Sigma RN \cong \triangle \mathfrak{S}'K'J'$, also $R\Sigma = K'\mathfrak{S}'$, $\angle \Sigma RN = \angle \mathfrak{S}'K'J'$. zugleich ist $\angle \Sigma\mathfrak{Q}R = \angle AQM$ (als correspondirende Winkel) $= \angle \mathfrak{S}'Q'K'$ (weil $\triangle \mathfrak{S}'Q'K' \sim \triangle AQM$ ist), also $\triangle \Sigma R\mathfrak{Q} \cong \triangle \mathfrak{S}'K'Q'$; folglich $Q'\mathfrak{S}' = \Sigma\mathfrak{Q}$; also geht die letzte Proportion:

$$\Sigma\mathfrak{A} : \Sigma\mathfrak{Q} = A'\mathfrak{S}' : Q'\mathfrak{S}'$$

über in die Gleichung: $\Sigma\mathfrak{A} = A'\mathfrak{S}'.$

Zugleich ist, da $\angle \mathfrak{A}\Sigma R = \angle A'\mathfrak{S}'K'$, $\angle \mathfrak{A}\Sigma N = \angle A'\mathfrak{S}'J'$, $\Sigma N = \mathfrak{S}'J'$, $\Sigma R = \mathfrak{S}'K'$ ist, $\triangle \Sigma\mathfrak{A}N \cong \triangle \mathfrak{S}'A'J'$, $\triangle \Sigma\mathfrak{A}R \cong \triangle \mathfrak{S}'A'K'$, also: Viereck $\Sigma N\mathfrak{A}R \cong$ Viereck $\mathfrak{S}'J'A'K' \sim$ Viereck $AL\Sigma M$.

Nun schneiden sich $(A-L)$ und $(\mathfrak{A}-N)$ auf $(X-Y)$, wie sich folgendermaßen zeigen läßt: In den Dreiecken ΣQT und ΣZX verhält sich

$$\Sigma Q : \Sigma T = \Sigma Z : \Sigma X,$$

oder, da nach der Construction $\Sigma T = NX$ ist:

$$\Sigma Q : NX = \Sigma Z : \Sigma X;$$

oder: $NX : \Sigma X = \Sigma Q : \Sigma Z.$ $\alpha)$

In den Dreiecken ΣZX und $\Sigma\mathfrak{Q}N$ verhält sich:

$$\mathfrak{Q}Z : NX = \Sigma\mathfrak{Q} : \Sigma N;$$

oder, da sich in den Dreiecken ΣQT und $\Sigma\mathfrak{Q}N$

$$\Sigma\mathfrak{Q} : \Sigma N = \Sigma Q : \Sigma T$$

verhält, $\mathfrak{Q}Z : NX = \Sigma Q : \Sigma T.$

Da nun nach der Construction $NX = \Sigma T$ ist, so folgt hieraus:

$$\mathfrak{Q}Z = \Sigma Q. \qquad \beta)$$

In den Dreiecken ΣQL und $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}N$ verhält sich ferner:

$$\Sigma Q : \mathfrak{A}\mathfrak{Q} = QL : \mathfrak{Q}N;$$

oder, da sich in den Dreiecken AQL und $\Sigma\mathfrak{Q}N$

$$QL : \mathfrak{Q}N = AQ : \Sigma\mathfrak{Q}$$

verhält:

$$\Sigma Q : \mathfrak{A}\mathfrak{Q} = AQ : \Sigma\mathfrak{Q},$$

oder:

$$\Sigma Q : AQ = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} : \Sigma\mathfrak{Q};$$

also

$$\Sigma Q : \Sigma A = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} : \Sigma\mathfrak{A}$$

und, da $\Sigma Q = \mathfrak{Q}Z$ ist, nach β):

$$\mathfrak{Q}Z : \Sigma A = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} : \Sigma\mathfrak{A};$$

oder:

$$\mathfrak{Q}Z : \mathfrak{A}\mathfrak{Q} = \Sigma A : \Sigma\mathfrak{A};$$

also auch:

$$\mathfrak{Q}Z : \mathfrak{A}Z = \Sigma A : \mathfrak{A}A;$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{Q}Z = \frac{\mathfrak{A}Z \cdot \Sigma A}{\mathfrak{A}A};$$

oder nach β):

$$\Sigma Q = \frac{\mathfrak{A}Z \cdot \Sigma A}{\mathfrak{A}A};$$

Man hat also nach α) die Proportion:

$$NX : \Sigma X = \frac{\mathfrak{A}Z \cdot \Sigma A}{\mathfrak{A}A} : \Sigma Z;$$

oder

$$\frac{NX}{\Sigma X} : 1 = \frac{\mathfrak{A}Z}{\Sigma Z} : \frac{\mathfrak{A}A}{\Sigma A};$$

oder

$$\frac{NX}{\Sigma X} : \frac{N\infty}{\Sigma\infty} = \frac{\mathfrak{A}Z}{\Sigma Z} : \frac{\mathfrak{A}A}{\Sigma A}.$$

Es ist also Punktreihe $NX\Sigma\infty \barwedge$ Punktreihe $\mathfrak{A}Z\Sigma A$, und da beide mit einem Paar entsprechender Punkte, Σ zusammenfallen, liegen sie perspectivisch, also schneiden sich $(\mathfrak{A}-N)$, $(Z-X)$, $(\infty-A)$ oder $(\mathfrak{A}-N)$, $(X-Y)$, $(A-L)$ in einem und demselben Punkte, oder: $(A-L)$ und $(\mathfrak{A}-N)$ convergiren in einem Punkte U der $(X-Y)$. Ebenso läßt sich zeigen, daß auch $(A-M)$ und $(\mathfrak{A}-R)$ in einem Punkte V der $(X-Y)$ sich schneiden. Sucht man nun in den perspectivisch collinearen Systemen, die aus den Strahlbüscheln bei A und $\mathfrak{A}$ und dem gemeinschaftlichen Σ gebildet werden (vergl. Aufgabe 14. Auflösung 2. β)) den dem Punkt B des Systems I. homologen des zweiten Systems, indem man also $(X-Y)$ als Collineationsaxe ansieht, so muß, da B auf $(A-U)$, liegt, auch $\mathfrak{B}$ auf $(\mathfrak{A}-U)$ sich befinden, und da B der Durchschnittspunkt von $(A-U)$ und $(\Sigma-B)$ ist, so muß der Durchschnittspunkt von $(\Sigma-B)$ mit $(\mathfrak{A}-U)$ den dem Punkt B homologen $\mathfrak{B}$ geben. Zugleich ist, da $(\Sigma-N)$ oder $(\Sigma-T) \parallel (A-B)$, $(\Sigma-L \parallel (\mathfrak{A}-N)$ ist, im Strahlbüschel mit dem Scheitel Σ und den Strahlen $(\Sigma-A)$, $(\Sigma-B)$, $(\Sigma-N)$, $(\Sigma-L)$ die Punktreihe $AB\infty L \barwedge$ Punktreihe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}N\infty$. Nach der Voraussetzung aber ist auch die Punktreihe $AB\infty L \barwedge$ Punktreihe $A'B'J'\infty$, also auch, nach § 2. Lehrsatz 13. Punktreihe $A'B'J'\infty \barwedge$ Punktreihe

$\mathcal{A}\mathcal{B}N\infty$, oder: $A'B' : A'J = \mathcal{A}\mathcal{B} : \mathcal{A}N$. Da nun $\triangle \Sigma\mathcal{A}N \cong \triangle S'A'J'$ ist, wie oben gezeigt wurde, so ist also $\mathcal{A}N = A'J'$, und folglich $\mathcal{A}\mathcal{B} = A'B'$*). Ebenso muß auch der dem Punkt E des Systems I. homologe Punkt $\mathcal{E}$ des zweiten Systems auf $(\mathcal{A}-N)$ und $(\Sigma-E)$ sich befinden, und es läßt sich, wie von $\mathcal{A}\mathcal{B}$, so hier zeigen, daß $\mathcal{A}\mathcal{E} = A'E'$ ist. Schneiden sich ferner $(A-M)$ und $(\mathcal{A}-R)$ im Punkt V der $(X-Y)$, so muß der dem Punkt G homologe Punkt $\mathcal{G}$ sich auf $(\mathcal{A}-V)$ befinden, und es ist $R\mathcal{G} = K'G'$; der dem C homologe Punkt $\mathcal{C}$ liegt ebenfalls auf $(\mathcal{A}-V)$ und es ist $R\mathcal{C} = K'C'$. Es ist also $\mathcal{A}\mathcal{E} + \mathcal{A}\mathcal{B} = A'E' + A'B'$, oder $\mathcal{B}\mathcal{E} = B'E'$; ferner, wenn G' der Durchschnittspunkt von $A'C'$ und $B'D'$ ist, $R\mathcal{C} - R\mathcal{G} = K'C' - K'G'$, also $\mathcal{C}\mathcal{G} = C'G'$. Da ferner $\triangle \Sigma\mathcal{A}R \cong \triangle S'A'K'$ war, so ist $\mathcal{A}R = A'K'$, also $R\mathcal{G} - R\mathcal{A} = K'G' - K'A'$, also $\mathcal{A}\mathcal{G} = A'G'$; ferner war $\angle(\varepsilon + \zeta) = (\varepsilon' + \zeta')$, also auch $180^0 - (\varepsilon + \zeta) = 180^0 - (\varepsilon' + \zeta')$, also $\triangle \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{G} \cong B'A'G'$, also $\mathcal{B}\mathcal{G} = B'\mathcal{G}'$, und $\angle R\mathcal{A}\mathcal{E} = \angle K'A'E'$; also da auch aus $R\mathcal{A} = K'A'$ und $R\mathcal{C} = K'C'$ sich ergiebt $R\mathcal{C} - R\mathcal{A} = K'C' - K'A'$, oder $\mathcal{A}\mathcal{C} = A'C'$, so folgt $\triangle \mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{E} \cong \triangle C'A'E'$; also auch $\mathcal{C}\mathcal{E} = C'E'$. Es ist also das dem Viereck BECG homologe Viereck in dem mit dem System I. perspectivisch collinearen $\mathcal{B}\mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{G} \cong B'E'C'G'$. Durch $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, sind aber auch $\mathcal{D}$ und $\mathcal{F}$ bestimmt, also ist auch das vollständige Viereck $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D} \cong$ dem vollständigen Viereck $A'B'C'D'$, und daher das aus dem ersteren erzeugte System congruent mit dem System II. und in perspectivischer Lage mit dem System I. Es ist also die Aufgabe gelöst. — Man wird bemerken, daß dieß auf verschiedene Weise möglich ist. Denn das Dreieck $L\Sigma M \sim \triangle J'A'K'$ kann sowohl auf der einen, als auf der anderen Seite von LM construirt werden, (unserer Figur 84. nach, sowohl auf der unteren, als auf der oberen). Ebenso kann das Dreieck $J'S'K' \sim \triangle LAM$ sowohl auf der einen, als auf der anderen Seite von $J'K'$ construirt werden. Da jedoch Viereck $AL\Sigma M \sim$ Viereck $S'J'A'K'$ sein muß, wenn die perspectivische Lage der collinearen Systeme hervorgebracht werden soll, so sind in Bezug auf die Construction dieser Dreiecke $L\Sigma M$ und $J'S'K'$ von den möglichen vier Fällen nur zwei zulässig. Diese vier Fälle sind nämlich (mit Rücksicht auf unsere Figur) folgende. Es kann liegen, Figur 85.:

I. $\triangle L\Sigma M$ rechts von LM und zugleich $\triangle J'S'K'$ links von $J'K'$
II. $\triangle L\Sigma M$ rechts von LM „ „ $\triangle J'S'K'$ rechts von $J'K'$

---

*) Direkt läßt sich dieß auch so zeigen: Aus $AB\infty L \overline{\wedge} A'B'J'\infty$ folgt $AB : AL = A'B' : J'B'$; also $AB + AL : AL = A'B' + B'J' : J'B'$ oder $BL : AL = A'J' : J'B'$; also $J'B' = \dfrac{AL \cdot A'J'}{BL}$. Aus $AB\infty L \overline{\wedge} \mathcal{A}\mathcal{B}N\infty$ folgt ebenso $AB : AL = \mathcal{A}\mathcal{B} : N\mathcal{B}$, also $AB + AL : AL = \mathcal{A}\mathcal{B} + N\mathcal{B} : N\mathcal{B}$ oder $BL : AL = \mathcal{A}N : N\mathcal{B}$, also $N\mathcal{B} = \dfrac{AL \cdot \mathcal{A}N}{BL}$. Da nun $\mathcal{A}N = A'J'$ ist, so ist also $N\mathcal{B} = J'B'$, und $N\mathcal{A} - N\mathcal{B} = J'A' - J'B'$, oder $\mathcal{A}\mathcal{B} = A'B'$.

III. $\triangle L\Sigma M$ links von LM und zugleich $\triangle J'\mathfrak{S}'K'$ links von $J'K'$ *)
IV. $\triangle L\Sigma M$ links von LM „ „ $\triangle J'\mathfrak{S}'K'$ rechts von $J'K'$.

Von diesen vier Fällen nun sind offenbar nur I. und IV. zulässig, weil nur dann Viereck $AL\Sigma M \sim$ Viereck $\mathfrak{S}'J'A'K'$ sein kann, was bei II. und III. nicht der Fall ist, obschon die einzelnen Dreiecke $L\Sigma M$ und $J'A'K'$, $J'\mathfrak{S}'K'$ und LAM, jedes Paar für sich, einander ähnlich sind. In jedem der beiden zulässigen Fälle I. und IV. aber sind wieder zwei Unter-Abtheilungen möglich; es kann nämlich die Gerade $(N-R)$ der Fig. 84. zufolge entweder unter oder über Σ, der Fig. 85. zufolge entweder rechts oder links von Σ und Σ_3 gelegt werden. Es können also vier Fälle eintreten, indem für ein Projectionscentrum Σ die Gegenaxen $(L-M)$, $(N-R)$ auf verschiedenen oder auf derselben Seite liegen können, und ein Gleiches für das aus Fig. 85. IV. sich ergebende Projectionscentrum Σ_3 gilt. Zugleich fällt auch die Collineationsaxe auf die eine oder die andere Seite von Σ. Außerdem scheint es auf den ersten Anblick noch zwei Möglichkeiten zu geben, wie die Aufgabe gelöst werden könnte. Es war nämlich, um zwei collineare Systeme in perspectivische Lage zu bringen, nöthig, über LM ein Dreieck $LM\Sigma \sim \triangle J'K'A'$ und über $J'K'$ ein Dreieck $J'K'\mathfrak{S}' \sim \triangle LMA$ zu construiren. Wir hatten dieß bis jetzt so gemacht, daß wir den Winkel $A'J'K'$ oder η' an die Ecke L des Dreiecks ALM und den Winkel $A'K'J'$ oder δ' an die Ecke M des Dreiecks ALM, den Winkel ALM oder ϑ an die Ecke J' des Dreiecks $A'J'K'$, den Winkel AML oder γ an die Ecke K' des Dreiecks $A'J'K'$ ansetzten, wodurch die ähnlichen Vierecke $AL\Sigma M \sim \mathfrak{S}'J'A'K'$ Fig. 85 I. und $AML\Sigma_3 \sim \mathfrak{S}'_3K'J'A'$. Fig. 85. IV. entstanden. Es scheint nun möglich zu sein, daß man auch den Winkel $A'J'K'$ an die Ecke M des Dreiecks ALM, den Winkel $A'K'J'$ an L desselben Dreiecks, den Winkel ALM an die Ecke K', den Winkel AML an die Ecke J' des Dreiecks $A'J'K'$ antragen könnte. Es würden dadurch allerdings auch in diesem Falle zwei Paar ähnlicher Vierecke entstehen, nämlich, mit Außschluß der auch hier unmöglichen Fälle II. und III. Viereck $AL\Sigma_2M \sim \mathfrak{S}'_2K'A'J'$ Fig. 85. I. und $AL\Sigma_4M \sim \mathfrak{S}''_3K'A'J'$ Fig. 85. IV. Man wird jedoch aus dem Früheren bemerkt haben, daß es nothwendig ist, den $\angle\eta'$ an L, den $\angle\delta'$ an M, den $\angle\gamma$ an K', den $\angle\vartheta$ an J' anzutragen, wenn AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, je ein Paar homologer Gerader der collinearen Systeme sein sollen, und L, M, J', K' die Gegenpunkte bezüglich von $(A-B)$, $(A-C)$, $(A'-B')$, $(A'-C')$ sind, indem sich im anderen Falle in Fig. 84. $(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})$ und $(A-C)$, $(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})$ und $(A-B)$ auf der Collineationsaxe schneiden würden, so daß also dann $A'B'$ und AC, $A'C'$ und AB homologe Gerade

*) Da in Fig. 85. III. und IV. der Punkt Σ ein anderer ist, als in I. und II., so ist er mit einem anderen Zeichen, durch Σ_3, und da in II. und IV. der Punkt $\mathfrak{S}'$ ein anderer ist, als in I. und III., so ist er in der Figur durch $\mathfrak{S}_3'$ bezeichnet worden.

wären, was gegen die Voraussetzung ist. Wenn wir daher das Bisherige zusammenfassen und in Fig. 86. der Symmetrie wegen den Punkt, den wir in Fig 85. schlechtweg mit Σ bezeichnet hatten, jetzt Σ_1 nennen, so haben wir mit Ausschluß der als unmöglich bezeichneten Fälle nur noch folgende zwei: das dem $\triangle$ J'K'A' ähnliche $\triangle$ LMΣ liegt:

I. rechts von LM und zwar

$\angle \eta'$ (Fig. 84.) an L; $\angle \delta'$ an M; Σ (Fig. 84) in Σ_1 (Fig. 85. oder 86.)

II. links von LM und zwar

$\angle \eta'$ (Fig. 84.) an L; $\angle \delta'$ an M; Σ (Fig. 84) in Σ_3 (Fig. 85. oder 86.)

Legen wir nun in Fig. 86., wo die in Fig. 85. als unbrauchbar verworfenen Punkte Σ_2, Σ_4 der Uebersicht wegen noch einmal mit aufgenommen sind, im Falle I. die Gerade (N—R) oder p (vgl. Fig. 84.) α) unterhalb Σ_1, so daß der Punkt N der Fig. 84. nach N_1 fällt, so fällt der Punkt X (Fig. 84.) nach X_1, T (Fig. 84.) nach T_1, die Collineationsaxe σ (Fig. 84.) nach σ_1. Da nun die Durchschnittspunkte N_1 und T_1 der Gegenaxen (N—R) und (L—M) (Fig. 84.) mit dem Collineationsstrahl (Σ—X) (Fig. 84.) auf der unendlichen Strecke $P_1 \infty X_1$ liegen, so ist nach Lehrsatz 12. die perspectivische Lage der Systeme einstimmig. Legen wir β) die (N—R) oberhalb Σ_1, indem wir $\Sigma_1 N'_1 = \Sigma_1 N$ machen, so kann die zugehörige Collineationsaxe offenbar nicht zwischen Σ_1 und N'_1 liegen, weil sonst die Aufeinanderfolge der homologen Punkte auf dem Collineationsstrahl (Σ_1—N'_1) nicht dieselbe wäre. Es kann also die Strecke $\Sigma_1 T_1$ (vgl. Fig. 84.) von N'_1 nicht nach $N'_1 X''_1$ abgetragen werden, indem dann Punktreihe (Σ_1—X''_1), $\Sigma_1 T_1 X''_1 \infty \barwedge (\Sigma_1 - X''_1)$, $\Sigma_1 \infty X''_1 N'_1$ sein müßte, was bei der dann statt habenden Aufeinanderfolge der Punkte unmöglich ist. Es kann also die Collineationsaxe nicht die Lage σ'_2 haben, sondern es muß die Strecke $\Sigma_1 T_1$ von N'_1 aus nach X'_1 abgetragen werden, so daß die Axe in σ_3 liegt. Da nun jetzt N'_1 und T_1 auf die endliche von Σ_1 und X'_1 begrenzte Strecke fallen, so ist nach Lehrsatz 12. die perspectivische Lage der Systeme entgegengesetzt. Legt man im Falle II. die (N—R) α) unterhalb Σ_3 nach p'_3, so kann die Strecke $\Sigma_3 T_3$ von N_3 nicht nach X''_3 abgetragen werden, weil sonst die Aufeinanderfolge der homologen Punkte gestört würde, sondern sie muß von N_3 nach der anderen Seite getragen werden, und zwar muß man dann die frühere Collineationsaxe σ_1 wieder als Collineationsaxe erhalten. Denn, schneidet (Σ_3—N_3) die σ_1 in X_3, so ist, wenn man das Parallelogramm $\Sigma_1 T_1 T_3 \mathfrak{S}_1$ construirt hat, $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{N}_1 = \Sigma_1 N_1$; es ist aber auch $\Sigma_3 N_3 = \Sigma_1 N_1 = \mathfrak{S}_1 \mathfrak{N}_1$; also ist $N_3 \mathfrak{N}_1 = \Sigma_3 \mathfrak{S}_1$ oder, da offenbar $\mathfrak{S}_3 \Sigma_3 = 2 \cdot \Sigma_3 T_3$ ist, $N_3 \mathfrak{N}_1 = 2 \cdot \Sigma_3 T_3$. Es ist aber der Construction nach $\mathfrak{N}_1 X_3 = N_1 X_1 = \Sigma_1 T_1 = \mathfrak{S}_1 T_3 = \Sigma_3 T_3$, also ist $N_3 X_3 = \Sigma_3 T_3$. Es fällt demnach die zum Collineationscentrum Σ_3 gehörige Axe wieder nach σ_1, und, da N_3 und T_3 auf der endlichen von Σ_3 und X_3, begrenzten Strecke liegen,

ist die Collineation entgegengesetzt. Ebenso überzeugt man sich, daß, wenn man $(N-R)\ \beta)$ oberhalb Σ_3 nach p'_4 legt, die dann sich ergebende Collineationsaxe mit der früheren σ_3 zusammenfallen muß. Da zugleich dann N'_3 und T_3 auf der unendlichen von Σ_3 und X'_3 begrenzten Strecke liegen, so muß nach Lehrsatz 12. die perspectivische Lage der collinearen Systeme einstimmig sein. Fassen wir diese Verhältnisse zusammen, so erhalten wir die Uebersicht:

A. Centrum Σ (Fig. 84.) in Σ_1 (Fig. 86.) und zwar:

a) Axe σ (Fig. 84.) in σ_1 (Fig. 86.) Collineation einstimmig,
b) „ σ „ „ σ_3 „ „ entgegengesetzt.

B. Centrum Σ (Fig. 84.) in Σ_3 (Fig. 86.) und zwar:

a) Axe σ (Fig. 84.) in σ_1 (Fig. 86.) Collineation entgegengesetzt,
b) „ σ „ „ σ_3 „ „ einstimmig.

Es könnte endlich der Gedanke erwachen, als ob man andere Collineationscentra und Collineationsaxen, als die zwei genannten, erhalten könnte. Jetzt nämlich hatten wir in den Vierecken ABCD und A′B′C′D′ die Gegenpunkte auf den in A und A′ convergirenden Geraden (A−B), (A−C); (A′−B′), (A′−C′) gesucht und über LM, J′K′ Dreiecke construirt. Es wäre nicht undenkbar, daß man andere Centra und Axen erhielte, wenn man die Gegenpunkte auf zwei in einem anderen Punkte, z. B. in B, B′ convergirenden Geraden (B−D), (B−F); (B′−D′), (B′−F′) suchte und, wenn L_1, M_1; J'_1, K'_1 (Fig. 84.), diese Punkte sind, über L_1M_1 ein Dreieck $L_1\Sigma_5M_1 \sim \triangle J'_1B'K'_1$, über $J'_1K'_1$ ein Dreieck $J'_1\mathfrak{S}'_5K'_1 \sim L_1BM_1$ construirte. Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß sich dieß nicht so verhält. Denn zunächst müssen nun L_1, M_1 die Durchschnittspunkte von (L−M) oder m mit (B−D), (B−F); J'_1, K'_1 die Durchschnittspunkte von (J′−K′) oder p′ mit (B′−D′), (B′−F′) sein, da es in jedem System nur eine einzige Gegenaxe nach § 7. Lehrsatz 20. geben kann. Sind nun N_1, R_1 die Durchschnittspunkte von $(\mathfrak{B}-\mathfrak{D})$, $(\mathfrak{B}-\mathfrak{F})$ mit (N−R) und zieht man $(\Sigma-N_1)$ so muß, da (N−R) eine Gegenaxe ist, $(\Sigma-N_1) \parallel (B-D)$ sein, indem $(\Sigma-N_1)$ die (B−D) im unendlich entfernten Punkt treffen muß; ebenso ist $(\Sigma-R_1) \parallel (B-F)$, also, da $(N_1-R_1) \parallel (L_1-M_1)$ ist, wenn man sich $(\Sigma-R_1)$ gezogen denkt, $\triangle N_1\Sigma R_1 \sim \triangle L_1BM_1$. Wegen der oben nachgewiesenen Congruenz der durch die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und A′, B′, C′, D′ bestimmten Systeme aber, ist $\triangle N_1\Sigma R_1 \cong \triangle J'_1\mathfrak{S}'K'_1$, also ist auch $\triangle J'_1\mathfrak{S}'K'_1 \sim \triangle L_1BM_1$. Construirt man also über $J'_1K'_1$ ein Dreieck $J'_1\mathfrak{S}'_5K'_1 \sim \triangle L_1BM_1$, so muß $\mathfrak{S}'_5$ nach $\mathfrak{S}'$ fallen, wenn man nämlich den Winkel BL_1M_1 an J'_1, den Winkel BM_1L_1 an K'_1 ansetzt und zwar an der linken Seite von $J'_1K'_1$. In einem anderen der vier möglichen Fälle kann auch $\mathfrak{S}'_5$ nach dem Punkte $\mathfrak{S}'_3$ (Fig. 85. II., III.) fallen; jedenfalls aber muß es nach dem Punkte $\mathfrak{S}$, den man unter gleichen Voraussetzungen erhalten hat, indem man über J′K′ ein Dreieck ähnlich LMA construirt, fallen. Ebenso ist, wenn man sich $(\Sigma-M_1)$ und $(\Sigma-L_1)$ ge-

zogen denkt $\triangle L_1\Sigma M_1$ (Fig. 84.) $\sim \triangle N_1\mathfrak{B}R_1$, also $\triangle L_1\Sigma M_1 \sim \triangle J'_1B'K'_1$; construirt man also über L_1M_1 ein $\triangle L_1\Sigma_5 M_1 \sim \triangle J'_1B'_1K'_1$, so fällt Σ_5 nach Σ oder nach Σ_3 (Fig. 85. III., IV.), jedenfalls in denjenigen der zwei Punkte Σ_1, Σ_3, den man erhält, wenn man unter denselben Voraussetzungen über die Lage der Winkel A'J'K' und A'K'J' über LM ein Dreieck $LM\Sigma \sim \triangle J'K'A'$ construirt. Man erhält also, man mag, statt die oben angegebene Construction in A zu vollziehen, sie in irgend einem anderen Punkte machen, stets nur dieselben zwei Collineationscentra und ebenso dieselben zwei Collineationsaxen. Man hätte also, da nichts darauf ankommt, daß man die Construction gerade an A macht, statt der Punkte A, A' auch andere nehmen, also ein anderes Paar Vierecke, etwa BCDP und B'C'D'P' nehmen, und die Construction an B machen können; und da nichts darauf ankommt, daß dieß gerade an B geschehe, anstatt B einen anderen Punkt, etwa Q, also ein Paar andere Vierecke CDPQ und C'D'P'Q' wählen und die Construction an C machen können; und ebenso hätte man auch statt C und statt D andere Punkte, also jedes beliebige Paar homologer Vierecke wählen können, und hätte stets eines der zwei Centra Σ_1, Σ_3 und eine der zwei Axen σ_1, σ_3 erhalten. Man erhält also den

17. Lehrsatz. Wenn von einem Paar ebener collinearer Systeme das eine seine Lage nicht ändert, so läßt sich das andere für zwei Punkte Σ_1, Σ_3, als Collineationscentra, und zwei Gerade σ_1, σ_3, als Collineationsaxen mit dem ersten in perspectivische Lage bringen, und zwar für:
Centrum Σ_1 u. Axe σ_1 oder σ_3;
" Σ_3 " σ_1 " σ_3;
je nachdem die Collineation entgegensetzt oder einstimmig werden soll. Sowohl die einstimmige, als die entgegengesetzte Lage kann auf zweierlei Weise hervorgebracht werden. Fig. 86*).

17. Lehrsatz. Wenn von einem Paar ebener collinearer Systeme das eine seine Lage nicht ändert, so läßt sich das andere für zwei Gerade σ_1, σ_3, als Collineationsaxen, und zwei Punkte Σ_1, Σ_3, als Collineationscentra mit dem ersten in perspectivische Lage bringen, und zwar für:
Axe σ_1 u. Centrum Σ_1 oder Σ_3;
" σ_3 " Σ_1 " Σ_3;
je nachdem die Collineation entgegengesetzt oder einstimmig werden soll. Sowohl die einstimmige als die entgegengesetzte Lage kann auf zweierlei Weise hervorgebracht werden. Fig. 86*).

*) Die von Witzschel in seinen: „Grundlinien der neueren Geometrie" angegebene Methode, zwei collineare Systeme in perspectivische Lage zu bringen, (§. 176) ist offenbar unrichtig. Denn um überzeugt zu sein, daß der Punkt P, der auf die am angezogenen Orte erwähnte Methode gefunden wird, das Collineationscentrum sei, wäre erst noch zu beweisen, daß auf jeder der daselbst erwähnten

Man sieht ferner an Fig. 83a., da b und b′ ein Paar homologer Gerader der beiden perspectivisch liegenden collinearen Systeme sind und nach § 1. Lehrsatz 11. der Strahlbüschel B,βbb′σ jeden Collineationsstrahl ε, γ, δ.... conform theilt und an Fig. 83b., da B und B′ ein Paar homologer Punkte der beiden perspectivisch liegenden collinearen Systeme sind und nach § 1. Lehrsatz 11. alle durch die Punktreihe β,BBB′Σ gehenden Strahlen, sie mögen von einem Collineationspunkt E, Γ, Δ.... ausgehen, von welchem sie wollen, conform sind, sogleich die Richtigkeit des Satzes ein.

18. Lehrsatz. Das Doppelverhältniß derjenigen Punktreihen γ,ΣCC′Γ; δ,ΣFF′Δ; ε,ΣEE′E; .... welches von dem Collineationscentrum Σ, den Durchschnittspunkten C, C′; F, F′; E, E′;.... desselben Paares homologer Gerader b, b′ mit den Collineationsstrahlen, und dem jedem Collineationsstrahl γ, δ, ε.... zugehörigem Collineationspunkt Γ, Δ, E, ... gebildet wird, ist für alle Collineationsstrahlen gleich. Es ist also:

$$\frac{\Sigma C}{\Gamma C} : \frac{\Sigma C'}{\Gamma C'} = \frac{\Sigma F}{\Delta F} : \frac{\Sigma F'}{\Delta F'} = \frac{\Sigma E}{EE} : \frac{\Sigma E'}{EE'} \ldots$$

Fig. 83a.

18. Lehrsatz. Das Sinus-Doppelverhältniß derjenigen Strahlbüschel Γ,σcc′γ; Δ,σff′δ; E,σee′ε;.... welches von der Collineationsaxe σ, den Verbindungsgeraden c, c′; f, f′; e, e′;.... desselben Paares homologer Punkte B, B′ mit den Collineationspunkten und dem jedem Collineationspunkt Γ, Δ, E...., zugehörigen Collineationsstrahl γ, δ, ε, ... gebildet wird, ist für alle Collineationspunkte gleich. Es ist also:

$$\frac{\sin \sigma c}{\sin \gamma c} : \frac{\sin \sigma c'}{\sin \gamma c'} = \frac{\sin \sigma f}{\sin \gamma f} : \frac{\sin \sigma f'}{\sin \gamma f'} = \frac{\sin \sigma e}{\sin \gamma e} : \frac{\sin \sigma e'}{\sin \gamma e'}$$

Fig. 83b.

Es können nun bei der perspectivischen Lage ebener Systeme noch ein Paar besondere Fälle eintreten. Es kann nämlich

1) Das Collineationscentrum in das Unendliche rücken. Fig. 87a. 87b. In diesem Falle werden sämmtliche Collineationsstrahlen α, β, γ.... parallel. Sind nun s und s′, oder ſ und ſ′, oder t und t′ etc. ein Paar homologer Gerader, so muß der unendlich entfernte Punkt, z. B. auf s, da er der Durchschnitt von s mit einem in unendlicher Ferne liegenden Collineationsstrahl ist, dem unendlich ent-

---

durch denselben Punkt P gehenden Verbindungsgeraden DD′, αα′, ββ′, γγ′ der homologen Punkte D, D′; α, α′; β, β′; γ, γ′; je noch ein Paar homologer Punkte sich befinde. Denn offenbar wäre erst dann dargethan, daß jede dieser Verbindungsgeraden eine sich selbst homologe Gerade der beiden collinearen Systeme, und also ihr Durchschnittspunkt P der Scheitel eines sich selbst homologen Strahlbüschels wäre. Dieses ist aber a. a. O. nicht bewiesen, und läßt sich auch nicht beweisen. (M. vergl. übrigens Magnus: „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie". §. 13.)

fernten Punkt auf s' homolog sein; ebenso der unendlich entfernte Punkt auf ſ dem auf ſ', der unendlich entfernte Punkt auf t dem auf t' u. s. w., es werden also alle homologen Geraden, z. B. s und s', ſ und ſ' u. s. w. in homologen Punkten A und A', B und B', C und C', ... F und F', G und G', ... proportional getheilt nach § 3. Lehrsatz 22., 25. Wir erhalten also auf diese Weise ein Paar von Systemen, in denen jedes Paar homologer Gerader, z. B. s, s'; t, t'; ſ, ſ'; etc. proportional getheilt ist, und die daher von der bisherigen Betrachtung durch den § 7. Lehrsatz 5. ausdrücklich ausgeschlossen worden waren, da von einem Paar solcher Systeme die im Früheren ausgesprochenen Sätze nicht behauptet werden können. Es ist demnach natürlich, daß wir diesen besonderen Fall mit einem besonderen Namen belegen. Wir sagen daher, indem wir bemerken, daß die Proportionalität ein besonderer Fall der Conformität ist, indem wir uns an die zweite in § 7. Erklärung 6. aufgestellte Definition von „collinear" halten.

19. Erklärung. **Ist in zwei collinearen Systemen jedes Paar homologer Punktreihen proportional, so heißen die Systeme affin,**

wobei es freilich, wegen des Lehrsatzes 5. in § 7. sich ereignen könnte, daß wir hier mit der ersten der in § 7. Erklärung 6. ausgesprochenen Definition in Widerspruch kämen. Denn, wie dort § 7. Lehrsatz 4. gezeigt wurde, ist die Eigenschaft, in perspectivische Lage gebracht werden zu können, eine nothwendige Folge von der Conformität homologer Punktreihen in zwei Systemen, es kann dieß aber nicht behauptet werden, wenn die Conformität den speciellen Charakter der Proportionalität annimmt. Wir haben also, uns an die zweite, mehr arithmetische, Definition haltend, gleichwohl Systeme, in denen jedes Paar homologer Punktreihen proportional ist, für eine besondere Art der allgemeinen Gattung der „collinearen" Systeme erklärt.

Da der Satz, daß jedes Paar homologer Punktreihen proportional ist, unmittelbar aus der Definition hervorgeht, können wir also sagen:

20. Lehrsatz. **In affinen Systemen sind die unendlich entfernten Punkte jedes Paares homologer Punktreihen homolog.**

In Fig. 87. liegen nun die beiden Systeme so, daß die Verbindungsgeraden jedes Paares homologer Punkte (A—A'), (B—B'), (C—C'), u. s. w. parallel sind. Affine Systeme können nun allerdings so liegen, aber sie müssen nicht. Wir stellen daher die

21. Aufgabe. **Zwei affine ebene Systeme in beliebiger Lage zu construiren.** Fig. 88.

Auflösung. Da die Proportionalität nur ein besonderer Fall der Conformität ist, so können wir die zu § 7. Aufgabe 12. gegebenen Auflösungen wieder benutzen, natürlich jedoch nur die unter 1. aufge-

führten, indem der Charakter zweier Systeme, als „affiner", nur von der besonderen Eigenschaft der Punktreihen abhängt, während den Strahlbüscheln keine besondere Eigenschaft zukommt. Man ziehe daher α) zwei Paar proportionale Punktreihen von einer unbegrenzten Anzahl von Punkten, z. B. Fig. 88. Punktreihe $s, ABCDE \ldots \infty \overline{\wedge} s', A'B'C'D'E' \ldots \infty$; $\mathfrak{s}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E} \ldots \infty \overline{\wedge} \mathfrak{s}', \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\mathfrak{E}' \ldots \infty$ und ziehe die sich aus ihnen ergebenden Geraden $(A-\mathfrak{A})$, $(A'-\mathfrak{A}')$; $(C-\mathfrak{C})$, $(C'-\mathfrak{C}')$; $(\mathfrak{A}-B)$, $(\mathfrak{A}'-B')$...., so folgt, da die Punktreihen s und s', $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ proportional sind, Proportionalität aber nur ein specieller Fall von Conformität ist, ebenso wie § 7. Aufgabe 12. Auflösung 1. α) gezeigt wurde, daß auch auf jeden zwei homologen Geraden z. B. $(\mathfrak{A}-B)$, $(\mathfrak{A}'-B')$ conforme Punktreihen entstehen. Es ist aber jetzt nachzuweisen, daß dieselben auch alle p r o p o r t i o n a l sind. Zieht man zu dem Zwecke $(A-\mathfrak{A})$ und $(C-\mathfrak{C})$; $(A'-\mathfrak{A}')$ und $(C'-\mathfrak{C}')$, so ist nach § 1. Lehrsatz 8.

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{AC} = \frac{S\mathfrak{C}}{SC} \cdot \frac{E\mathfrak{A}}{EA} \text{ und } \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'}{A'C'} = \frac{S'\mathfrak{C}'}{S'C'} \cdot \frac{E'\mathfrak{A}'}{E'A'};$$

oder:
$$\frac{S\mathfrak{C}}{SC} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{AC} \cdot \frac{EA}{E\mathfrak{A}} \text{ und } \frac{S'\mathfrak{C}'}{S'C'} = \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'}{A'C'} \cdot \frac{E'A'}{E'\mathfrak{A}'};$$

also:
$$\frac{S\mathfrak{C}}{SC} : \frac{S'\mathfrak{C}'}{S'C'} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{AC} \cdot \frac{EA}{E\mathfrak{A}} : \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'}{A'C'} \cdot \frac{E'A'}{E'\mathfrak{A}'};$$

oder:
$$\frac{S\mathfrak{C}}{SC} : \frac{S\mathfrak{C}'}{SC} = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}{E\mathfrak{A}} \cdot \frac{EA}{CA} : \frac{\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'}{E'\mathfrak{A}'} \cdot \frac{EA'}{C'A'}.$$

Nach der Voraussetzung ist aber $\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{A}}{E\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{C}'\mathfrak{A}'}{E'\mathfrak{A}'}$; $\frac{EA}{CA} = \frac{E'A'}{C'A'}$;

da $s, ACE\infty \overline{\wedge} s', A'C'E'\infty$; $\mathfrak{s}, \mathfrak{A}\mathfrak{C}E\infty \overline{\wedge} \mathfrak{s}', \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'E'\infty$ ist; also ist auch:

$$\frac{S\mathfrak{C}}{SC} = \frac{S'\mathfrak{C}'}{S'C'}.$$

Es ist ferner nach § 1. Lehrsatz 8.

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{AC} = \frac{S\mathfrak{A}}{SA} \cdot \frac{E\mathfrak{C}}{EC} \text{ und } \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'}{A'C'} = \frac{S'\mathfrak{A}'}{S'A'} \cdot \frac{E'\mathfrak{C}'}{E'C'}$$

woraus folgt:
$$\frac{S\mathfrak{A}}{SA} = \frac{S'\mathfrak{A}'}{S'A'}.$$

Es sind also auch die Geraden $(A-\mathfrak{A})$ und $(A'-\mathfrak{A}')$; $(C-\mathfrak{C})$ und $(C'-\mathfrak{C}')$ proportional getheilt, oder es ist auf ihnen Punktreihe $S\mathfrak{A}A\infty \overline{\wedge} S'\mathfrak{A}'A'\infty$, $S\mathfrak{C}C\infty \overline{\wedge} S'\mathfrak{C}'C'\infty$; ganz ebenso läßt sich zeigen, daß auch auf $(B-\mathfrak{B})$ und $(B'-\mathfrak{B}')$, $(D-\mathfrak{D})$ und $(D'-\mathfrak{D}')$ Punktreihe $S\mathfrak{B}B\infty \overline{\wedge} S'\mathfrak{B}'B'\infty$; $SD\mathfrak{D}\infty \overline{\wedge} S'D'\mathfrak{D}'\infty$, daß auf $(A-\mathfrak{A})$ und $(A'-\mathfrak{A}')$, $(B-\mathfrak{B})$ und $(B'-\mathfrak{B}')$ auch Punktreihe $\mathfrak{S}\mathfrak{A}A\infty \overline{\wedge} \mathfrak{S}'\mathfrak{A}'A'\infty$; $\mathfrak{S}\mathfrak{B}B\infty \overline{\wedge} \mathfrak{S}'\mathfrak{B}'B'\infty$ u. s. w. ist. Da die Punktreihe $\mathfrak{S}\mathfrak{A}A\infty$ mit der Punktreihe $S\mathfrak{A}A\infty$ drei Punkte $\mathfrak{A}$, A, ∞, die Punktreihe $\mathfrak{S}'\mathfrak{A}'A'\infty$ mit $S'\mathfrak{A}'A'\infty$ drei Punkte $\mathfrak{A}'$, A', ∞, die Punktreihe $\mathfrak{S}\mathfrak{B}B\infty$ mit $S\mathfrak{B}B\infty$ die Punkte $\mathfrak{B}$, B, ∞, die Punkt-

reihe $\mathcal{T}'\mathcal{B}'B'\infty$ mit $\mathcal{S}'\mathcal{B}'B'\infty$ die Punkte $\mathcal{B}'$, B', ∞ gemein hat, so folgt aus § 2. Lehrsatz 12., daß auch Punktreihe $S\mathcal{T}\mathcal{A}A\infty \;\overline{\wedge}\; S'\mathcal{T}'\mathcal{A}'A'\infty$ und Punktreihe $\mathcal{S}\mathcal{T}\mathcal{B}B\infty \;\overline{\wedge}\; \mathcal{S}'\mathcal{T}'\mathcal{B}'B'\infty$ ist. Ebenso läßt sich zeigen, daß auch $\mathcal{D}\mathcal{G}D\infty \;\overline{\wedge}\; \mathcal{D}'\mathcal{G}'D'\infty$ und also $\mathcal{S}\mathcal{D}\mathcal{G}D\infty \;\overline{\wedge}\; \mathcal{S}'\mathcal{D}'\mathcal{G}'D'\infty$, daß $\mathcal{D}\mathcal{A}A\infty \;\overline{\wedge}\; \mathcal{D}'\mathcal{A}'A'\infty$ und also $\mathcal{D}\mathcal{T}\mathcal{A}A\infty \;\overline{\wedge}\; \mathcal{D}'\mathcal{T}'\mathcal{A}'A'\infty$ ist. Ferner sieht man aus § 1. Lehrsatz 8., indem man $\mathcal{B}$ statt des dortigen A, $\mathcal{C}$ statt B, A statt A', B statt B', M statt S, E statt $\mathfrak{S}$ setzt, daß Punktreihe $M\mathcal{B}A\infty \;\overline{\wedge}\; M'\mathcal{B}'A'\infty$ und daß $MN\mathcal{B}A\infty \;\overline{\wedge}\; M'N'\mathcal{B}'A'\infty$, $MQ\mathcal{C}B\infty \;\overline{\wedge}\; M'Q'\mathcal{C}'B'\infty$ ist u. s. w. Man erhält also lauter proportional getheilte Gerade, die wieder durch Verbindung der verschiedenen Punkte andere ebenfalls proportional getheilte Gerade erzeugen, folglich zwei affine Systeme. Nach § 2. Lehrsatz 12. ist nun die Conformität schon durch drei Punkte bestimmt, so daß man also, wenn nur drei Punkte A, B, C; A', B', C'; $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$; $\mathcal{A}', \mathcal{B}\,\mathcal{C}'$, auf s, s', $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$ gegeben sind, zu jedem Punkt D der s den entsprechenden Punkt D' der s' u. s. f. finden kann. Man kann also β) zwei nur drei Punkte enthaltende Punktreihen als gegeben ansehen (vergl. § 7. Aufgabe 12. Auflösung 1. β)). Es ist indessen dabei zu berücksichtigen, daß da die Punktreihen nicht conform im Allgemeinen, sondern speziell proportional sein sollen, die Punkte, z. B. A, B, C; A', B', C'; $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$; $\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$ nicht ganz willkürlich gewählt werden dürfen, sondern so, daß $\frac{AB}{CB} = \frac{A'B'}{C'B'}$; $\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}'}{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{A}'\mathcal{B}'}{\mathcal{C}'\mathcal{B}'}$ ist; aber selbst dann findet noch ein Uebelstand statt. Es muß nämlich, da der Punkt E homolog E' sein soll, zugleich auch den Bedingungen genügt werden: $\frac{AE}{CE} = \frac{A'E'}{C'E'}$; $\frac{\mathcal{A}E}{\mathcal{C}E} = \frac{\mathcal{A}'E'}{\mathcal{C}'E'}$; es kann also auch E und E' nicht beliebig angenommen werden. Dieß wird indessen vermieden, wenn wir z. B. statt der Punkte B, B' auf s, s' die Punkte E, E' und statt der Punkte $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ auf $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ ebenfalls die Punkte E, E' oder $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ wählen. Wir können also (vgl. § 7. Aufgabe 72. Auflösung 1. β)) ein Paar affine Systeme construiren, wenn auf s und s', $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ nur gegeben sind die Punktreihen s, ABE und $s', A'B'E'$; $\mathfrak{s}, \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{E}$ und $\mathfrak{s}', \mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{E}'$. Man sieht also, daß man nicht, wie in § 7. Aufgabe 12. Auflösung 1. γ), zwei beliebige vollständige Vierecke affin auf einander beziehen kann, sondern nur solche Vierecke $AB\mathcal{B}\mathcal{A}$, $A'B'\mathcal{B}'\mathcal{A}'$, von denen man sich versichert hat, daß der Durchschnittspunkt E und E'; von $(A-B)$ und $(\mathcal{A}-\mathcal{B})$; $(A'-B')$ und $(\mathcal{A}'-\mathcal{B}')$, so gelegen ist, daß $\frac{AB}{EB} = \frac{A'B'}{E'B'}$ und $\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{E\mathcal{B}} = \frac{\mathcal{A}'\mathcal{B}'}{E'\mathcal{B}'}$ ist. Ist dieß aber, so erhält man durch Ziehen aller durch die Vierecke $AB\mathcal{B}\mathcal{A}$, $A'B'\mathcal{B}'\mathcal{A}'$ hervorgerufenen Geraden lauter Punktreihen, die in homologen Punkten proportional getheilt sind, und jede Gerade schneidet die s und $\mathfrak{s}$, s' und $\mathfrak{s}'$ in einem solchen Punkt, daß er der entsprechende

in den proportionalen Punktreihen $s, ABE\infty \;\overline{\wedge}\; s', A'B'E'\infty$; $\mathfrak{s}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{E}\infty \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{s}', \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'\infty$ ist. Denn, daß z. B. $\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{A}}{\mathfrak{T}A} = \frac{\mathfrak{T}'\mathfrak{A}'}{\mathfrak{T}'A'}$; $\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{B}}{\mathfrak{T}B} = \frac{\mathfrak{T}'\mathfrak{B}'}{\mathfrak{T}'B'}$ sich verhält, beweist sich ganz wie oben bei α) gezeigt wurde. Nach demselben Satze § 1. Lehrsatz 8., der ebensowohl gilt, wenn die projicirenden Geraden auf derselben Seite des Gesichtspunkts, z. B. von $\mathfrak{T}$ liegen, oder wenn sie auf verschiedene Seiten des Gesichtspunkts, z. B. von $\mathfrak{D}$ liegen, hat man ebenso, wie oben bei α) gezeigt wurde, $\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}B} = \frac{\mathfrak{D}'\mathfrak{A}'}{\mathfrak{D}'B'}$; $\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}A} = \frac{\mathfrak{D}'\mathfrak{B}'}{\mathfrak{D}'A'}$. Ziehen wir nun $(\mathfrak{T}-\mathfrak{D})$, $(\mathfrak{T}'-\mathfrak{D}')$; $(\mathfrak{T}-E)$, $(\mathfrak{T}'-E')$, so ist der bei $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ entstehende von $(\mathfrak{D}-A)$, $(\mathfrak{D}-F)$, $(\mathfrak{D}-B)$, $(\mathfrak{D}-E)$; $(\mathfrak{D}'-A')$, $(\mathfrak{D}'-F')$, $(\mathfrak{D}'-B')$ $(\mathfrak{D}'-E')$ gebildete Strahlbüschel harmonisch, also auch Punktreihe $s, AFBE$ und $s', A'F'B'E'$ harmonisch, also $s, AFBE \;\overline{\wedge}\; s', A'F'B'E'$; es verhält sich also $\frac{AF}{BF} : \frac{AE}{BE} = \frac{A'F'}{B'F'} : \frac{A'E'}{B'E'}$ und da $\frac{AE}{BE} = \frac{A'E'}{B'E'}$ ist, so ist auch $\frac{AF}{BF} = \frac{A'F'}{B'F'}$; ebenso ist Punktreihe $\mathfrak{s}, \mathfrak{A}\mathfrak{F}\mathfrak{B}\mathfrak{E}$ harmonisch und $\overline{\wedge}\; \mathfrak{s}', \mathfrak{A}'\mathfrak{F}'\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'$, also auch, da $\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}\mathfrak{E}} = \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{E}'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'}$ ist, $\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{F}}{\mathfrak{B}\mathfrak{F}} = \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{F}'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{F}'}$. Man erhält also, wenn man die von den Vierecken $AB\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, $A'B'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ erzeugten Systeme construirt, durch jedes Paar homologer Gerader $(\mathfrak{T}-\mathfrak{D})$ ein Paar homologe Punkte F, F'; $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ der proportionalen Punktreihen auf s, s'; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$. Es ist ferner der bei E und E' entstehende von s, $(\mathfrak{D}-E)$, $\mathfrak{s}$, $(\mathfrak{T}-E)$; s', $(\mathfrak{D}'-E')$ $\mathfrak{s}'$, $(\mathfrak{T}'-E')$ gebildete Strahlbüschel harmonisch, also Punktreihe $A\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{W}$ harmonisch und conform $A'\mathfrak{D}'\mathfrak{B}'\mathfrak{W}'$, also, da $\frac{A\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}\mathfrak{D}} = \frac{A'\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'}$ war, $\frac{A\mathfrak{W}}{\mathfrak{B}\mathfrak{W}} = \frac{A'\mathfrak{W}'}{\mathfrak{B}'\mathfrak{W}'}$. In demselben Strahlbüschel ist ferner Punktreihe $\mathfrak{T}\mathfrak{B}XB$ harmonisch und $\overline{\wedge}\; \mathfrak{T}'\mathfrak{B}'X'B'$, also da $\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{T}}{B\mathfrak{T}} = \frac{\mathfrak{B}'\mathfrak{T}'}{B'\mathfrak{T}'}$ war, auch $\frac{\mathfrak{B}X}{BX} = \frac{\mathfrak{B}'X'}{B'X'}$; ebenso ist Punktreihe $\mathfrak{T}\mathfrak{A}YA$ harmonisch und $\overline{\wedge}\; \mathfrak{T}'\mathfrak{A}'Y'A'$, also, da $\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{T}}{A\mathfrak{T}} = \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{T}'}{A'\mathfrak{T}'}$ war, auch $\frac{\mathfrak{A}Y}{AY} = \frac{\mathfrak{A}'Y'}{A'Y'}$ u. s. w. Man sieht, wie sich dieß fortsetzen läßt (vgl. § 7. Aufgabe 12. Auflösung 1. γ)) und daß durch die Construction aus den Vierecken $AB\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, $A'B'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$, indem man $(A-\mathfrak{D})$, $(A'-\mathfrak{D}')$; $(\mathfrak{T}-E)$, $(\mathfrak{T}'-E')$; $(\mathfrak{D}-E')$, $(\mathfrak{D}'-E)$ etc. zieht, auf jedem Paar homologer Gerader proportionale Punktreihen $A\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{W}$, $A'\mathfrak{D}'\mathfrak{B}'\mathfrak{W}'$; $BX\mathfrak{B}\mathfrak{T}$, $B'X'\mathfrak{B}'\mathfrak{T}'$; $AY\mathfrak{A}\mathfrak{T}$, $A'Y'\mathfrak{A}'\mathfrak{T}'$; etc. entstehen, daß man also ein Paar affine Systeme erhält. Wir hatten

alſo jetzt die drei Punkte A, B, E auf s; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$ auf ſ; A′, B′, E′ auf s′; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{E}'$ auf ſ′ angenommen. Nichts hindert aber, ſtatt z. B. der Punkte B, B′; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, die unendlich entfernten Punkte von s, s′; ſ, ſ′ anzunehmen, oder mit anderen Worten, nur drei Punkte eines jeden Syſtems, nämlich A, E, (oder $\mathfrak{E}$), $\mathfrak{A}$ des erſten, A′, E′ (oder $\mathfrak{E}'$), $\mathfrak{A}'$ des zweiten Syſtems willkürlich zu wählen. Zu jedem, auf s oder ſ weiter angenommenen Punkt z. B. B, $\mathfrak{B}$, des erſten Syſtems giebt es dann nur einen einzigen Punkt B′, $\mathfrak{B}'$ des zweiten Syſtems, da die Gleichungen $\frac{AB}{EB} = \frac{A'B'}{E'B'}$, $\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{E}\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'}{\mathfrak{E}'\mathfrak{B}'}$ erfüllt ſein müſſen. Will man nicht, wie bisher angenommen wurde, beide Syſteme zugleich entſtehen laſſen, ſo conſtruire man δ) erſt ein beliebiges Syſtem, nehme dann zwei Gerade s′ und ſ′ an, die ſich in ε′ ſchneiden, und ſetze feſt, die Gerade s′ ſolle homolog ſein irgend einer Geraden des erſten Syſtems, z. B. der s; ſ′ ſolle homolog ſein einer anderen Geraden ſ; alſo E′ homolog dem Durchſchnittspunkte E von s und ſ. Auf s′ nehme man einen beliebigen Punkt A′ an, und ſetze feſt, dieſer ſolle homolog ſein irgend einem Punkte auf s, z. B. dem A; ebenſo nehme man auf ſ′ irgend einen Punkt $\mathfrak{A}'$ an und ſetze feſt, dieſer ſolle homolog ſein irgend einem Punkte auf ſ, z. B. dem $\mathfrak{A}$. Iſt nun B ein Punkt auf s, $\mathfrak{B}$ auf ſ, ſo conſtruire man nun auf s′ und ſ′ je einen ſolchen Punkt B′, $\mathfrak{B}'$, daß $\frac{A'B'}{E'B'} = \frac{AB}{EB}$; $\frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'}{E'\mathfrak{B}'} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{E\mathfrak{B}}$ iſt und conſtruire das von dem vollſtändigen Viereck AB$\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ erzeugte Syſtem, ſo iſt dieß dem erſten affin (ſ. Auflöſung β)). Man kann alſo zu jedem beliegen Syſtem nicht bloß eins, ſondern unzählig viele affine Syſteme conſtruiren (vgl. das oben über collineare Syſteme Geſagte). Man erhält alſo nach dem Vorigen den

22. Lehrſatz. Das zu einem gegebenen Syſtem affine Syſtem iſt vollſtändig beſtimmt:

α) wenn von beiden zwei homologe proportionale Punktreihen gegeben ſind s,ABC.... ∞ $\overline{\wedge}$ s′,A′B′C′.... ∞, ſ,$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$.... ∞ $\overline{\wedge}$ ſ′,$\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$.... ∞

β) wenn von beiden je zwei Richtungen s, s′; ſ, ſ′ und auf jeder zwei Punkte A, B; A′, B′; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ gegeben ſind, und feſtgeſetzt iſt, daß A′ dem A, B′ dem B, $\mathfrak{A}'$ dem $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$ dem $\mathfrak{B}$, (s′·ſ′) oder E′

22. Lehrſatz. Das zu einem gegebenen Syſtem affine Syſtem iſt vollſtändig beſtimmt, wenn von beiden drei Gerade a, α, e; a′, α′, e′, gegeben ſind, die nicht durch **einen** Punkt gehen, und beſtimmt iſt, daß a′ der a, α′ der α, e′ der e homolog ſein ſolle; oder

Das zu einem gegebenen Syſtem affine Syſtem iſt vollſtändig beſtimmt, wenn beiden zwei homologe Dreiſeite aeα, a′e′α′ gegeben ſind. Fig. 88.

dem (s·f) oder E homolog sein solle, und wenn zugleich die Bedingung erfüllt ist

$$\frac{AE}{BE} = \frac{A'E'}{B'E'} \text{ und } \frac{\mathcal{A}E}{\mathcal{B}E} = \frac{\mathcal{A}'E'}{\mathcal{B}'E'};$$

γ) wenn von beiden drei Punkte A, 𝒜, E, A′, 𝒜′, E′, gegeben sind, die nicht in **einer** Geraden liegen, und bestimmt ist, daß A′ dem A, 𝒜′ dem 𝒜, E′ dem E homolog sein solle; oder:

Das zu einem gegebenen System affine System ist vollständig bestimmt, wenn von beiden zwei homologe Dreiecke AE𝒜, A′E′𝒜′ gegeben sind. Fig. 88.

Hieraus folgt unmittelbar der

23. Lehrsatz. Wenn in zwei affinen Systemen drei Punkte des einen Systems, die nicht auf derselben Geraden liegen, A, E, 𝒜, je mit den homologen Punkten A′, E′, 𝒜′ des anderen Systems zusammenfallen, oder:

Wenn zwei affine Systeme mit einem Paare homologer Dreiecke AE𝒜, A′E′𝒜′, zusammenfallen, so fallen beide Systeme so zusammen, daß jeder Punkt und jede Gerade des einen, auf den homologen Punkt und die homologe Gerade des anderen Systems zu liegen kommt.

23. Lehrsatz. Wenn in zwei affinen Systemen drei Gerade des einen Systems, die nicht durch denselben Punkt gehen, a, e, α, je mit den homologen Geraden a′, e′, α′ des anderen Systems zusammenfallen, oder

Wenn zwei affine Systeme mit einem Paare homologer Dreiseite aeα, a′e′α′, zusammenfallen, so fallen beide Systeme so zusammen, daß jede Gerade und jeder Punkt des einen auf die homologe Gerade und den homologen Punkt des anderen Systems zu liegen kommt.

Da ferner die Gegenaxe eines Systems sämmtliche Punkte enthält, die den unendlich entfernten Punkten des anderen Systems homolog sind, in affinen Systemen aber nach Lehrsatz 20. die unendlich entfernten des einen den unendlich entfernten des anderen homolog sind, so folgt:

24. Lehrsatz. In affinen Systemen liegen die Gegenaxen im unendlichen Raume.

Da ferner nach Lehrsatz 20. die unendlich entfernten Punkte jeder zwei homologen Geraden homolog sind, so folgt, daß, wenn man in Fig. 88. durch irgend einen Punkt, z. B. $\mathcal{A}$ eine Parallele (sie mag n heißen) zu irgend einer Geraden, z. B. zu s zieht, und die dieser Geraden n homologe n′ im zweiten System sucht, da n || s ist, d. h. die s im unendlich entfernten Punkt schneidet, auch n′ die s′ im unendlich entfernten Punkt schneiden, also || s′ sein muß. Man sieht also:

25. Lehrsatz. Sind in einem von zwei affinen Systemen zwei Gerade n, s parallel, so sind auch in dem zweiten System die ihnen homologen Geraden n′, s′ parallel.

Kehren wir nun wieder zur perspectivischen Lage affiner Systeme zurück, so ist zunächst klar, daß das Collineationscentrum im Unendlichen liegen muß. Denn läge es im Endlichen, so wäre auf jedem Collineationsstrahl α, in welchem zwei homologe Gerade beider Systeme vereinigt sind, das Centrum Σ ein sich selbst homologer Punkt. Nach Lehrsatz 20. ist aber schon der unendlich entfernte Punkt von α sich selbst homolog, und nach Lehrsatz 3. kann es außer dem Centrum und der Axe keinen sich selbst homologen Punkt geben. Nun kann nicht der unendlich entfernte Punkt jedes Collineationsstrahls auf der Axe liegen, denn diese läge sonst selbst im Unendlichen und man erhielte, wie an Fig. 93. gezeigt werden wird, den speciellen Fall der Aehnlichkeit. Wir stellen zunächst die Bezeichnung fest:

26. Erklärung. Liegen zwei affine Systeme perspectivisch, so führt die Collineationsaxe σ den besonderen Namen: **Affinitätsaxe.** Die von dem unendlich entfernten, sich selbst homologen Collineationscentrum ausgehenden, sich selbst homologen Strahlen α, β, γ...., heißen: **Affinitätsstrahlen,** die sich selbst homologen Punkte A, B, Γ.... der Affinitätsaxe heißen: **Affinitätspunkte.** Das Collineationscentrum kann nicht bezeichnet werden, denn es liegt im Unendlichen. Fig. 87a., 87b.

Zunächst entsteht nun die leicht zu lösende

27. Aufgabe. Zwei perspectivisch liegende affine Systeme zu construiren. Fig. 87a., 87b.

Auflösung. Man ziehe beliebige parallele Gerade α, β, γ, δ, ε.... nehme dann auf dreien derselben, z. B. auf β, γ, ε. Fig. 87a., 87b. beliebige zwei Punkte an, z. B. B und B′ auf β; F und F′ auf γ; E und E′ auf ε und ziehe (B−F), (B−E), (E−F), (B′−F′), (B′−E′), (E′−F′), so müssen sich (B−F) und (B′−F′), (B−E) und (B′−E′), (E−F) und (E′−F′), da sich (B−B′), (F−F′), (E−E′) in einem und demselben (unendlich entfernten) Punkte schneiden, auf einer und derselben Geraden σ schneiden nach § 3. Lehrsatz 13. Diese ist die Affinitätsaxe. Nun sind jede zwei von homologen Punkten $(s \cdot \alpha)$ und $(s' \cdot \alpha)$, $(s \cdot \beta)$ und $(s' \cdot \beta)$, $(s \cdot \gamma)$ und $(s' \cdot \gamma)$;....

$(\mathfrak{s}\cdot\alpha)$ und $(\mathfrak{s}'\cdot\alpha)$, $(\mathfrak{s}\cdot\beta)$ und $(\mathfrak{s}'\cdot\beta)$, $(\mathfrak{s}\cdot\gamma)$ und $(\mathfrak{s}'\cdot\gamma)$...., $(\mathfrak{t}\cdot\alpha)$ und $(\mathfrak{t}'\cdot\alpha)$, $(\mathfrak{t}\cdot\beta)$ und $\mathfrak{t}'\cdot\beta)$, $(\mathfrak{t}\cdot\gamma)$ und $\mathfrak{t}'\cdot\gamma)$...., ausgehenden und sich auf σ schneidenden Geraden, z. B. e und e', die von A und A' ausgehen und sich im Punkt H der σ schneiden, homologe Gerade. Ihrer kann man so viele ziehen, als man will und man erhält so zwei affine Systeme in perspectivischer Lage.

Die perspectivische Lage affiner Systeme hat noch eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Es seien B und B', E und E' irgend zwei Paar homologer Punkte, und man ziehe (B−E), (B'−E'), so schneiden sich dieselben jedenfalls auf der Affinitätsaxe σ in Θ, Fig. 87a., 87b., und es verhält sich $\frac{\mathrm{BB}}{\mathrm{EE}} = \frac{\Theta\mathrm{B}}{\Theta\mathrm{E}}$ und ebenso $\frac{\mathrm{BB}'}{\mathrm{EE}'} = \frac{\Theta\mathrm{B}}{\Theta\mathrm{E}'}$; also $\frac{\mathrm{BB}}{\mathrm{EE}} = \frac{\mathrm{BB}'}{\mathrm{EE}'}$ oder $\frac{\mathrm{BB}}{\mathrm{BB}'} = \frac{\mathrm{EE}}{\mathrm{EE}'}$. Sind ferner z. B. F und F' noch ein beliebiges Paar homologer Punkte und zieht man (B−F) und (B'−F'), die sich im Punkte E der σ schneiden, so hat man $\frac{\mathrm{BB}}{\Gamma\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{E}\Gamma}$; $\frac{\mathrm{BB}'}{\Gamma\mathrm{F}'} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{E}\Gamma}$; also $\frac{\mathrm{BB}}{\Gamma\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{B}'\mathrm{B}}{\Gamma\mathrm{F}'}$ oder $\frac{\mathrm{BB}}{\mathrm{BB}'} = \frac{\Gamma\mathrm{F}}{\Gamma\mathrm{F}'}$. Sind D und D' noch ein Paar homologer Punkte, so folgt ebenso, indem man (F−D) und (F'−D') zieht, $\frac{\Gamma\mathrm{F}}{\Gamma\mathrm{F}'} = \frac{\Delta\mathrm{D}}{\Delta\mathrm{D}'}$. Man sieht, wie sich dieß fortsetzen läßt. Zugleich ist auch, wenn C und C' ein anderes Paar, mit F und F' auf demselben Affinitätsstrahl liegender Punkte ist, da das sich selbst homologe Collineationscentrum Σ im Unendlichen liegt, $\frac{\infty\mathrm{F}}{\Gamma\mathrm{F}} : \frac{\infty\mathrm{C}}{\Gamma\mathrm{C}} = \frac{\infty\mathrm{F}'}{\Gamma\mathrm{F}'} : \frac{\infty\mathrm{C}'}{\Gamma\mathrm{C}'}$ oder $\frac{\Gamma\mathrm{C}}{\Gamma\mathrm{F}} = \frac{\Gamma\mathrm{C}'}{\Gamma\mathrm{F}'}$ oder $\frac{\Gamma\mathrm{F}}{\Gamma\mathrm{F}'} = \frac{\Gamma\mathrm{C}}{\Gamma\mathrm{C}'}$ u. s. w., so daß man den Satz erhält:

28. **Lehrsatz.** In zwei perspectivisch liegenden affinen Systemen ist das Verhältniß der Strecken, welche auf einem Affinitätsstrahl von einem Paare homologer Punkte und dem zugehörigen Affinitätspunkt gebildet werden, für alle Affinitätsstrahlen und alle Paare homologer Punkte dasselbe, also constant. Es ist also

$$\frac{\mathrm{BB}}{\mathrm{BB}'} = \frac{\Gamma\mathrm{F}}{\Gamma\mathrm{F}'} = \frac{\Gamma\mathrm{C}}{\Gamma\mathrm{C}'} = \frac{\Delta\mathrm{D}}{\Delta\mathrm{D}'} = \frac{\Delta\mathrm{G}}{\Delta\mathrm{G}'} = \frac{\mathrm{EE}}{\mathrm{EE}'} = \ldots$$

Fig. 87a., 87b.

Es seien ferner BEF und B'E'F' zwei homologe Dreiecke in zwei perspectivisch affinen Systemen, ihre Flächen mögen bezüglich durch F, f bezeichnet werden; die Flächen der Dreiecke BCF, ECF seien bezüglich F_1, F_2., die der Dreiecke B'CF', E'CF' bezüglich f_1, f_2; das von B auf (C−F) gefällte Perpendikel habe die Länge H_1; das von E auf (C−F) gefällte die Länge H_2; das von B' und von

E' auf (C'—F') gefällte hat nun ebenfalls bezüglich die Länge H_1, H_2; also ist: $F_1 = CF \cdot \frac{H_1}{2}$; $F_2 = CF \cdot \frac{H_2}{2}$; $f_1 = C'F' \cdot \frac{H_1}{2}$; $f_2 = C'F' \cdot \frac{H_2}{2}$; also ist $F = CF \cdot \frac{H_1 + H_2}{2}$; $f = C'F' \cdot \frac{H_1 + H_2}{2}$; folglich verhält sich $\frac{F}{f} = \frac{CF}{C'F'}$. Es verhält sich aber, da die Systeme affin, C, C'; F, F', homologe Punkte, Γ ein sich selbst homologer Punkt ist, $\Gamma C : \Gamma F = \Gamma C' : \Gamma F'$, folglich $\Gamma C : CF = \Gamma C' : C'F'$, oder es ist $\frac{CF}{C'F'} = \frac{\Gamma C}{\Gamma C'}$. Dieser Werth ist aber nach Lehrsatz 28. constant. Man hat also den

29. Lehrsatz. In zwei perspectivisch liegenden affinen Systemen ist das Verhältniß der Flächen *F*, *f*, aller Paare homologer Dreiecke, z. B. BEF und B'E'F', constant, nämlich gleich dem Verhältniß der Strecken, die auf einem Affinitätsstrahl von zwei homologen Punkten und dem zugehörigen Affinitätspunkt abgeschnitten werden. Es ist also:

$$\frac{F}{f} = \frac{\Gamma C}{\Gamma C'} = \frac{\Gamma F}{\Gamma F'} = \frac{BB}{BB'} = \frac{\Delta D}{\Delta D'} = \frac{\Delta G}{\Delta G'} = \ldots$$

Fig. 87a., 87b.

Wir sahen oben, § 7. Lehrsatz 16., daß zwei collineare Systeme durch zwei Vierecke oder Vierseite bestimmt sein, und Lehrsatz 15., daß sie perspectivisch liegen, wenn ein Paar homologer vollständiger Vierecke oder Vierseite perspectivisch liegt. In Lehrsatz 22. sahen wir, daß zwei affine Systeme durch ein Paar homologer Dreiecke oder Dreiseite vollständig bestimmt sind; es liegt nun der Gedanke nahe, daß sie sich in perspectivischer Lage befinden werden, wenn ein Paar homologer Dreiecke oder Dreiseite sich in perspectivischer Lage befindet, und zwar so, daß das Collineationscentrum im Unendlichen liege. Hierüber haben wir uns Gewißheit zu verschaffen. Es seien also BFE, B'F'E' Fig. 89. zwei homologe Dreiecke zweier affiner Systeme, und es seien die drei Verbindungsgeraden (B—B'), (F—F'), (E—E') oder β, γ, ε, parallel. Da dieselben also in einem und demselben (unendlich entfernten) Punkte convergiren, so schneiden sich nach § 3. Lehrsatz 13. die Geraden (B—E) und (B'—E'), (B—F) und B'—F'), (E—F) und (E'—F') auf derselben Geraden σ. Wird nun (B—E) von γ in C geschnitten, und sucht man den ihm homologen Punkt C' des zweiten Systems, so muß sich verhalten $\frac{B'C'}{E'C'} = \frac{BC}{EC}$; es muß also (C—C') ∥ (B—B') und ∥ (E—E') sein. Dieß ist aber schon der Fall, da γ ∥ β ∥ δ ist, also ist der Durchschnitt von γ mit (B'—E') der dem Punkt C homologe C', daher γ eine sich selbst homologe Gerade, indem auf ihr die ho-

mologen Geraden (C—F), (C′—F′) liegen. Zieht man nun durch F eine Parallele zu (B—E), so muß nach Lehrsatz 25. die homologe Gerade durch F′ gehen und parallel (B′—E′) sein; zieht man durch E eine Parallele zu (B—F), so muß nach Lehrsatz 25. die homologe durch E′ gehen und parallel zu (B′—F′) sein. Schneiden sich also diese durch F und E, durch F′ und E′ gezogenen Parallelen in K und K′, so sind dieß homologe Punkte der beiden affinen Systeme. Schneidet nun ε die (F—K) in H, und die (F′—K′) in H′, so ist zunächst im Parallelogramm BEKF, die Länge EK = FB; KH = KF — FH = BE — CE = BC; $\angle$ EKH = $\angle$ FBC, also $\triangle$ EKH $\cong$ $\triangle$ FBC; ebenso ist $\triangle$ E′K′H′ $\cong$ $\triangle$ F′B′C′; denkt man sich nun in dem Dreieck FBC das Loth von B auf CF, im Dreieck EKH, das Loth von K auf HE gefällt, so müssen diese gleich sein, wegen der Congruenz der Dreiecke, ebenso ist das Loth von K′ auf H′E′ gleich dem von B′ auf C′F′. Die Lothe von B auf CF und von B′ auf C′F′ sind aber gleich, da $\beta \parallel \gamma$ war; also sind auch die Lothe von K auf HE und von K′ auf H′E gleich, und auch parallel, da beide $\perp \varepsilon$ stehen. Also ist auch (K—K′) $\parallel \varepsilon$; daher auch (K—K′) $\parallel$ (E—E′) $\parallel$(C—C′). Es verhält sich also auch $\frac{FH}{KH} = \frac{F'H'}{K'H'}$; es sind also auch H und H′ homologe Punkte der affinen Systeme, also ist ε eine sich selbst homologe Gerade, da auf ihr die homologen Geraden (E—H), (E′—H′) vereinigt sind, mithin ist der unendlich entfernte Punkt, da sich in ihm die sich selbst homologen Geraden γ und ε schneiden, ebenfalls sich selbst homolog, und also β, γ, ε, $\varkappa$, Affinitätsstrahlen. Da sich ferner $\frac{C\Theta}{B\Theta} = \frac{C'\Theta}{B'\Theta}$ verhält, so muß Θ sich selbst homolog sein, ebenso M und N. Es ist also σ die Affinitätsaxe. Man hat also den

30. Lehrsatz. Zwei affine Systeme befinden sich in perspectivischer Lage, wenn zwei homologe Dreiecke oder Dreiseite BEF, B′E′F′, so liegen, daß die Verbindungsgeraden (B—B′), (E—E′), (F—F′) der homologen Ecken durch einen und denselben unendlich entfernten Punkt gehen, und also parallel sind. Diese Verbindungsgeraden sind dann die Affinitätsstrahlen; die Gerade σ, auf der nach § 3. Lehrsatz 13. die Durchschnittspunkte von (B—E) mit (B′—E′), (B—F) mit (B′—F′), (E—F) mit (E′—F′), liegen, ist die Affinitätsaxe. Fig. 89.

Mit Hülfe dieses Lehrsatzes können wir nun auch die Aufgabe zu lösen versuchen: Zwei affine Systeme in perspectivische Lage zu bringen. Offenbar können wir die Auflösung der Aufgabe 16. hier nicht anwenden, denn diese gründete sich auf Construction der Gegenaxen und bei affinen Systemen liegen dieselben nach Lehrsatz 24. im unendlichen Raume. Zugleich erinnert man sich, daß nach § 7.

Lehrsatz 5. es überhaupt problematisch ist, ob affine Systeme sich in perspectivische Lage bringen lassen. Wir haben also zunächst die Frage zu beantworten: Lassen sich zwei affine Systeme stets in perspectivische Lage bringen? Da es nun zu jedem System unendlich viele affine giebt, wie oben bemerkt wurde, also auch die einem bestimmten Dreieck ABC des einen Systems homologen Dreiecke A'B'C' in den ihm affinen Systemen die verschiedensten Gestalten und Größen erhalten können, da ferner nach Lehrsatz 30. zwei affine Systeme dann perspectivisch liegen, wenn sie sich in eine solche Lage bringen lassen, daß die Verbindungsgeraden (A—A'), (B—B'), (C—C') der homologen Ecken eines Paares homologer Dreiecke ABC, A'B'C', parallel sind; so sieht man, daß die Beantwortung unserer Frage auf die Beantwortung der Frage hinaus kommt: Lassen sich zwei beliebige Dreiecke ABC und A'B'C' in eine solche Lage bringen, daß (A—A'), (B—B'), (C—C') parallel ist? Auch in dieser Form können wir bis jetzt noch nichts Bestimmtes sagen, denn nach § 6. Lehrsatz 8. lassen sich zwar jede zwei Dreiecke für jeden Punkt, als Gesichtspunkt in Projectionslage bringen, jedoch nur so lange derselbe sich in endlicher Entfernung befindet, was hier eben nicht der Fall sein soll. Wir haben also unsere jetzige Aufgabe für sich zu untersuchen. Es seien nun ABC und A'B'C' zwei homologe Dreiecke in zwei affinen Systemen. Lassen sie sich nun zwischen drei parallele Gerade α, β, γ, so legen, daß A und A' auf α; B und B' auf β; C und C' auf γ liegen, oder, daß α, β, γ bezüglich die Verbindungsgeraden (A—A'), (B—B'), (C—C') sind; so müssen sich in den Systemen, so lange sie noch nicht perspectivisch liegen, solche durch A, B, C; A', B', C', gehende parallele Gerade α_1, β_1, γ_1; α'_1, β'_1, γ'_1, finden lassen, daß der direkte Abstand der Geraden α_1 von β_1 ebenso groß ist als der von α'_1 von β'_1, und daß zugleich der direkte Abstand der α_1 von γ_1 ebenso groß ist als der der α'_1 von γ'_1 Fig. 90. Denn dann kann man das zweite System so auf das erste legen, daß α'_1 auf α_1; β'_1 auf β_1; γ'_1 auf γ_1 fällt, und es sind also dann, da A und A' auf α_1, B und B' auf β_1, C und C' auf γ_1 sich befinden, und α_1, β_1, γ_1 parallel sind nach Lehrsatz 30., die Systeme in perspectivischer Lage. Es entspringt also die Aufgabe, an zwei Dreiecken ABC und A'B'C' solche parallele Gerade α_1, β_1, γ_1, zu finden. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß dieß nicht immer möglich ist. Man überzeugt sich hiervon folgendermaßen: Man beschreibe über den drei Seiten AB, AC, BC des Dreiecks ABC. Fig. 91. als Durchmesser Kreise, ziehe durch A, B, C die Parallelen bezüglich α, β, γ und verfolge nun die verschiedenen Verhältnisse, die eintreten, je nachdem man dieselben in der einen oder der anderen Richtung zieht. Wir gehen von dem Falle aus, wo α, β, γ senkrecht auf AB stehen. Dann liegt in unserer Figur γ zwischen α und β und der direkte Abstand der am weitesten von einander entfernten Geraden α von β ist gleich AB. Drehen wir jetzt den Strahl α um A, so daß

das unterhalb AB liegende Stück AG′ von links nach rechts sich fortbewegt, so drehen sich natürlich auch β und γ, da sie mit α parallel sein sollen. Offenbar bleibt γ zwischen α und β so lange, bis $\alpha \parallel BC$ wird, (indem es in die Lage (E—D) kommt), und also β und γ mit BC zusammenfallen. Dann ist offenbar der Abstand des α von β gleich BD, denn der Winkel ADB steht auf dem Halbkreis und ist ein Rechter. Da aber $AD \parallel BC$ ist, so ist auch $\angle CBD = 90^{\circ}$, und zieht man von C nach dem Punkte E, in welchem die DA die Peripherie des Kreises über AC schneidet, die Gerade CE, so ist auch $CE = BD$. Ebenso ist, wenn AG′ den Kreis über AC in G trifft und CG gezogen wird, $\angle AGC = 90^{\circ}$, weil er über dem Halbkreis steht, also auch CG senkrecht auf AG, und da auch AB senkrecht auf CG war, so ist $CG \parallel AB$; ebenso $CH \parallel AB$; also fällt CH und CG in dieselbe Gerade GH, und diese ist gleich AB. Wir können also sagen: Drehen sich die Strahlen α, β, γ aus der zu AB senkrechten Lage bis in die zu BC parallele Lage, so liegt stets γ zwischen α und β, α und β sind die am weitesten von einander entfernten Strahlen, und die direkte Entfernung derselben nimmt ab von $AB = GH$ bis $BD = CE$. Lassen wir nun die Strahlen α, β, γ, sich weiter drehen, so daß also der untere Theil des Strahls α rechts von AD fällt, so sind jetzt α und γ die äußeren und β der innere. Hat α noch die Lage AD, so ist die direkte Entfernung der äußeren α und γ, da γ mit CB zusammenfällt nach $CE = BD$; sie nimmt offenbar zu, bis α, β, γ senkrecht auf AC zu stehen kommen, bis also α den Kreis über AB in F, γ den Kreis über BC in J trifft, denn dann ist die Entfernung des Strahls α von γ gleich AC. Es ist also dann $\angle CAF = 90^{\circ}$, aber auch $\angle BFA = 90^{\circ}$ als Winkel im Halbkreis; also, da sowohl BF als CA senkrecht auf AF stehen, $BF \parallel AC$; ebenso ist, da auch $\angle ACJ = \angle BJC = 90^{\circ}$ ist, auch $BJ \parallel AC$; also fallen BF und BJ in dieselbe Gerade, und es ist $AC = FJ$ und die Entfernung des α und γ hat also zugenommen von der Größe $CE = BD$ bis auf $AC = FJ$. Die Strahlen α und γ bleiben nun die äußeren, wenn sich α, β, γ, weiter drehen, so lange bis α und β mit AB, und γ mit GH zusammenfallen, dann ist die direkte Entfernung des α von γ gleich $AG = BH$; es hat also die Entfernung des α von γ abgenommen von $AC = FJ$ bis auf $AG = BH$. Bei weiterer Fortsetzung der Drehung werden β und γ die äußeren Strahlen, α der innere. Die direkte Entfernung der äußeren β und γ ist also Anfangs gleich $BH = AG$. Sie wächst offenbar, bis α, β, γ, senkrecht zu BC werden, wenn also γ nach CE, β nach BD fällt; dann wird sie $BC = DE$. Bei weiterer Drehung bleibt noch eine Zeit lang α der innere Strahl, so lange nämlich, bis α, β, γ parallel AC werden, und also α und γ nach AC zusammenfallen. Zugleich nimmt dabei die Entfernung des β von γ wieder ab, indem sie zuletzt den Werth $CJ = AF$ bekommt. Bei weiterer Drehung werden wieder α und β die äußeren Strahlen und ihre direkte Entfernung wächst offenbar so lange, bis α, β, γ senkrecht

auf AB stehen, indem dann die anfängliche Entfernung AF = CJ auf AB = GH angewachsen ist. Hiermit sind aber α, β, γ, wieder in die anfänglich angenommene Lage zurückgekommen. Um das bisher gefundene besser übersehen zu können, bezeichnen wir kurz die direkte Entfernung des Strahls α von β, wenn γ zwischen beiden liegt, durch: „Entfernung $\alpha\gamma\beta$", die direkte Entfernung des Strahls α von γ, wenn β zwischen beiden liegt, durch: „Entfernung $\alpha\beta\gamma$", die direkte Entfernung des Strahls β von γ, wenn α zwischen beiden liegt, durch: „Entfernung $\beta\alpha\gamma$". Dieß vorausgesetzt, können wir das Frühere so zusammenfassen:

Die Entfernung							
$\alpha\gamma\beta$	nimmt	ab von	AB = GH	bis	BD = CE;	wenn	AD ∥ BC
$\alpha\beta\gamma$	„	zu „	CE = BD	„	AC = FJ;	„	AF ⊥ AC
$\alpha\beta\gamma$	„	ab „	AC = FJ	„	AG = BH;	„	CG ∥ AB
$\beta\alpha\gamma$	„	zu „	BH = AG	„	BC = DE;	„	BD ⊥ BC
$\beta\alpha\gamma$	„	ab „	BC = DE	„	CJ = AF;	„	BJ ∥ AC
$\alpha\gamma\beta$	„	zu „	AF = CJ	„	AB = GH;	„	AG ⊥ AB;

oder es ist:

die größte	Entfernung	$\alpha\gamma\beta$	gleich	AB = GH	
„ „	„	$\alpha\beta\gamma$	„	AC = FJ	
„ „	„	$\beta\alpha\gamma$	„	BC = DE	
„ kleinste	„	$\alpha\gamma\beta$	„	AF oder	BD
„ „	„	$\alpha\beta\gamma$	„	CE „	AG
„ „	„	$\beta\alpha\gamma$	„	BH „	CJ;

Der über AB als Durchmesser construirte Kreis schneidet aber offenbar die BC im Fußpunkte des von A auf BC gefällten Höhenperpendikels. Denn heißt der Durchschnittspunkt M, und zieht man AM, so ist $\angle$ AMB = 90°; ebenso schneidet er die AC in einem Punkte N, welcher der Fußpunkt des von B auf AC gefällten Höhenperpendikels ist; und ebenso ist CL das von C auf AB gefällte Loth. Bezeichnen wir nun die Dreiecksseiten AB, AC, BC bezüglich kurz mit c, b, a; das von C auf c gefällte Loth mit h_c, das von B auf b gefällte mit h_b, das von A auf a gefällte mit h_a; so können wir, da offenbar AF = CJ = BN, BD = CE = AM, BH = AG = CL ist, den letzten Satz auch so aussprechen: es ist

I.	1) die größte Entfernung	von	$\alpha\gamma\beta$	gleich	c;	
	2) „ „ „	„	$\alpha\beta\gamma$	„	b;	
	3) „ „ „	„	$\beta\alpha\gamma$	„	a;	
II.	1) „ kleinste „	„	$\alpha\gamma\beta$	„	h_a oder	h_b;
	2) „ „ „	„	$\alpha\beta\gamma$	„	h_a „	h_c;
	3) „ „ „	„	$\beta\alpha\gamma$	„	h_b „	h_c.

Gesetzt, es sei nun in dem Dreieck ABC des einen Systems $h_a < h_b$, also h_a die kleinste Entfernung von $\alpha\gamma\beta$; im homologen Dreieck A′B′C′ des zweiten Systems sei $h'_a{}' < h'_b{}'$, also $h'_a{}'$ die kleinste

Entfernung $\alpha'\gamma'\beta'$ und zugleich sei $c' > c$ und $h'_{a'} > c$, so leuchtet aus I. 1), II. 1), ein, daß Fig. 91. durch die Ecken A, B, C; A', B', C' keine Geraden $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$, so gezogen werden können, daß γ_1 zwischen α_1 und β_1, γ'_1 zwischen α'_1 und β'_1 zu liegen kommt, und daß beim Aufeinanderlegen α'_1 auf α_1, β'_1 auf β_1, γ'_1 auf γ_1 fällt. Denn soll γ_1 und γ'_1 zwischen α_1 und β_1, α'_1 und β'_1 zu liegen kommen, so kann die größte mögliche Entfernung des α_1 von β_1 nach I. 1) höchstens $= c$ sein; nach II. 1) aber muß die kleinste mögliche Entfernung des α'_1 von β'_1 mindestens $= h'_{a'}$ sein, (wenn $h'_{a'} < h'_{b'}$ ist). Nun ist aber schon $h'_{a'} > c$ der Voraussetzung nach. Es ist also unmöglich, die Dreiecke ABC, A'B'C' in eine solche Lage zu bringen, daß $(A-A') \parallel (B-B') \parallel (C-C')$ ist und daß $(C-C')$ zwischen $(A-A')$ und $(B-B')$ liegt. Es könnte aber scheinen, als wäre es dann immerhin noch möglich, die Dreiecke in solche Lage zu bringen, daß $(A-A') \parallel (B-B') \parallel (C-C')$ wäre, wenn man nur $(C-C')$ zu einem der äußeren Strahlen machte, indem man drei andere parallele Gerade z. B. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$ als Projectionsstrahlen nähme. Doch auch dieß zeigt sich sogleich als unmöglich. Denn, gesetzt, zwei Dreiecke BFE und B'F'E' Fig. 89. ließen sich so in perspectivische Lage bringen, daß $(E-E')$ einer der äußeren Parallelstrahlen wäre, so brauchte man nur $EK \parallel BF$, $E'K' \parallel B'F'$, $FK \parallel BE$, $F'K' \parallel B'E'$ zu ziehen, so wären nach Lehrsatz 25. auch EK und E'K', FK und F'K' homologe Gerade, also K und K' homologe Punkte, Viereck AEKF und A'E'K'F' homologe Vierecke der affinen Systeme und $(K-K') \parallel (B-B') \parallel (F-F') \parallel (E-E')$. Es sind aber der Construction nach AEKF und A'E'K'F' Parallelogramme, also $\triangle BFE \cong \triangle KEF$, $\triangle B'F'E' \cong K'E'F'$, und in den Dreiecken KEF und K'E'F' liegt $(E-E')$ zwischen $(K-K')$ und $(F-F')$. Man sieht also, daß, wenn die Dreiecke ABC und A'B'C' Fig. 90. sich in eine solche Lage bringen ließen, daß $(C-C')$ einer der äußeren Strahlen wäre, sie sich auch in eine solche Lage bringen lassen müßten, daß es einer der inneren wäre (wie man sich in Fig. 89. BFE an die Stelle von KEF, B'F'E' an die Stelle von K'E'F' gelegt denken kann), was doch nach dem Vorigen nicht möglich ist; zugleich erhellt, wie sich jeder äußere Punkt E als ein innerer darstellen läßt, und umgekehrt. Wir haben also im Vorigen einen Fall betrachtet, in welchem es nicht möglich ist, zwei Dreiecke ABC und A'B'C' in Projectionslage mit parallelen Projectionsstrahlen zu bringen. Es ist übrigens sogleich aus dem Vorigen ersichtlich, daß, auch wenn im Dreieck A'B'C' $h'_{a'} < h'_{b'}$ und zugleich $< c$ wäre, daraus noch nicht geschlossen werden kann, daß ABC und A'B'C' sich in perspectivische Lage bringen lassen. Denn es ist nicht genug, daß sich solche Strahlen α_1, β_1; α'_1, β'_1 finden lassen, der Art, daß die direkte Entfernung des α_1 von β_1 gleich ist der des α'_1 von β'_1, und daß zugleich γ_1 zwischen α_1 und β_1, und γ'_1 zwischen α'_1 und β'_1 liegt, sondern es muß auch zugleich die direkte Entfernung des α_1 von γ_1 gleich sein der des α'_1 von γ'_1,

und die des β_1 von γ_1 gleich der des β'_1 von γ'_1. Die weitere Verfolgung dieser Verhältnisse ist indessen hier überflüssig, denn es kam hier nur darauf an, zu untersuchen, ob zwei beliebige Dreiecke stets zwischen drei Parallele gelegt werden können. Daß dieß nicht der Fall ist, ist schon bewiesen, wenn auch nur ein möglicher Weise eintretender Umstand nachgewiesen worden ist, der die Auflösung unmöglich macht. Wir können also nach dem Vorigen mit Rücksicht auf das an Fig. 89. Gezeigte sagen:

31. Lehrsatz. Zwei beliebige Dreiecke ABC und A′B′C′ lassen sich **nicht** immer in eine solche Lage bringen, daß die Verbindungsgeraden (A−A′), (B−B′), (C−C′) parallel sind.

Lassen sie sich aber in eine solche Lage bringen, daß z. B. (C−C′) zwischen (A−A′) und (B−B′) fällt, so lassen sie sich auch so legen, daß (C−C′) eine der äußeren wird; lassen sie sich so legen, daß (C−C′) eine äußere Parallele wird, so lassen sie sich auch so legen, daß es eine innere wird; lassen sie sich nicht so legen, daß (C−C′) die innere Parallele wird, so lassen sie sich auch nicht so legen, daß es eine äußere wird; lassen sie sich nicht so legen, daß (C−C′) eine äußere Parallele wird, so können sie auch nicht so gelegt werden, daß (C−C′) die innere wird.

Zugleich folgt aus Lehrsatz 30:

32. Lehrsatz. Zwei ebene affine Systeme lassen sich **nicht** immer in perspectivische Lage bringen.

Die Bedingungen, unter welchen dieß möglich ist, ergeben sich zugleich mit, bei der Auflösung der

33. Aufgabe. Zwei ebene affine Systeme in perspectivische Lage zu bringen, wenn es möglich ist.

Auflösung. Man braucht offenbar die Dreiecke nur in eine solche Lage zu bringen, daß sie mit einem Paar homologer Punkte, z. B. A und A′ in einen Punkt A zusammenfallen, und daß zugleich (B−B′) ‖ (C−C′) ist, Fig. 92. Schneiden sich nun (B−C) und (B′−C′) in Γ_1 so ist (A−Γ_1) die Affinitätsaxe σ_1, denn man kann durch A noch einen Strahl α parallel (B−B′) und (C−C′) legen, α, β, γ als Affinitätsstrahlen, A als einen Affinitätspunkt ansehen. Auch kann man die beiden Dreiecke zwischen den Parallelen α, β, γ beliebig verschieben, und so, daß A und A′ immer auf α, B und B′ auf β, C und C′ auf γ bleiben. Die Systeme sind auch dann immer in perspectivischer Lage und ihre Affinitätsaxe ist stets parallel der (A−Γ_1) oder σ_1. Denn hat man z. B. das Dreieck A′B′C′ (oder AB′C′) in die Lage $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ gerückt, so schneiden sich immer noch (A−B) und ($\mathfrak{A}'$−$\mathfrak{B}'$), (A−C) und ($\mathfrak{A}'$−$\mathfrak{C}'$), (B−C) und ($\mathfrak{B}'$−$\mathfrak{C}'$)

auf einer und derselben Geraden ſ nach § 3. Lehrsatz 13. Zugleich ist, indem man das Dreieck $A'B'C'$ zwischen Parallelen fortgerückt hat, auch $\mathfrak{C}'\mathfrak{A}' \parallel C'A$; $\mathfrak{C}'\mathfrak{B}' \parallel C'B'$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' \parallel AB'$; und es verhält sich $\mathfrak{C}'\Gamma : C'\Gamma_1 = C\mathfrak{C}' : CC'$; $\mathfrak{C}'A : C'A = C\mathfrak{C}' : CC'$; folglich $\mathfrak{C}'\Gamma : \mathfrak{C}'A = \mathfrak{C}'\Gamma_1 : C'A$. Da nun auch $\angle \Gamma\mathfrak{C}'A = \angle \Gamma_1 C'A = \angle \mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{A}' = \angle B'C'A$ und $\mathfrak{C}'\Gamma \parallel C'\Gamma_1$, $\mathfrak{C}'A \parallel C'A$ ist, so folgt, daß auch die dritten Seiten der Dreiecke $\Gamma\mathfrak{C}'A$ und $\Gamma_1 C'A$ parallel sein müssen, daß also $ſ \parallel \sigma_1$ ist. Dieß gilt auch noch, wenn die Dreiecke so zu liegen kommen, daß nicht mehr A und A', sondern z. B. C und C' zusammenfallen, wenn also das Dreieck $A'B'C'$ in die Lage $A'''B'''C$ gelangt ist. Dann schneiden sich $(A-B)$ und $(A'''-B''')$ in Γ''. Und es verhält sich $B\Gamma'' : BA = B'''\Gamma'' : B'''A'''$, oder da $B'''A''' = B'A$ ist, $B\Gamma'' : BA = B'''\Gamma'' : B'A$, und auch, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $B'''B\Gamma''$ und $B'BA$, $B\Gamma'' : BA = BB''' : BB'$. Es verhält sich aber ferner $BB' : CC' = B\Gamma_1 : C\Gamma_1$, oder, da $CC' = AA''' = B'B'''$ ist: $BB' : B'B''' = B\Gamma_1\, C\Gamma_1$, folglich $BB' : BB''' = B\Gamma_1 : BC$ oder $BB''' : BB' = BC : B\Gamma_1$, also auch $B\Gamma'' : BA = BC : B\Gamma_1$ oder $B\Gamma'' : BC = BA : B\Gamma_1$; es ist also, da $\angle CB\Gamma'' = \angle \Gamma_1 BA$ ist, $\triangle CB\Gamma'' \sim \triangle \Gamma_1 BA$, also $(C-\Gamma'') \parallel (A-\Gamma_1)$ oder $\sigma'' \parallel \sigma_1$. Man sieht also, daß, wie behauptet wurde, die Dreiecke, wenn sie zwischen den parallelen Strahlen α, β, γ verschoben werden, stets in perspectivischer Lage bleiben. Wissen wir also die Entfernung des Punktes Γ_1 von B oder C, so ist die Aufgabe, die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ in perspectivisch affine Lage zu bringen, gelöst. Denn, da sich verhalten muß $B\Gamma_1 : BC = B'\Gamma_1 : B'C'$, so kann man auch $B'\Gamma_1$ und $C'\Gamma_1$ finden. Construirt man nun über $A\Gamma_1$ mit AC' und $C'\Gamma_1$ ein Dreieck, zieht $(C-C')$ und durch B eine Parallele mit $(C-C')$, so schneidet diese die $C'\Gamma_1$ in B'. Es kommt demnach darauf an, die Strecke $B\Gamma_1$ zu finden. Sie heiße x. Fig. 90., (wo Γ an der Stelle von Γ_1 in Fig. 92. steht); $B'\Gamma$ heiße x', die Entfernung des Punktes D, in welchem das von A ausgehende Höhenperpendikel h_a die BC oder a, oder ihre Verlängerung trifft, werde l, die Entfernung des Punktes D', in welchem das von A' ausgehende Höhenperpendikel $h'_{a'}$ die $B'C'$ oder a', oder ihre Verlängerung trifft, werde l' genannt; die übrigen Bezeichnungen seien dieselben, wie die bei Fig. 91. gebrauchten. Es muß nun, da $A\Gamma = A'\Gamma$ sein soll, $AD^2 + \Gamma D^2 = A'D'^2 + \Gamma D'^2$ oder $AD^2 + (BD + \Gamma B)^2 = A'D'^2 + (B'D' + \Gamma B')^2$ sein, oder:

$$h_a^2 + (l + x)^2 = h'^2_{a'} + (l' + x')^2$$

oder, da $h_a^2 + l^2 = c^2$; $h'^2_{a'} + l'^2 = c'^2$ ist:

$$c^2 + 2lx + x^2 = c'^2 + 2l'x' + x'^2.$$

Nun muß sich verhalten (vgl. Fig. 92., wo also Γ_1 den hier Γ genannten Punkt bezeichnet): $\Gamma B : \Gamma B' = BC : B'C'$ oder $x : x' = a : a'$, es ist also:

$$x' = \frac{a'}{a} x.$$

Setzt man diesen Werth ein, so nimmt die letzte Gleichung die Form an:

$$\frac{a'^2 - a^2}{a^2} x^2 + 2 \frac{a'l' - al}{a} \cdot x = -(c'^2 - c^2),$$

woraus folgt:

$$x = -\frac{a}{a'^2 - a^2} \left[(a'l' - al) \pm \sqrt{(a'l' - al)^2 - (a'^2 - a^2)(c'^2 - c^2)}\right];$$

und

$$x' = -\frac{a'}{a'^2 - a^2} \left[(a'l' - al) \pm \sqrt{(a'l' - al)^2 - (a'^2 - a^2)(c'^2 - c^2)}\right].$$

Der Ausdruck für x und also auch der für x′ wird unmöglich, wenn der Radicand der Wurzel negativ wird. Da nun $l = \sqrt{c^2 - h_a^2}$; $l' = \sqrt{c'^2 - h'^2_{a'}}$ ist, so kann man ihm durch Einsetzen dieser Werthe und Streichen der sich aufhebenden Glieder die Form geben $a'^2(c^2 - h'^2_{a'}) + a^2(c'^2 - h_a^2) - 2aa'. \sqrt{c'^2 - h_a^2}\sqrt{c'^2 - h'^2_{a''}}$, woraus man sieht, daß, wie schon oben auf rein geometrischem Wege bewiesen wurde, wenn die Construction überhaupt möglich sein soll, $h'_{a'} < c$ und $h_a < c'$ sein muß; zugleich aber auch, daß die Erfüllung dieser Bedingungen noch nicht hinreichend ist, daß vielmehr auch noch $a'^2(c^2 - h'^2_{a'}) + a^2(c'^2 - h_a^2) > 2a'a\sqrt{c'^2 - h'^2_{a'}}$ $\sqrt{c^2 - h'^2_{a'}}$ sein muß, wenn sich die affinen Systeme in perspectivische Lage bringen lassen sollen. Man bemerkt zugleich, daß man stets zwei, aber auch nur zwei Werthe für x, aso zwei Punkte Γ, sie mögen Γ_1 und Γ_2 heißen, also auch zwei Affinitätsaxen $(A - \Gamma_1)$ und $(A - \Gamma_2)$ erhält (vgl. Fig. 92.). Es ist leicht, die Lage der zweiten Axe σ_2 zu ermitteln. Man ziehe von A eine Senkrechte auf die Affinitätsstrahlen α, β, γ, welche die β in M, die γ in L schneidet, mache $LC'' = LC'$, $MB'' = MB'$, so ist $\triangle C'AC''$ und $\triangle B'AB''$ gleichschenklig, also $AC'' = AC'$, $AB'' = AB'$, ferner $\angle LAC' = \angle LAC''$, $\angle MAB' = \angle MAB''$, also $\angle LAC' - \angle MAB' = \angle LAC'' - \angle MAB''$, oder $\angle C'AB' = \angle C''AB''$; es ist also in den Dreiecken $C'AB'$ und $C''AB''$ Seite $C'A = C''A$, $B'A = B''A$, $\angle C'AB' = \angle C''AB''$, also sind sie congruent. Es läßt sich also $\triangle C'AB'$ auch in die Lage $C''AB''$ bringen. Da nun C'' auf γ, B'' auf β liegt, so liegt auch $C''AB''$ mit CAB perspectivisch affin, und der Durchschnittspunkt von $(C'' - B'')$ mit $(C - B)$, also Γ_2, bestimmt eine zweite Axe $(A - \Gamma_2)$ oder σ_2. Da auch bei dieser Lage die Gleichungen für die Ermittelung der Strecke x oder $B\Gamma$ (Fig. 90). genau dieselben bleiben, wie man sich sogleich überzeugt, so muß $B\Gamma_2$ der zweite Werth der für x quadratischen Gleichung sein. Man hat also für $B\Gamma$ oder x die beiden Strecken $B\Gamma_1$, $B\Gamma_2$. Zugleich sieht man sogleich, daß die perspectivische Affinität für die Axe σ_2 entgegengesetzt ist. Man hat also zwei verschiedene Axen σ_1, σ_2. Nur in einem Falle scheint es, als erhielte man nur eine Affinitätsaxe, nämlich dann, wenn in beiden Dreiecken die Seite $B'C' = BC$, also $a' = a$ ist. Dann wird nämlich $\frac{a'}{a} = 1$, also $x' = x$ und die Gleichung

$c^2 + 2lx + x^2 = c'^2 + 2l'x' + x'^2$ geht über in $c^2 + 2lx = c'^2 + 2l'x$; woraus folgt $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{c'^2 - c^2}{l - l'}$. Es ist aber leicht zu sehen, daß dann die Gerade a' oder a selbst ebenfalls eine Affinitätsaxe ist. Denn sollten z. B zwei Dreiecke $A C \Gamma_1$ und $A' C' \Gamma'_1$, in denen $A \Gamma_1 = A' \Gamma'_1$ ist, in perspectivische Lage gebracht werden, so lege man sie Fig. 92. so, daß $A' \Gamma'_1$ auf $A \Gamma_1$ fällt, ziehe (C—C'), und durch A und Γ_1 Parallele zu (C—C'), so sind dieß Affinitätsstrahlen; verschiebt man nun beliebig das eine oder andere Dreieck zwischen diesen Parallelen, so bleiben sie immer in perspectivischer Lage und die Affinitätsaxe ist parallel $(A - \Gamma_1)$ oder $(A' - \Gamma'_1)$. Die Richtung einer zweiten Axe also ergiebt sich aus der Gleichung $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{c'^2 - c^2}{l - l'}$. Auch diese selbst kann sich noch vereinfachen, wenn $c'^2 - c^2 = 0$ wird, dann wird $x = 0$. Man überzeugt sich aber auf dieselbe Weise, wie eben gezeigt wurde, daß dann nicht allein a' oder a, sondern auch c' oder c eine Affinitätsaxe ist. Wäre endlich noch $b' = b$, so wären die Dreiecke congruent, und beide Systeme fielen ganz zusammen, welcher Fall aber ausgeschlossen sein soll. Es giebt also stets zwei, aber auch nur zwei Affinitätsaxen, oder genauer, zwei Richtungen, in denen die Affinitätsaxen liegen können $(A - \Gamma_1)$ und $(A - \Gamma_2)$, oder σ_1 und σ_2. Fig. 92. Wir hatten bisher, das eine Dreieck ABC in fester Lage liegen lassend, das andere Dreieck A'B'C' so auf das erstere gelegt, daß A' auf A fiel. Es ist nun mit Hülfe des Vorigen leicht zu zeigen, daß man, auch, wenn man A'B'C' so legt, daß z. B. C' auf C fällt, dennoch die beiden oben gefundenen Richtungen σ_1, σ_2 der Affinitätsaxen wieder erhalten muß. Denn es war oben bewiesen worden, daß die Gerade von C nach dem Durchschnitt Γ'' von (A—B) und (A'''—B''') parallel sein muß der Geraden von A nach dem Durchschnitt Γ_1 von (C—B) und (C'—B'). Denkt man sich also die Dreiecke ABC und A'B'C' so auf einander gelegt, daß C' auf C fällt und sucht die Strecke $B\Gamma'$ Fig. 90. als Unbekannte x, so erhält man für sie ebenso, wie für $B\Gamma$, zwei, und nur zwei, Werthe. Der eine derselben muß nun jedenfalls $B\Gamma''$ Fig. 92. sein, da dieser der gestellten Anforderung genügt. Man erhält also die Richtung σ'' oder σ_1 wieder. Man hätte ebenso die Dreiecke ABC und AB''C'' zwischen den Affinitätsstrahlen α, β, γ verschieben können, bis C'' nach C gefallen wäre, und auch hier muß, wenn der sich dann ergebende Durchschnittspunkt von (A'''—B''') und (A—B) durch Γ''_2 bezeichnet wird, $(C - \Gamma''_2) \parallel \sigma_2$ sein. Es muß also $B\Gamma''_2$ eine Wurzel der Gleichung sein. Da aber die Gleichung nur zwei Wurzeln haben kann, so erhält man also nur die schon gefundenen Richtungen σ_1 und σ_2 wieder. Zugleich bemerkt man, daß es gleichgültig ist, ob man gerade die homologen Dreiecke ABC und A'B'C' der affinen Systeme oder ein anderes Paar z. B. DEF und D'E'F' wählt, um sie in perspectivische Lage zwischen Parallelstrahlen zu bringen. Denn ergäbe sich, daß dieß für DEF und D'E'F' für eine von σ_1

und σ_2 verschiedene Richtung σ_3 als Axe möglich wäre, so müßten sich auch ABC und A'B'C' für diese Richtung als Axe zwischen Parallele legen lassen, was dem Vorigen nach unmöglich ist. Was schließlich die Construction des Werthes für x selbst betrifft, so geschieht dieselbe mit Hülfe der aus der Planimetrie bekannten Mittel*). Man erhält demnach den

34. Lehrsatz. Zwei ebene affine Systeme lassen sich, wenn sie überhaupt in perspectivische Lage gebracht werden können (vergl. Lehrs. 32.), stets für zwei Richtungen σ_1 und σ_2, d. h. für jede entweder in der Richtung σ_1 oder in der Richtung σ_2 verlaufende Gerade, aber auch nur für diese, als Affinitätsaxe, in perspectivische Lage bringen, je nachdem die perspectivische Affinität einstimmig oder entgegengesetzt sein soll. Vorausgesetzt wird dabei, daß das eine der affinen Systeme seinen Ort nicht verändere.

Als Schluß der Betrachtung der Affinitätsverhältnisse mag nur noch Folgendes erwähnt werden. Es seien Fig. 89. BEF und B'E'F' zwei homologe Dreiecke zweier affiner Systeme (sie mögen perspectivisch liegen oder nicht). Da in ihnen nach Lehrsatz 19. homologe Punktreihen proportional (s. § 3. Erklärung 21.), sind, so muß, wenn L der Mittelpunkt von BF ist, der homologe Punkt L' so liegen, daß sich verhält $\frac{BL}{FL} = \frac{B'L'}{F'L'}$; es muß also, da $\frac{BL}{FL} = 1$ ist, auch $\frac{B'L'}{F'L'} = 1$, also $B'L' = F'L'$, also L' die Mitte der Strecke B'F' sein. Es ist also auch die Gerade (E—L) homolog (E'—L'), ebenso ist die von B nach dem Mittelpunkte von EF und die von F nach dem Mittelpunkte von BE gehende Gerade homolog bezüglich der von B' nach der Mitte von E'F' und der von F' nach der Mitte von B'E' gehenden Geraden. Die von den Ecken eines Dreiecks nach den Mittelpunkten der Gegenseiten gehenden Geraden aber schneiden sich in einem und demselben Punkte und dieses ist der Schwerpunkt. Man erhält also den

35. Lehrsatz. In zwei affinen Systemen sind die Schwerpunkte jeder zwei homologen Dreiecke homologe Punkte.

---

*) Es läßt sich übrigens dem Ausdruck für x eine in arithmetischer Hinsicht merkwürdige Form geben. Setzt man nämlich für l' und l ihre Werthe $l' = \frac{a'^2 + c'^2 - b'^2}{2a'}$, $l = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ ein, und bezeichnet kurz $a'^2 - a^2$ durch p^2, $b'^2 - b^2$ durch q^2, $c'^2 - c^2$ durch r^2, so kann man ihn leicht auf die Form bringen:

$$x = -\frac{a}{p^2}\left[(p^2 - q^2 + r^2) \pm \sqrt{(p+q+r)(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)} \cdot \sqrt{-1}\right]$$

in welcher die erste Wurzelgröße eine bemerkenswerthe Analogie mit dem Ausdruck für den Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Seiten p, q, r, sind, zeigt.

Alles dieses waren Folgerungen, die sich daraus ergeben, daß wir in zwei perspectivisch liegenden collinearen Systemen das Collineationscentrum in das Unendliche rücken ließen. Es kann aber auch

2) Die Collineationsaxe in das Unendliche rücken. Fig. 93a., 93b.

Da sich in zwei perspectivisch liegenden collinearen Systemen jede zwei homologe Gerade s und s', a und a', β und β', u. s. w. auf der Collineationsaxe schneiden, nach Lehrsatz 4., hier aber die Collineationsaxe in unendlicher Entfernung sich befindet, so folgt, daß jetzt jede zwei homologe Gerade parallel sind, und daß also der von zwei Geraden, z. B. a und b, oder a und s u. s. w. des einen Systems eingeschlossene Winkel ab, as, u. s. w. gleich ist dem von den homologe Geraden, a' und b', oder a' und s', u. s. w. des anderen Systems gebildeten Winkel a'b', a's' u. s. w. Da also dann jede zwei homologen Dreiecke, z. B. ACE und B'C'E' ähnlich sind, so bezeichnet man Systeme, in welchen also homologe Strahlen in homologen Strahlbüscheln gleiche Winkel mit einander bilden, z. B. im Strahlbüschel S,abcde und S',a'b'c'd'e, wo ab = a'b', bc = b'c', ad = a'd', be = b'e', u. s. w. ist, mit einem besonderen Namen, und definirt, da dieß von jedem Paar homologer Strahlbüschel gilt und Gleichheit ein besonderer Fall der Conformität ist:

36. Erklärung. Bilden in zwei collinearen Systemen **jede** zwei homologe Strahlen in jedem Paar homologer Strahlbüschel gleiche Winkel, so heißen die Systeme **ähnlich**.

Auch hier könnte es sich ereignen, daß man, wenn man solche Systeme als unter die allgemeine Gattung der „collinearen" fallend ansieht, mit der ersten der in § 7. Erklärung 6. gegebenen Definition von „collinear" in Widerspruch kämen, da nach § 7. Lehrsatz 5. von Systemen, wie die bezeichneten sind, nicht behauptet werden kann, daß sie sich in eine solche Lage bringen lassen, daß sich die Verbindungsgeraden von je zwei homologen Punkten in einem und demselben Punkte schneiden. Man hält sich jedoch auch hier, wie bei den affinen Systemen, an die zweite der in § 7. Erklärung 6. gegebenen Definitionen und rechnet die ähnlichen Systeme zu den collinearen.

Es seien nun Fig. 93. ACE und A'C'E' ein Paar homologer Dreiecke in zwei ähnlichen Systemen, so sind dieselben, wie bereits erwähnt wurde, und wie aus der Definition hervorgeht, ähnlich. Es ist also $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{CE}{C'E'}$. Da nun jede zwei homologe Strahlen in homologen Strahlbüscheln gleiche Winkel einschließen, so ist Winkel $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, $\beta e = \beta' e'$, $\alpha s = \alpha' s'$, $es = e's'$ u. s. w. Nun verhält sich $AC : SC = \sin \alpha\beta : \sin \alpha s$; $FC : SC = \sin e\beta : \sin es$, also $\frac{AC}{FC} = \frac{\sin \alpha\beta}{\sin e\beta}$

$:\frac{\sin \alpha s}{\sin e s}$; ebenso ist $\frac{A'C'}{F'C'} = \frac{\sin \alpha' \mathfrak{s}'}{\sin e' \mathfrak{s}'} : \frac{\sin \alpha' s'}{\sin e' s'}$. Da aber jeder Winkel des einen Systems dem homologen des anderen gleich ist, so folgt hieraus $\frac{AC}{FC} = \frac{A'C'}{F'C'}$, und ebenso ergiebt sich $\frac{AB}{CB} = \frac{A'B'}{C'B'}$; $\frac{AD}{CD} = \frac{A'D'}{C'D'}$; $\frac{CD}{BD} = \frac{C'D'}{B'D'}$; $\frac{FC}{BC} = \frac{F'C'}{B'C'}$; $\frac{AB}{DB} = \frac{A'B'}{D'B'}$ etc. oder $\frac{AC}{A'C'} = \frac{FC}{F'C'}$; $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CB}{C'B'}$; $\frac{AD}{A'D'} = \frac{CD}{C'D'}$; $\frac{CD}{C'D'} = \frac{BD}{B'D'}$; $\frac{FC}{F'C'} = \frac{BC}{B'C'}$; $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BD}{B'D'}$ u. s. w., oder es ist $\frac{AC}{A'C'} = \frac{FC}{F'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} =$ u. s. w. Es ist also das Verhältniß jeder zwei homologen Strecken auf den homologen Geraden s und s′ constant, es sind also nach § 3. Erklärung 21. die Punktreihen s, ABC .... und s′, A′B′C′ .... proportional getheilt; und auf gleiche Weise läßt sich dieses von jedem Paar homologer Punktreihen zeigen. Da nun $\frac{AE}{A'E'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\frac{CE}{C'E'} = \frac{AC}{A'C'}$ ist, so ist also:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{FC}{F'C'} = \frac{BD}{B'D'} = \ldots = \frac{AE}{A'E'} = \frac{SE}{S'E'} = \ldots = \frac{EC}{E'C'} = \frac{\mathfrak{S}C}{\mathfrak{S}'C'} = \ldots$$

und da auch $\triangle C\mathfrak{S}N \sim \triangle C'\mathfrak{S}'N'$, $\triangle ES\mathfrak{S} \sim \triangle E'S'\mathfrak{S}'$, $\triangle SG\mathfrak{S} \sim \triangle S'G'\mathfrak{S}'$, $\triangle SGK \sim \triangle S'G'K'$, $\triangle \mathfrak{S}KS \sim \triangle \mathfrak{S}'K'S'$, $\triangle K\mathfrak{S}L \sim \triangle K'\mathfrak{S}'L'$ u. s. w. ist, so ist auch

$$\frac{EC}{E'C'} = \frac{\mathfrak{S}C}{\mathfrak{S}'C'} = \ldots = \frac{\mathfrak{S}N}{\mathfrak{S}'N'} = \frac{SN}{S'N'} = \frac{S\mathfrak{S}}{S'\mathfrak{S}'} = \ldots = \frac{SG}{S'G'} = \frac{FG}{F'G'}$$

$$= \ldots = \frac{\mathfrak{S}K}{\mathfrak{S}'K'} = \frac{GK}{G'K'} = \ldots \text{ u. s. w.}$$

Man überzeugt sich auf diese Weise, daß jede zwei homologe Strecken ein und dasselbe Verhältniß zu einander haben. Man sieht also:

37. **Lehrsatz.** In zwei ähnlichen Systemen sind jede zwei homologe Dreiecke ähnlich.

38. **Lehrsatz.** In zwei ähnlichen Systemen haben jede zwei, von homologen Punkten begrenzte Strecken ein und dasselbe Verhältniß. Es ist also $\frac{AC}{A'C'} = \frac{FG}{F'G'} = \frac{KL}{K'L'} = \ldots$ Fig. 93a., 93b.

Wir sahen ferner, daß, was bereits in diesem letzten Lehrsatz liegt, aber doch noch einmal besonders ausgesprochen werden mag, jedes Paar homologer Punktreihen proportional ist; daß also in jeden zwei solchen Punktreihen das Verhältniß zweier homologer Strecken constant ist, z. B. $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{BF}{B'F'} = \ldots$; dies fand auch bei affinen

Systemen statt; allein hier sahen wir, daß das Verhältniß zweier homologer Strecken, nicht, wie bei affinen Systemen, nur auf derselben Punktreihe dasselbe ist, sondern, daß in ähnlichen Systemen dieß auf allen Punktreihen sich gleich bleibt. In affinen Systemen Fig. 87. ist allerdings auch $\frac{CD}{C'D'} = \frac{AB}{A'B'} = \dots$ auf s und s', und $\frac{FG}{F'G'} = \frac{EG}{E'G'} = \dots$ auf ſ und ſ'; es ist aber nicht $\frac{CD}{C'D'} = \frac{FG}{F'G'}$, wie es hier, Fig. 93. der Fall ist. Man kann also den letzten Lehrsatz auch so aussprechen:

39. Lehrsatz. In zwei ähnlichen Systemen ist jedes Paar homologer Punktreihen proportional, und das Verhältniß zweier homologer Strecken ist in allen Punktreihen dasselbe. Fig. 93a., 93b.

Man sieht daher auch wohl die Aehnlichkeit als einen speciellen Fall der Affinität an. Zugleich folgt hieraus, daß die durch die Proportionalität der homologen Punktreihen begründeten Verhältnisse auch bei ähnlichen Systemen wiederkehren, und daß man sagen kann:

40. Lehrsatz. Die von affinen Systemen bewiesenen Lehrsätze 20., 24., 25. gelten auch von ähnlichen Systemen.

In Fig. 93a. und 93b. befanden sich die ähnlichen Systeme in solcher Lage, daß die Verbindungsgeraden jedes Paares homologer Punkte durch einen und denselben Punkt gehen. Dieses kann eintreten, aber es muß nicht. Wir stellen uns daher zunächst die

41. Aufgabe. Zwei ähnliche ebene Systeme in beliebiger Lage zu construiren.

Auflösung. Aus Lehrsatz 39. erhellt, daß 1. α) dieselbe Methode α), die zur Auflösung der Aufgabe 21. angewandt wurde, auch hier gebraucht werden kann; nur ist nicht mehr, wie der dort, nachdem einmal die Geraden s und ſ willkürlich angenommen sind, der Winkel, den s' und ſ' bilden, ganz beliebig, sondern es muß Winkel s'ſ' = Winkel sſ angenommen werden, wegen Erklärung 36. Zugleich sind auch die Punktreihen s,ABCD∞; s',A'B'C'D'∞; ſ,$\mathfrak{ABCD}$∞; ſ',$\mathfrak{A'B'C'D'}$∞ nicht mehr beliebig; sondern sie müssen so gewählt werden, daß $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots = \frac{\mathfrak{AB}}{\mathfrak{A'B'}} = \frac{\mathfrak{AC}}{\mathfrak{A'C'}} = \dots$ ist. Es ist leicht einzusehen, daß man dann nicht affine, sondern ähnliche Systeme erhält. Ein Gleiches gilt, wenn man β) die unter β) angegebene Methode der Auflösung von Aufgabe 21. anwendet; dann muß, wenn zu einem schon gegebenen System ein ähnliches construirt werden soll, s'ſ' = sſ und A, A', $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ so angenommen werden, daß sich verhält $\frac{AE}{A'E'} = \frac{\mathfrak{A}E}{\mathfrak{A}'E'}$. Dieß geschieht am einfachsten, indem man

ein Paar ähnliche Parallelogramme (man denke sich z. B. unter $AB\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, $A'B'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$, Fig. 88., Parallelogramme) homolog setzt, dann rücken die als homolog anzusehenden Punkte E, E' in das Unendliche, die Punktreihen auf s, s', $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$ bleiben also proportional. Ferner sind die homologen Punkte F, F', $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ beide die Mittelpunkte von AB, $A'B'$; $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$; die homologen Punkte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ halbiren $A\mathfrak{B}$, $A'\mathfrak{B}'$; $B\mathfrak{A}$, $B'\mathfrak{A}'$; etc., und man sieht leicht ein, daß jede zwei homologen Dreiecke ähnlich werden müssen. Endlich kann man auch γ) wie in Aufgabe 21. γ) zwei Dreiecke einander homolog setzen; dieselben müssen aber dann ähnlich sein. Davon, daß man in allen diesen drei Fällen zwei Systeme erhält, in denen alle Punktreihen proportional sind und zwar so, daß der Quotient zweier homologer Abschnitte auf allen Punktreihen derselbe ist, davon überzeugt man sich sofort, wie in Auflösung von Aufgabe 21. indem z. B. aus den daselbst bewiesenen Gleichungen $\frac{S\mathfrak{C}}{SC} = \frac{S\mathfrak{C}'}{SC'}$; $\frac{S\mathfrak{A}}{SA} = \frac{S\mathfrak{A}'}{SA'}$ folgt: $\frac{S\mathfrak{C}}{S\mathfrak{A}} : \frac{SC}{SA} = \frac{S\mathfrak{C}'}{S\mathfrak{A}'} : \frac{SC'}{SA'}$. Nun ist $\frac{S\mathfrak{C}}{S\mathfrak{A}} : \frac{SC}{SA} = 1$, also auch $\frac{S\mathfrak{C}'}{S\mathfrak{A}'} : \frac{SC'}{SA'} = 1$ u. s. w. Man kann auch: 2. α) so verfahren: Man construire zwei Paar gleicher Strahlbüschel Fig. 94. $S,abcde = S',a'b'c'd'e'$ ...., $\mathcal{S},\alpha\mathit{bcde} = \mathcal{S}',\alpha'\mathit{b}'\mathit{c}'\mathit{d}'\mathit{e}'$ ...., in denen also $ab = a'b'$, $\alpha\mathit{b} = \alpha'\mathit{b}'$ u. s. w. ist, und entwickele das von ihnen erzeugte System. Dann ist, da $ce = c'e'$, $\mathit{ce} = \mathit{c}'\mathit{e}'$ ist, $\triangle SB\mathcal{S} \sim \triangle S'B'\mathcal{S}'$, also $SB : S'B' = S\mathcal{S} : S'\mathcal{S}'$; $\mathcal{S}B : \mathcal{S}'B' = \mathcal{S}S : \mathcal{S}'S'$. Desgleichen ist $\triangle SA\mathcal{S} \sim \triangle S'A'\mathcal{S}'$; also auch $SA : S'A' = S\mathcal{S} : S'\mathcal{S}'$; $\mathcal{S}A : \mathcal{S}'A' = \mathcal{S}S : \mathcal{S}'S'$; daher auch $SA : S'A' = SB : S'B'$, und weil Winkel $ac = a'c'$, so ist $\triangle ASB \sim \triangle A'S'B'$, ebenso $\triangle A\mathcal{S}B \sim \triangle A'\mathcal{S}'B'$ also $AB : A'B' = S\mathcal{S} : S'\mathcal{S}'$ und Winkel $sa = s'a'$, $s\alpha = s'\alpha'$; $sc = s'c'$, $s\mathit{c} = s'\mathit{c}'$. Auf gleiche Weise überzeugt man sich, daß $\triangle BSC \sim \triangle B'S'C'$, $\triangle B\mathcal{S}C \sim \triangle B'\mathcal{S}'C'$, folglich $BC : B'C' = S\mathcal{S} : S'\mathcal{S}'$ und $\mathfrak{s}b = \mathfrak{s}'b'$, $\mathfrak{s}\mathit{d} = \mathfrak{s}'\mathit{d}'$, $\mathfrak{s}c = \mathfrak{s}'c'$, $\mathfrak{s}\mathit{c} = \mathfrak{s}'\mathit{c}'$ ist. Ein Gleiches gilt von $\triangle ASC \sim \triangle A'S'C'$, $A\mathcal{S}C \sim \triangle A'\mathcal{S}'C'$, folglich $AC : A'C' = S\mathcal{S} : S'\mathcal{S}'$. Da also in den Dreiecken ABC, $A'B'C'$ sich verhält $AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C' = S\mathcal{S} : S'\mathcal{S}'$, so sind sie ähnlich, also $s\mathfrak{s} = s'\mathfrak{s}'$, $st = s't'$. Es entstehen also gleiche Strahlbüschel, $A,ats\alpha = A',a't's'\alpha'$; $B,c\mathfrak{s}\mathit{c} = B',c'\mathfrak{s}'\mathit{c}'$, und dies läßt sich für jedes Paar homologer Punkte, wenn man sie als Scheitel von Strahlbüscheln ansieht, beweisen. Verbindet man umgekehrt irgend einen Punkt F des einen Systems mit S durch f, und F' mit S' durch f', wenn z. B. F und F' die Durchschnittspunkte bezüglich von s und d, s' und d' sind, so ist leicht zu sehen, daß auch f und f' mit jedem andern Paar homologer Strahlen, z. B. mit c, c' gleiche Winkel $cf = c'f'$ bilden. Denn es verhält sich $BS : B'S' = AB : A'B'$, ferner werden s und s' proportional getheilt, da sich auf dieselbe Weise, wie an Fig. 93, auch hier zeigen läßt, daß $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{BE}{B'E'}$ ist. Es muß also, wenn F

und F′ homologe Punkte der s und s′ sind, auch sich verhalten $BF : B'F' = AB : A'B'$. Also verhält sich in den Dreiecken BSF und B′S′F′, $BS : B'S' = BF : B'F'$, und da zugleich $sc = s'c'$ ist, so ist $\triangle BSF \sim \triangle B'S'F'$, also $cf = c'f'$. Auf dieselbe Art läßt sich der Beweis für jede andere Gerade f, g .... f′, g′ .... führen. Eine der Auflösung 2. β) oder 2. γ) der Aufgabe 12. in § 7. analoge läßt sich hier nicht unbedingt anwenden, weil keine drei, ja nicht einmal zwei Paar Strahlen willkürlich angenommen werden dürfen, da jeder Strahlbüschel dem homologen des andern Systems vollkommen gleich werden soll. Wohl aber kann man β) zwei, je drei Strahlen enthaltende, Strahlbüschel S,abc und S′,a′b′c′, $\mathfrak{S},\alpha\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{S}',\alpha'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ zeichnen, der Art, daß $ab = a'b'$, $bc = b'c'$, $\alpha\mathfrak{b} = \alpha'\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ ist, und, da Gleichheit nur ein specieller Fall der Conformität ist, ist somit der jedem Strahl des Büschels S und $\mathfrak{S}$ homologe des Büschels S′ und $\mathfrak{S}'$ bestimmt. Es muß indessen, wenn e oder $\mathfrak{e}$ die Gerade $(S-\mathfrak{S})$, e′ oder $\mathfrak{e}'$ die Gerade $(S'-\mathfrak{S}')$ ist, auch $ae = a'e'$, $be = b'e'$, $\alpha\mathfrak{e} = \alpha'\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{b}\mathfrak{e} = \mathfrak{b}'\mathfrak{e}'$ u. s. w. sein. Um nun überzeugt zu sein, daß dieß auch wirklich ist, nehmen wir e und e′ selbst als einen der drei Strahlen, die zur Bestimmung jedes Strahlbüschels hinreichen. Um also ein Paar ähnliche Systeme zu zeichnen, construiren wir zwei beliebige Strahlbüschel S,ace, $\mathfrak{S},\alpha\mathfrak{c}\mathfrak{e}$, und zwei andere S′,a′c′e′, $\mathfrak{S}',\alpha'\mathfrak{c}'\mathfrak{e}'$ der Art daß $ae = a'e'$, $ce = c'e'$, $\alpha\mathfrak{e} = \alpha'\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{c}\mathfrak{e} = \mathfrak{c}'\mathfrak{e}'$ ist, und entwickeln aus beiden das von ihnen erzeugte System. Man sieht also, daß man nicht, wie in § 7. Aufgabe 12. Auflösung 2. γ) zwei beliebige Vierseite $ac\alpha\mathfrak{c}$, $a'c'\alpha'\mathfrak{c}'$ ähnlich auf einander beziehen kann, sondern nur solche von der angegebenen Beschaffenheit. Daß man aber auf diese Weise wirklich ähnliche Systeme erhält, läßt sich leicht zeigen. Nämlich auf dieselbe Art, wie in α) überzeugt man sich, daß, wenn s die Verbindungsgerade des Punktes $(a \cdot \alpha)$ mit $(c \cdot \mathfrak{c})$, $\mathfrak{t}$ die des Punktes $(a \cdot \mathfrak{c})$ mit $(\alpha \cdot c)$ und s′ und $\mathfrak{t}'$ die homologen Geraden sind, $sa = s'a'$, $s\alpha = s'\alpha'$, $sc = s'c'$, $s\mathfrak{c} = s'\mathfrak{c}'$ ist, und daß $AB : A'B' = S\mathfrak{S} : S'\mathfrak{S}'$; ebenso ist $\mathfrak{t}a = \mathfrak{t}'a'$, $\mathfrak{t}\alpha = \mathfrak{t}'\alpha'$, $\mathfrak{t}c = \mathfrak{t}'c'$, $\mathfrak{t}\mathfrak{c} = \mathfrak{t}'\mathfrak{c}'$, und $GD : G'D' = S\mathfrak{S} : S'\mathfrak{S}'$. Da $sa = s'a'$, $\mathfrak{t}a = \mathfrak{t}'a'$, so ist auch $\triangle AHG \sim \triangle A'H'G'$, ebenso $\triangle AHD \sim \triangle A'H'D'$, $\triangle BHG \sim \triangle B'H'G'$, $\triangle BHD \sim \triangle B'H'D'$. Zieht man $(H-S)$ und $(H'-S')$, so entstehen ein Paar neue Dreiecke SHG, S′H′G′. Da in ihnen $SG : S'G' = S\mathfrak{S} : S\mathfrak{S}$ (weil $\triangle SG\mathfrak{S} \sim \triangle S'G'\mathfrak{S}'$) und $GH : G'H' = S\mathfrak{S} : S'\mathfrak{S}'$ (weil $\triangle AHG \sim \triangle A'G'H'$ ist, also $GH : G'H' = AG : A'G'$, und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AGB und A′G′B′ sich $AG : A'G' = AB : A'B' = S\mathfrak{S} \cdot S'\mathfrak{S}'$ verhält), da ferner $\angle \mathfrak{t}a = \mathfrak{t}'a'$, so ist $\triangle SHG \sim \triangle S'H'G'$, also $\angle GSH = \angle G'S'H'$, oder, wenn $(S-H)$ durch g bezeichnet wird, $\angle ag = \angle a'g'$, und $\angle cg = \angle c'g'$; ebenso ist, wenn $(\mathfrak{S}-H)$ durch $\mathfrak{g}$ bezeichnet wird, $\angle \alpha\mathfrak{g} = \angle \alpha'\mathfrak{g}'$, $\angle \mathfrak{c}\mathfrak{g} = \mathfrak{c}'\mathfrak{g}'$. Verfährt man nun mit den Vierseiten $ag\alpha\mathfrak{g}$ und $a'g'\alpha'\mathfrak{g}'$, $cg\mathfrak{c}\mathfrak{g}$ und $c'g'\mathfrak{c}'\mathfrak{g}'$ ebenso, wie mit $ac\alpha\mathfrak{c}$ und $a'c'\alpha'\mathfrak{c}'$, so erhält man auf dieselbe Weise wie g, $\mathfrak{g}$, eine unendliche Menge anderer Strahlen der

Strahlbüschel S, S'; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$, die homolog sind, und mit homologen anderen Strahlen gleiche Winkel bilden. Es entstehen also zwei gleiche Strahlbüschel S und S', $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$. Daß auch in den von ihnen bestimmten Systemen jedes andere Paar homologer Strahlbüschel z. B. $C, b\delta f t = C', b'\delta' f' t'$ ist, beweist sich, wie in α). Es entstehen also zwei ähnliche Systeme. Man wird indessen bemerken, daß es schon überflüssig ist, drei Strahlen in den ursprünglichen Strahlbüscheln anzunehmen; daß zwei Systemen ähnlich werden sollen, ist offenbar schon dadurch bestimmt, daß man $S, ae = S', a'e'$; $\mathfrak{s}, \alpha e = \mathfrak{s}', \alpha' e'$ annimmt. Man nehme also γ) willkürlich S, $\mathfrak{s}$, a, α an; ebenso S', $\mathfrak{s}'$, aber a′ und α' so, daß $a'e' = ae$, $\alpha' e' = \alpha e$ ist, so ist der Strahl c′, der mit a′ denselben Winkel macht, wie c mit a, schon vollkommen bestimmt, und kann sogleich gefunden werden. Will man nicht beide Systeme zugleich entstehen lassen, so verzeichne man δ) ein beliebiges System, wähle dann irgend zwei Punkte S' und $\mathfrak{s}'$, und setze fest, S' solle irgend einem Punkt S des gezeichneten Systems, $\mathfrak{s}'$ einem anderen Punkt $\mathfrak{s}$ desselben homolog sein, also $(S' - \mathfrak{s}')$ homolog $(S - \mathfrak{s})$. Dann ziehe man eine Gerade a′ an S', die mit e′ einen Winkel a′e′ macht, der gleich ist demjenigen, den eine Gerade a an S mit e macht, und setze fest a′ solle dem a homolog sein; ebenso ziehe man eine Gerade α' an $\mathfrak{s}'$, so daß $\alpha' e' = \alpha e$, und nehme α' als homolog α an. Man ziehe dann an S' und $\mathfrak{s}'$ einen Strahl c′, c', so, daß $a'c' = ac$, $\alpha' c' = \alpha c$, $e'c' = ec$, $e'c' = ec$ ist und construire aus dem Vierseit $ac\alpha c$ das von ihm erzeugte System; so ist dieß dem ersten ähnlich (s. Auflösung β). Man kann also zu jedem beliebigen System nicht bloß eins, sondern, weil S' und $\mathfrak{s}'$ ganz willkürlich sind, beliebig viele ähnliche Systeme construiren. Da die in Auflösung 2. γ) angegebene Methode sich auch so angeben läßt: „Man setze zwei ähnliche Dreiseite $a\alpha e$, $a'\alpha' e'$ homolog“ so können wir nach den Auflösungen 1. α) — γ); 2. α) — γ) aussprechen den

42. Lehrsatz. Das einem gegebenen System ähnliche System ist vollkommen bestimmt, wenn

α) von beiden zwei homologe, proportionale Punktreihen $s, ABC \ldots \infty$, $s', A'B'C' \ldots \infty$, $\mathfrak{f}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \ldots \infty$, $\mathfrak{f}', \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' \ldots \infty$ gegeben sind, und zugleich

$$\frac{AB}{CB} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\mathfrak{B}} = \ldots = \frac{A'B'}{C'B'} = \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'}{\mathfrak{C}'\mathfrak{B}'} = \ldots$$ und $\angle s\mathfrak{f} = \angle s'\mathfrak{f}'$ ist.

β) wenn von beiden zwei, je drei Punkte enthaltende Punktreihen s, ABE, $s', A'B'E'$,

42. Lehrsatz. Das einem gegebenen System ähnliche System ist vollkommen bestimmt, wenn

α) von beiden zwei homologe gleiche Strahlbüschel $S, abcde \ldots = S', a'b'c'd'e' \ldots$, $\mathfrak{s}, \alpha\beta c\delta e \ldots = \mathfrak{s}', \alpha'\beta' c'\delta' e' \ldots$ gegeben sind.

β) wenn von beiden zwei, je drei Strahlen enthaltende Strahlbüschel S, abe, $S', a'b'e'$;

$\mathfrak{s}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{E}$, $\mathfrak{s}', \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'$ Fig. 88. gegeben sind und zugleich

$$\frac{AB}{EB} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{E\mathfrak{B}} = \frac{A'B'}{E'B'} = \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'}{E'\mathfrak{B}'}$$

und $\angle s\mathfrak{s} = s'\mathfrak{s}'$ ist. Insbesondere, wenn von beiden Systemen zwei ähnliche Parallelogramme $AB\mathfrak{B}\mathfrak{A} \sim A'B'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ gegeben sind.

γ) wenn von beiden zwei ähnliche Dreiecke $AE\mathfrak{A} \sim A'E'\mathfrak{A}'$ gegeben sind.

$\mathfrak{S}, \alpha\mathfrak{b}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{S}', \alpha'\mathfrak{b}'\mathfrak{e}'$ gegeben sind, und zugleich $\angle ab = \angle a'b'$, $\angle ae = \angle a'e'$, $\angle be = \angle b'e'$, $\angle \alpha\mathfrak{b} = \angle \alpha'\mathfrak{b}'$, $\angle \alpha\mathfrak{e} = \angle \alpha'\mathfrak{e}'$, $\angle \mathfrak{b}\mathfrak{e} = \angle \mathfrak{b}'\mathfrak{e}'$ gegeben sind.

γ) wenn von beiden zwei ähnliche Dreiseite $ae\alpha \sim a'e'\alpha'$ gegeben sind.

Da ein Dreiseit $a\alpha\mathfrak{e}$ Fig. 94. zugleich als ein Dreieck $S\mathfrak{S}A$ angesehen werden kann, indem die drei Geraden a, α, $\mathfrak{e}$ keine anderen Punkte als S, $\mathfrak{S}$, A erzeugen, und da ein Dreieck $S\mathfrak{S}A$ auch als ein Dreiseit $a\alpha\mathfrak{e}$ angesehen werden kann, indem die drei Punkte S, $\mathfrak{S}$, A nur die drei Geraden a, α, $\mathfrak{e}$ erzeugen, so folgt aus Lehrsatz. 42. γ) unmittelbar der

43. **Lehrsatz.** Wenn in zwei ähnlichen Systemen drei Punkte des einen Systems, die nicht auf derselben Geraden liegen, S, A, $\mathfrak{S}$, mit den homologen Punkten S', A', $\mathfrak{S}'$ des anderen Systems zusammenfallen, oder:

Wenn zwei ähnliche Systeme mit einem Paar homologer Dreiecke $SA\mathfrak{S}$, $S'A'\mathfrak{S}'$ zusammenfallen, so fallen beide Systeme so zusammen, daß jeder Punkt und jede Gerade des einen auf den homologen Punkt und die homologe Gerade des anderen Systems zu liegen kommt.

43. **Lehrsatz.** Wenn in zwei ähnlichen Systemen drei Gerade des einen Systems, die nicht durch denselben Punkt gehen, a, e, α, mit den homologen Geraden a', e', α', des anderen Systems zusammenfallen, oder:

Wenn zwei ähnliche Systeme mit einem Paare homologer Dreiseite $ae\alpha$, $a'e'\alpha'$ zusammenfallen, so fallen beide Systeme so zusammen, daß jede Gerade und jeder Punkt des einen auf die homologe Gerade und den homologen Punkt des anderen Systems zu liegen kommt.

Was nun die perspectivische Lage ähnlicher Systeme betrifft, so ist zunächst klar, daß jede zwei homologe Gerade parallel sein müssen, denn auf jedem Collineationsstrahl sind ein Paar homologe Gerade vereinigt, und nach Erklärung 36. bilden jede zwei homologer Geraden a, a' mit jedem andern Paar homologer Geraden gleiche Winkel. Ist also α ein Collineationsstrahl, so muß $\angle \alpha a = \angle \alpha a'$, also $a' \parallel a$ sein; und so jedes Paar homologer Gerader. Es liegt dann also der Durchschnittspunkt jeder zwei homologen Geraden im Unendlichen. Zugleich sagt man:

44. Erklärung. Liegen zwei ähnliche Systeme perspectivisch, so führt das Collineationscentrum Σ den besonderen Namen **Aehnlichkeitscentrum** (auch wohl **Aehnlichkeitspunkt**), und die von ihm ausgehenden sich selbst homologen Strahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ heißen: **Aehnlichkeitsstrahlen**; die Collineationsaxe kann nicht bezeichnet werden, da sie im Unendlichen liegt. Fig. 93. a., 93. b.

45. Aufgabe. Zwei perspectivisch liegende ähnliche Systeme zu construiren. Fig. 93. a. 93. b.

Auflösung. Man beschreibe irgend einen Strahlbüschel $\Sigma, \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$, ziehe durch ihn zwei parallele Gerade a und a', durch die Durchschnittspunkte $(a \cdot \alpha)$, $(a' \cdot \alpha)$ ziehe man wieder parallele Gerade s, s', $\alpha \parallel \alpha'$, durch $(\beta \cdot s)$ und $(\beta \cdot s')$ wieder $b \parallel b'$, durch $(\beta \cdot a)$ und $(\beta \cdot a')$, wieder $\mathfrak{b} \parallel \mathfrak{b}'$ u. s. f., indem man durch den Durchschnittspunkt jedes Aehnlichkeitsstrahls $\alpha, \beta, \ldots$ mit zwei parallelen Geraden a, a', b, b', ... wieder Parallele zieht; so erhält man zwei ähnliche Systeme in perspectivischer Lage. Da in perspectivisch liegenden Systemen die Collineations-, und hier also die Aehnlichkeitsstrahlen sich selbst homologe Gerade sind, und das Aehnlichkeitscentrum Σ sich selbst homolog ist, so ist nach Lehrsatz 38. $\frac{\Sigma A}{\Sigma A'} = \frac{\Sigma E}{\Sigma E'} = \frac{\Sigma S}{\Sigma S'} = \frac{\Sigma \mathfrak{S}}{\Sigma \mathfrak{S}'} = \frac{\Sigma G}{\Sigma G'} = \frac{\Sigma D}{\Sigma D'} = \frac{\Sigma F}{\Sigma F'}$ $= \ldots$ Man erhält also den

46. Lehrsatz. In zwei perspectivisch liegenden ähnlichen Systemen ist das Verhältniß der Strecken, welche auf einem Aehnlichkeitsstrahl von einem Paare homologer Punkte und dem Aehnlichkeitscentrum gebildet werden, für alle Aehnlichkeitsstrahlen und alle Paare homologer Punkte constant. Es ist also:

$$\frac{\Sigma A}{\Sigma A'} = \frac{\Sigma S}{\Sigma S'} = \frac{\Sigma \mathfrak{S}}{\Sigma \mathfrak{S}'} = \frac{\Sigma G}{\Sigma G'} = \frac{\Sigma D}{\Sigma D'} = \ldots$$

Fig. 93. a., 93. b.

Vermöge Lehrsatz 37. und 39. erhält man sofort einen Lehrsatz, der dem unter 29. von perspectivisch liegenden, affinen Systemen bewiesenen an die Seite gestellt werden kann:

47. Lehrsatz. In zwei ähnlichen Systemen, sie mögen perspectivisch liegen oder nicht, ist das Verhältniß der Flächen jeder zwei homologen Dreiecke constant, nämlich gleich dem Verhältniß der Quadrate irgend zweier homologen Strecken. Es ist also:

$$\frac{\triangle ASD}{\triangle A'S'D'} = \frac{\triangle SE\mathfrak{S}}{\triangle S'E'\mathfrak{S}'} = \frac{\triangle \mathfrak{S}KL}{\triangle \mathfrak{S}'K'L'} = \ldots = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\mathfrak{S}L}{\mathfrak{S}'L'}\right)^2 = \left(\frac{GK}{G'K'}\right)^2 = \ldots$$

Fig. 93. a., 93. b.

Es seien zwei homologe Dreiseite zweier ähnlichen Systeme, asd und a′s′d′ Fig. 93a., 93b. so gelegen, daß a ∥ a′, s ∥ s′, d ∥ d′, so folgt, da die Durchschnittspunkte (a · a′), (s · s′), (d · d′) auf einer und derselben (unendlich entfernten) Geraden liegen, nach § 3. Lehrsatz 13., daß die Verbindungsgeraden (A — A′), (S — S′), (D — D′) durch einen und denselben Punkt Σ gehen, und zwar kann derselbe nicht im Unendlichen liegen, da sonst (A — A′) parallel (S — S′), also AS = A′S′, also die Dreiseite asd, a′s′d′ oder die Dreiecke ASD, A′S′D′ congruent wären, gegen die Voraussetzung. Der Punkt Σ liegt also in endlicher Entfernung. Da nun z. B. die der Geraden e des einen Systems homologe Gerade e′ des anderen so gelegen sein muß, daß ∠ a′e = ∠ ae, ∠ d′e′ = ∠ de ist, so muß auch e′ ∥ e, und ebenso muß jede andere Gerade des einen der homologen Geraden des anderen Systems parallel sein. Zugleich verhält sich dann AN : A′N′ = ΣA : Σ′A′ = SA : S′A′; es sind also N, N′ ein Paar homologer Punkte in den ähnlichen Systemen nach Lehrsatz 39., also fallen in γ zwei homologe Gerade (S — N), (S′ — N′) zusammen, ebenso auf α die homologen Geraden (A — M) (A′ — M′), es ist also Σ ein sich selbst homologer Punkt der beiden Systeme und daher das Aehnlichkeitscentrum. Man sieht also:

48. **Lehrsatz.** Zwei ähnliche Systeme befinden sich in perspectivischer Lage, wenn zwei homologe Dreiseite asd, a′s′d′ so liegen, daß die Durchschnittspunkte (a · a′), (s · s′), (d · d′) der homologen Seiten auf einer unendlich entfernten Geraden liegen, wenn also a ∥ a′, s ∥ s′, d ∥ d′ ist. Die Verbindungsgeraden der homologen Ecken der Dreiseite sind dann die Aehnlichkeitsstrahlen; ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt das Aehnlichkeitscentrum. Fig. 93a., 93b.

Da es nun jederzeit möglich ist, zwei ähnliche Dreiseite so zu legen, daß die homologen Seiten parallel sind, so ergiebt sich sogleich der Satz:

49. **Lehrsatz.** Zwei ähnliche Systeme lassen sich stets in perspectivische Lage bringen

und es entspringt daher die

50. **Aufgabe.** Zwei ähnliche Systeme in perspectivische Lage zu bringen.

Auflösung. Entweder man bringe ein Paar homologer Dreiseite in solche Lage, daß die homologen Seiten parallel sind; und dieß kann mit jedem beliebigen Paare geschehen; oder, da nach Erklärung 36. jede zwei homologe Strahlbüschel gleich sind, man lege das eine System so auf das andere, daß ein Paar homologer Strahlbüschel z. B. S′,a′b′c′d′e′ mit S,abcde, oder $\mathfrak{S}',\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{e}'$ mit $\mathfrak{S},\mathfrak{abcde}$, oder A′,a′t′s′$\alpha$′ mit A,atsa, oder B′,c′ſ′s′c′ mit B,cſsc etc. Fig. 94. zu=

sammenfällt; dann haben beide Systeme einen Strahlbüschel mit allen Strahlen gemein, und wie man sogleich sieht, sind die homologen Seiten jeder zwei homologen Dreiseite parallel. Die Systeme liegen also perspectivisch. Das Aufeinanderlegen kann zugleich auf doppelte Weise geschehen, entweder so, daß die perspectivische Lage einstimmig, oder so, daß sie entgegengesetzt wird, (vergl. Fig. 93a. 93b.). Es ergiebt sich also der

51. Lehrsatz. Wird von zwei ähnlichen Systemen das eine festgehalten, so läßt sich das andere mit ihm stets für unzählig viele Punkte, als Aehnlichkeitscentrum, in perspectivische Lage bringen, und zwar für jeden auf doppelte Weise, je nachdem die perspectivische Lage einstimmig oder entgegengesetzt werden soll. Fig. 93a., 93b.

Da endlich der Mittelpunkt des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises dadurch gefunden wird, daß man die Winkel desselben halbirt, so folgt, daß, wenn dieß in ähnlichen Dreiecken ABC, A'B'C' geschieht, und M, M' den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises bezeichnet, $\triangle AMB \sim \triangle A'M'B'$, $\triangle AMC \sim \triangle A'M'C'$, $\triangle BMC \sim \triangle B'M'C'$ ist, daß $\angle ABM = \angle A'B'M'$, $\angle BAM = \angle B'A'M'$ u. s. w. ist, und man überzeugt sich so von dem

52. Lehrsatz. In zwei ähnlichen Systemen sind die Mittelpunkte jeder zwei, homologen Dreiecken eingeschriebenen, Kreise homologe Punkte.

Lassen wir

4) Collineationscentrum und Collineationsaxe zugleich in das Unendliche rücken:

rückt also in Fig. 93. Σ in das Unendliche, so werden die Aehnlichkeitsstrahlen α, β, γ.... parallel, es wird AS = A'S', AF = A'F' u. s. w. und da $a \parallel a'$, $b \parallel b'$, $\alpha \parallel \alpha'$ etc. bleibt, so sieht man, daß man ein Paar congruenter Systeme erhält.

Bisher haben wir uns nur mit zwei collinearen Systemen beschäftigt, wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der bei drei in derselben Ebene liegenden eintretenden Verhältnisse, und zwar knüpfen wir sogleich an das über affine und ähnliche Systeme Gesagte an.

Es seien zwei beliebige Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ gegeben, so kann stets ein drittes Dreieck $A_3B_3C_3$ gefunden werden, welches dem ersten $A_1B_1C_1$ ähnlich ist, und mit dem zweiten $A_2B_2C_2$ auf gegebenen Parallelen α, β, γ liegt. Fig. 95. Denn, da nach § 3. Lehrsatz 25. jede zwei Transversalen, in welcher Richtung sie auch durch die Parallelstrahlen $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ gezogen werden, proportional getheilt werden, und also $\frac{AD}{BD} = \frac{A_2D_2}{B_2D_2}$ ist, so kann man sogleich die Gerade A_2B_2 zur Construction benutzen. Man theile nämlich A_1B_1

in D_1 so, daß sich verhält $\frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{A_2D_2}{B_2D_2}$, und ziehe C_1D_1 oder γ_1, und durch A_1 und B_1 die Geraden α_1 und $\beta_1 \parallel \gamma_1$. Dann lege man an den Strahl α in einem beliebigen Punkt A_3 eine Gerade A_3B_3 so an, daß sie mit α einen Winkel macht, gleich dem, den A_1B_1 mit α_1 macht, mache dann $\angle B_3A_3C_3 = \angle B_1A_1C_1$ und ziehe B_3C_3, so ist $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle A_1B_1C_1$. Denn nach der Construction ist $\angle A_3D_3C_3$ ($= 180^0$ weniger dem von α mit A_3B_3 gebildeten Winkel) $= \angle A_1D_1C_1$ ($= 180^0$ weniger dem von α_1 mit A_1B_1 gebildeten Winkel) und $\angle C_3A_3D_3 = \angle C_1A_1D_1$, also $\triangle A_3C_3D_3 \sim \triangle A_1C_1D_1$. Es verhält sich also auch $C_3D_3 : C_1D_1 = A_3D_3 : A_1D_1$. Zugleich aber verhält sich nach § 3. Lehrsatz 25. $A_3D_3 : B_3D_3 = A_2D_2 : B_2D_2$, und da nach der Construction auch $A_1D_1 : B_1D_1 = A_2D_2 : B_2D_2$ ist, so verhält sich auch $A_3D_3 : B_3D_3 = A_1D_1 : B_1D_1$ oder $B_3D_3 : B_1D_1 = A_3D_3 : A_1D_1$; also auch $C_3D_3 : C_1D_1 = B_3D_3 : B_1D_1$. Zugleich ist $\angle B_3D_3C_3 = \angle B_1D_1C_1$, also auch $\triangle B_3C_3D_3 \sim \triangle B_1C_1D_1$, und folglich das ganze Dreieck $A_3B_3C_3 \sim \triangle A_1B_1C_1$. Sind nun $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ ein Paar homologer Dreiecke in zwei affinen Systemen, die bezüglich I. und II. heißen mögen, und sieht man $A_3B_3C_3$ als ein dem Dreieck $A_2B_2C_2$ homologes Dreieck eines mit dem System II. perspectivisch liegenden Systems III. an (vergl. Lehrsatz 30.) und construirt dasselbe, so muß es zugleich dem System I. ähnlich sein. Denn ist z. B. E_1 ein Punkt auf A_1C_1, E_2 der homologe auf A_2C_2, so verhält sich nach Erklärung 19. $A_2E_2 : A_1E_1 = A_2C_2 : A_1C_1$. Der dem Punkt E_2 homologe E_3 im System III. wird gefunden, indem man durch E_2 eine Parallele zu α, oder β oder γ zieht. Dann verhält sich auch $A_2E_2 : A_3E_3 = A_2C_2 : A_3C_3$; folglich auch $A_3E_3 : A_3C_3 = A_1E_1 : A_1C_1$ oder $A_3E_3 : A_1E_1 = A_3C_3 : A_1C_1 = A_3D_3 : A_1D_1 = A_3B_3 : A_1B_1$ u. s. w. Zieht man B_3E_3 und B_1E_1, so muß, da $A_3E_3 : A_3B_3 = A_1E_1 : A_1B_1$ sich verhält, und $\angle B_3A_3E_3 = \angle B_1A_1E_1$ ist, $\triangle A_3B_3E_3 \sim \triangle A_1B_1E_1$, also $\angle A_3B_3E_3 = \angle A_1B_1E_1$ werden u. s. w. Man erhält also, da sich, weil die Strahlen α, β, γ beliebig sind, noch viele andere Dreiecke $A_3B_3C_3$ finden lassen, den

53. Lehrsatz. Sind zwei affine Systeme I. und II., bezüglich mit den homologen Dreiecken $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, gegeben, so lassen sich stets beliebig viele Systeme III. mit dem Dreieck $A_3B_3C_3$ finden, die dem einen der affinen Systeme, I., ähnlich sind, und dem anderen Sy-

53. Lehrsatz. Sind zwei ähnliche Systeme I. und III., bezüglich mit den homologen Dreiecken $A_1B_1C_1$, $A_3B_3C_3$, gegeben, so lassen sich stets beliebig viele Systeme II. mit dem Dreieck $A_2B_2C_2$ finden, die dem einen der ähnlichen Systeme I., affin sind, und dem anderen Sy-

stem II., affin und zugleich mit ihm sich in perspectivischer Lage befinden. Fig. 95.

stem III., ebenfalls affin, aber zugleich mit ihm in perspectivischer Lage befindlich sind. Fig. 95.

Gehen wir jetzt über zur Betrachtung von drei allgemein collinearen Systemen, (sie mögen durch I., II., III. bezeichnet werden), so erhellt sogleich, daß sie, auch wenn sie in derselben Ebene liegen, doch nicht alle drei perspectivisch zu liegen brauchen. Es ist ferner möglich, daß das System I. mit dem System II. eine Punktreihe σ_2 und einen Strahlbüschel Σ_2 mit allen Elementen gemein hat, und also mit ihm für σ_2 als Collineationsaxe und Σ_2 als Collineationscentrum perspectivisch liegt, und daß zugleich das System I. mit III. für eine andere Axe σ_3 und ein anderes Centrum Σ_3 sich in perspectivischer Lage befindet, daß aber die Systeme II. und III. nicht perspectivisch zu einander liegen.

Haben aber alle drei Systeme eine Punktreihe σ mit allen ihren Punkten gemein Fig. 96a., und sind S_1 und s_1 Punkte des Systems I., S_2 und s_2 die homologen des Systems II., S_3 und s_3 die homologen Punkte in III., so sind zunächst I. und II. perspectivisch und haben also einen Punkt Σ_3 mit allen von ihm ausgehenden Strahlen gemein, nach § 7. Lehrsatz 26., und Σ_3 muß der Durchschnitt von $(S_1 - S_2)$ und $(s_1 - s_2)$ sein nach Lehrsatz 4. Ebenso haben die Systeme II. und III. einen Punkt Σ_1 mit allen von ihm ausgehenden Strahlen, und die Systeme I. und III. einen Punkt Σ_2 mit allen von ihm ausgehenden Strahlen gemein. Ziehen wir nun die Gerade $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ oder λ, so liegen auf ihr, da sie ein Collineationsstrahl am Punkte Σ_1 ist, ein Paar homologe Punkte Π_2, Π_3 der Systeme II. und III. nach Lehrsatz 5., da sie aber auch ein Collineationsstrahl am Centrum Σ_2 ist, so liegen auch auf ihr ein Paar homologer Punkte Π_1, Π_3 der Systeme I. und III. Es liegen also auf dieser Geraden auch ein Paar homologe Punkte Π_1, Π_2 der Systeme I. und II., und da dieselben für das Collineationscentrum Σ_3 perspectivisch liegen, muß nach Lehrsatz 4. $(\Pi_1 - \Pi_2)$ oder $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ durch Σ_3 gehen, oder es müssen Σ_1, Σ_2, Σ_3 auf einer und derselben Geraden λ liegen; sie müßten denn etwa zusammenfallen.

Haben ferner drei collineare Systeme einen Strahlbüschel, dessen Scheitel z. B. in Σ liege, mit allen Strahlen gemein, Fig. 96b. und sind s_1 und $\mathfrak{s}_1$ Gerade des Systems I., s_2 und $\mathfrak{s}_2$ die homologen des Systems II., s_3 und $\mathfrak{s}_3$ die des Systems III.; so sind zunächst I. und II. perspectivisch und haben also eine Gerade σ_3 mit allen auf ihr liegenden Punkten gemein, nach § 7. Lehrsatz 26., und σ_3 muß die Verbindungsgerade von $(s_1 \cdot s_2)$ und $(\mathfrak{s}_1 \cdot \mathfrak{s}_2)$ sein, nach Lehrsatz 4. Ebenso haben die Systeme II. und III. eine Gerade σ_1, und I. und III. eine Gerade σ_2 mit allen Punkten gemein. Suchen wir nun den Durchschnittspunkt $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ oder Λ, so gehen durch ihn,

als Collineationspunkt der Axe σ_1, ein Paar homologe Gerade π_2, π_3 der Systeme II. und III. nach Lehrsatz 5; da er aber auch ein Collineationspunkt der Axe σ_2 ist, so gehen auch durch ihn ein Paar homologer Gerade π_1, π_3 der Systeme I. und III. Es schneiden sich also in Λ auch ein Paar homologe Gerade π_1, π_2 der Systeme I. und II., und da dieselben für die Collineationsaxe σ_3 perspectivisch liegen, muß nach Lehrsatz 4. $(\pi_1 \cdot \pi_2)$ oder $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ auf σ_3 liegen, oder es müssen σ_1, σ_2, σ_3, durch denselben Punkt Λ gehen; sie müßten denn ganz zusammenfallen. Man sieht also:

54. Lehrsatz. Befindet sich von drei in derselben Ebene liegenden collinearen Systemen I., II., III., das erste sowohl mit dem zweiten, als mit dem dritten in perspectivischer Lage, mit jedem für eine andere Collineationsaxe, bezüglich σ_2, σ_3, und ein anderes Collineationscentrum, bezüglich Σ_2, Σ_3, so folgt daraus nicht, daß auch das zweite und dritte System perspectivisch liegen.

und:

55. Lehrsatz. Liegen drei collineare Systeme I., II., III. in derselben Ebene so, daß sie eine Punktreihe σ mit allen Punkten gemein haben, so liegt jedes mit den beiden anderen perspectivisch, und die drei Collineationscentra Σ_1, Σ_2, Σ_3 liegen entweder auf einer und derselben Geraden λ, oder fallen in einen und denselben Punkt zusammen. Fig. 96a.

55. Lehrsatz. Liegen drei collineare Systeme I., II., III. in derselben Ebene so, daß sie einen Strahlbüschel Σ mit allen Strahlen gemein haben, so liegt jedes mit den beiden anderen perspectivisch, und die drei Collineationsaxen σ_1, σ_2, σ_3 gehen entweder durch einen und denselben Punkt Λ, oder fallen in eine und dieselbe Gerade zusammen. Fig. 96b.

§ 9.

Conjectivische Lage der ebenen Systeme. Involution.

Wir haben, da sich im vorigen Paragraphen ein Paar besondere Art collinearer Systeme zeigten, nämlich affine und ähnliche, den im § 7. Lehrsatz 37. ausgesprochenen Gesetzen noch einige, auf die genannten Collineationsunterarten bezügliche beizufügen.

Nach § 8. Lehrsatz 20. und 40. sind auf homologen Geraden affiner und ähnlicher Systeme allemal die unendlich entfernten Punkte homolog. Fallen also ein Paar affine oder ähnliche Systeme mit einem Paar homologer Gerader auf einander, so haben sie auch allemal auf derselben einen Punkt, nämlich den unendlich entfernten gemein.

Sie haben jedoch außerdem auch noch einen in endlicher Entfernung liegenden Punkt gemein nach § 4. Lehrsatz 2. γ). Man sieht übrigens, daß derselbe Schluß sich auch ziehen läßt, wenn ein Paar nicht affiner oder ähnlicher, sondern allgemein collinearer Systeme mit einem Paar der in ihnen stets vorkommenden proportional getheilten Geraden (s. § 7. Lehrsatz 22.) zusammenfallen. Man sieht also, daß (was in § 7. Lehrsatz 37. 4) nur als Möglichkeit hingestellt worden war), wenn zwei homologe Gerade zweier Systeme und auf ihnen ein Paar homologer Punkte im Unendlichen zusammenfallen, daß dann auch allemal ein Paar im Endlichen liegender homologer Punkte derselben Geraden nicht nur zusammenfallen kann, sondern zusammenfallen muß. Also kann man, da, wenn ein Paar der den Gegenaxen paralleler Gerader r, r′; s, s′, ... (s. § 7. Lehrsatz 22.) auf einander fallen, die Gegenaxen selbst parallel sein müssen, sagen:

1. Lehrsatz. Fallen in zwei conjectivisch liegenden collinearen, affinen oder ähnlichen Systemen ein Paar homologer den Gegenaxen paralleler Gerader zusammen, so haben die Systeme auf diesen zusammenfallenden Geraden den unendlich entfernten und allemal auch einen in endlicher Entfernung liegenden Punkt gemein; sind die Systeme collinear, so sind zugleich ihre Gegenaxen parallel.

Bei affinen und ähnlichen Systemen ist aber mit dem Aufeinanderfallen eines Paares homologer und also proportional getheilter Gerader noch etwas Anderes verbunden. Denn denkt man sich zwei affine oder ähnliche Systeme so gelegt, daß ein Paar homologer Gerader, z. B. s und s′ (s. Fig. 94.) zusammenfallen, so müssen, wenn man durch ein Paar homologer Punkte z. B. D, D′,.... eines Paares homologer Gerader c, c′, Parallele zu s, s′ zieht, dieselben parallel sein. Zugleich sind sie nach § 8. Lehrsatz 20. und 40. homolog. Es sind aber auch die unendlich entfernten Punkte von c und c′ homolog. Denkt man sich nun durch sie Gerade parallel zu s, s′ gezogen, so sind sie ebenfalls homolog, aber, da sie beide im Unendlichen liegen, nicht nur parallel, sondern sie fallen zusammen und man hat also den in § 7. Lehrsatz 37. 5) als möglich erwähnten Fall. Zugleich sind aber die unendlich entfernten Geraden nach § 8. Lehrsatz 24. und 40. die Gegenaxen. Man kann also mit Berücksichtigung von § 4. Lehrsatz 2. γ) sagen:

2. Lehrsatz. Fallen in einem Paare conjectivisch liegender affiner oder ähnlicher Systeme ein Paar homologe Gerade zusammen, so haben die Systeme außer dem unendlich entfernten Punkt derselben allemal auch einen in endlicher Entfernung liegenden Punkt dieser Geraden gemein, und zugleich fallen die unendlich entfernten Geraden, die zugleich Gegenaxen sind, zusammen.

Es ist ferner leicht zu sehen, daß der Lehrsatz § 7. 30. rechts bei affinen und ähnlichen Systemen nicht mehr gilt. Denn ist Σ ein sich selbst homologer Punkt und ist kein durch Σ Fig. 94.x gehender Strahl sich selbst homolog, so müssen, wenn A und A′, Γ und Γ′ ein Paar homologer auf α und α' gelegener Punkte sind, die Geraden (A—A′), (Γ—Γ′) oder σ und λ parallel sein. Denn es muß sich verhalten $\frac{\Sigma A}{\Sigma \Gamma} = \frac{\Sigma A'}{\Sigma \Gamma'}$. Es liegt also der Durchschnittspunkt ($\sigma \cdot \lambda$) oder M (vergl. Fig. 76b) im Unendlichen, und ebenso N, und über die Verbindungsgerade (M—N) kann nichts Bestimmtes gesagt werden, also sind die aus Fig. 76b. gezogenen Schlüsse nicht mehr statthaft. Man sieht also, nachdem die Verhältnisse, die eintreten, wenn affine oder ähnliche Systeme eine Gerade gemein haben, durch den vorigen Lehrsatz erörtert sind:

3. Lehrsatz. Affine und ähnliche Systeme können einen Punkt gemein haben, ohne daß ein Paar angebbare homologe Gerade zusammenfallen.

Von ähnlichen Systemen gilt jedoch noch ein besonderer Satz. Zwei in derselben Ebene liegende ähnliche Systeme können nämlich eine doppelte Lage haben, entweder kann, wenn das eine von den Strahlbüscheln S und s erzeugte System die in Fig. 94. angedeutete Lage hat, das ihm ähnliche von den gleichen Strahlbüscheln S′ und s′ erzeugte System eine Lage haben, deren charakteristisches Merkmal darin besteht, daß beide Systeme durch bloße Verschiebung in derselben Ebene in perspectivische Lage gebracht werden können, es kann aber auch das von den Strahlbüscheln S′ und s′ erzeugte ähnliche System eine solche Lage haben, daß S′ in S″, s′ in s″, A′ in A″ u. s. w. liegt, so daß also das zweite System nicht durch bloße Verschiebung in seiner Ebene mit dem ersten in perspectivische Lage gebracht werden kann, sondern erst mit seiner Ebene so herumgeklappt werden muß, daß △ s″A″S″, C″A″B″, u. s. w. die Lage s′A′S′, C′A′B′ u. s. w. annehmen, um nun durch Verschiebung mit dem ersten in perspectivische Lage gebracht werden zu können. Man pflegt zu sagen:

4. Erklärung. Zwei in derselben Ebene befindliche ähnliche Systeme heißen, auch wenn sie nicht in perspectivischer Lage sich befinden, **einstimmig** liegend, wenn sie durch bloße Verschiebung in ihrer Ebene in perspectivische Lage gebracht werden können, **entgegengesetzt** liegend, wenn erst eins von ihnen mit seiner Ebene umgeklappt werden muß, um mit den anderen durch Verschiebung in perspectivische Lage gebracht werden zu können. Fig. 94.

Es seien nun s und s′ ein Paar homologe Gerade zweier in derselben Ebene liegender ähnlicher Systeme, wobei vorläufig gleichgültig ist, ob sie einstimmig oder entgegengesetzt liegen. Man verbinde nun

zwei Paar homologer Punkte, A und A′, B und B′ dieser Geraden durch die Linien $(A-A')$, $(B-B')$ so sind dieselben entweder parallel Fig. 95.x oder nicht. Ist im ersteren Falle C ein dritter Punkt der Geraden s, so muß der homologe der s′ so beschaffen sein, daß sich verhält $\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}$; es muß also auch $(C-C') \parallel (A-A') \parallel (B-B')$ sein, und da für den Durchschnittspunkt Σ von s und s′ die Proportion gilt $\frac{A\Sigma}{B\Sigma} = \frac{A'\Sigma'}{B'\Sigma'}$, so muß Σ ein sich selbst homologer Punkt beider Systeme sein. Es haben also dann die ähnlichen Systeme einen Punkt gemein. Sind aber $(A-A')$ und $(B-B')$ nicht parallel, Fig. 96.x, sondern schneiden sie sich in Σ*), so beschreibe man um das Dreieck $A\Sigma B$ und um $A'\Sigma B'$ zwei Kreise, die sich also zum ersten Male in Σ, zum zweiten Male in Σ_1 schneiden. (Sie können sich nicht berühren, denn es lägen sonst, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ die Mittelpunkte der Kreise sind, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, und Σ nach einem bekannten Satze der Planimetrie auf einer Geraden $\Sigma\mathfrak{M}\mathfrak{M}'$; zöge man nun $A\mathfrak{M}$ und $A'\mathfrak{M}'$, so wären die gleichschenkligen Dreiecke $A\mathfrak{M}\Sigma$, $A'\mathfrak{M}'\Sigma$ ähnlich, und es verhielte sich $A\Sigma : A'\Sigma = \mathfrak{M}\Sigma : \mathfrak{M}'\Sigma$. Ebenso hätte man $B\Sigma : B'\Sigma = \mathfrak{M}\Sigma : \mathfrak{M}'\Sigma$, also $A\Sigma : B\Sigma = A'\Sigma : B'\Sigma$. Es wäre also $(A-B) \parallel (A'-B')$, gegen die Voraussetzung). Bezeichnen wir den dem Dreieck $A\Sigma B$ umgeschriebenen Kreis durch K, den dem Dreieck $A'\Sigma B'$ umgeschriebenen durch K′, und ziehen $(A-\Sigma_1)$, $(B-\Sigma_1)$, $(A'-\Sigma_1)$, $(B'-\Sigma_1)$, so ist

$\angle A\Sigma_1 B = \angle A\Sigma B$ als Peripheriewinkel in K;
$\angle A'\Sigma_1 B' = \angle A'\Sigma B'$ „ „ „ K′;
und da $\angle A\Sigma B = \angle A'\Sigma B'$
ist, so folgt: $\angle A\Sigma_1 B = \angle A'\Sigma_1 B'$.
Ferner ist $\angle AB\Sigma_1 = \angle A\Sigma\Sigma_1$ als Peripheriewinkel in K;
und $\angle A'B'\Sigma_1 = \angle A'\Sigma\Sigma_1$ „ „ „ K′;
und da $\angle A\Sigma\Sigma_1 = \angle A'\Sigma\Sigma_1$
ist, so folgt: $\angle AB\Sigma_1 = \angle A'B'\Sigma_1$.

Es sind also die Dreiecke $A\Sigma_1 B$ und $A'\Sigma_1 B'$ ähnlich, folglich auch $\angle BA\Sigma_1 = \angle B'A'\Sigma_1$. Nehmen wir nun an, die Systeme seien in einstimmiger Lage, sehen Σ_1 als einen Punkt des ersten an, und suchen den ihm homologen des zweiten Systems. Nach § 8. Lehrsatz 37. muß der gesuchte Punkt, der Σ'_1 heißen mag, so liegen, daß $\triangle A'\Sigma'_1 B' \sim \triangle A\Sigma_1 B$, daß also $\angle A'B'\Sigma'_1 = \angle AB\Sigma_1$, $\angle B'A'\Sigma'_1 = \angle BA\Sigma_1$ ist und daß zugleich beide Systeme durch bloße Verschiebung in perspectivische Lage gebracht werden können. Daß der Punkt Σ_1 der ersteren Bedingung genügt, ist soeben gezeigt worden, daß er auch die zweite erfüllt, ist sogleich zu sehen, denn man brauchte

*) Vergl. Witzschel: „Grundlinien der neueren Geometrie." § 174.

bloß das Dreieck $A'\Sigma_1 B'$ so zu drehen, daß $A'\Sigma_1$ auf $A\Sigma_1$ fällt, so würde auch, da $\angle A'\Sigma_1 B' = \angle A\Sigma_1 B$ ist, $B'\Sigma_1$ auf $B\Sigma_1$ fallen, es würde also dann $(A'-B') \parallel (A-B)$ sein. Wäre nun C ein Punkt der s außer A oder B, so müßte der ihm homologe C' auf $\Sigma_1 C$ liegen, da sich verhalten muß $\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}$; und so jeder andere Punkt der s'. Es wären also dann die Systeme durch bloße Verschiebung für Σ_1 als Aehnlichkeitscentrum in perspectivische Lage gebracht. Es ist also Σ_1 selbst der gesuchte Punkt Σ'_1, oder es ist Σ_1 ein sich selbst homologer Punkt beider Systeme. Es sind also bei der von Hause aus angenommenen Lage Fig. 96x. in Σ_1 die Scheitel zweier gleicher Strahlbüschel vereinigt. Da dieselben bei einstimmiger Lage der Systeme auch einstimmig verlaufen, so kann kein Strahl der an Σ_1 vereinigten Strahlbüschel ein sich selbst homologer sein nach § 4. Lehrsatz 2. γ). Liegen die ähnlichen Systeme jedoch entgegengesetzt, so kann Σ_1 kein sich selbst homologer Punkt sein, weil sich sonst, gegen die Voraussetzung, beide Systeme durch bloße Verschiebung in perspectivische Lage bringen ließen. In diesem Falle halbire man den Winkel $A\Sigma_1 A'$ durch eine Gerade, welche die $(A-A')$ in M trifft, und den Winkel $B\Sigma_1 B'$ durch eine Gerade, welche die $(B-B')$ in N trifft, ziehe $(M-N)$ und suche den dem Punkt M auf $(A-A')$ und den dem Punkt N auf $(B-B')$ zugeordneten harmonischen, bezüglich M', N' der Punktreihen AMA'M'; BNB'N'. Dann ziehe man $(M'-N')$, welche die $(M-N)$ im Punkt Σ_2 trifft, so ist Σ_2 ein sich selbst homologer Punkt der beiden ähnlichen Systeme. Dieß läßt sich durch folgende Betrachtungen beweisen: Da $(M-\Sigma_1)$ den Winkel $A\Sigma_1 A'$ halbirt, so haben wir nach § 1. Lehrsatz 27., um den Punkt M' zu finden, nur eine Senkrechte auf $(M-\Sigma_1)$ in Σ_1 zu errichten, ebenso um N' zu erhalten, eine Senkrechte auf $(N-\Sigma_1)$ in Σ_1 zu ziehen. Nun läßt sich zeigen, daß die so gefundene Gerade $(M'-N') \perp (M-N)$ ist. Denn es war $\angle A\Sigma_1 B = \angle A'\Sigma_1 B'$, folglich $\angle A\Sigma_1 B - \angle A'\Sigma_1 B = \angle A'\Sigma_1 B' - \angle A'\Sigma_1 B$, d. h. $\angle A\Sigma_1 A' = \angle B\Sigma_1 B'$, also auch, da diese Winkel bezüglich durch $(M-\Sigma_1)$, $(N-\Sigma_1)$ halbirt werden, $\angle A\Sigma_1 M = \angle A'\Sigma_1 M = B\Sigma_1 N = \angle B'\Sigma_1 N$. Nun ist $\angle N\Sigma_1 M = \angle N\Sigma_1 B + \angle B\Sigma_1 A' + \angle A'\Sigma_1 M$, oder, da $\angle A'\Sigma_1 M = \angle B'\Sigma_1 N$ ist, $\angle N\Sigma_1 M = \angle N\Sigma_1 B + \angle B\Sigma_1 A' + \angle B'\Sigma_1 N = \angle B'\Sigma_1 A' = \angle B'\Sigma A'$, also $\angle N\Sigma_1 M = \angle B'\Sigma A'$. Zieht man nun $(\Sigma_1 - \Sigma)$ und bezeichnet den Durchschnittspunkt von $(M-\Sigma)$ mit $(N-\Sigma_1)$ durch Q, so entstehen demnach zwei ähnliche Dreiecke $MQ\Sigma_1 \sim NQ\Sigma$, in denen sich verhält: $\Sigma_1 Q : MQ = \Sigma Q : NQ$ oder $\Sigma_1 Q \cdot NQ = \Sigma Q \cdot MQ$. Es läßt sich demnach um beide Dreiecke ein durch Σ_1, Σ, N, M gehender Kreis beschreiben, (in der Figur ist er nicht verzeichnet), in welchem

$$\angle \Sigma MN = \angle \Sigma\Sigma_1 N \text{ als Peripheriewinkel} \qquad \dagger)$$

ist. Nun ist auch $\angle N'\Sigma_1 M' = \angle N\Sigma_1 M$, denn es war sowohl $\angle N\Sigma_1 M' + \angle N'\Sigma_1 M' = 90^0$, als auch $\angle N\Sigma_1 M' + \angle N\Sigma_1 M = 90^0$ (ver-

möge der Construction der harmonischen Strahlen $(\Sigma_1 - M')$, $(\Sigma_1 - N')$), woraus folgt: $\angle N'\Sigma_1 M' = \angle N\Sigma_1 M$. Da nun auch $\angle N\Sigma_1 M = \angle B'\Sigma A'$ war, so ist auch $\angle N'\Sigma_1 M' = \angle B'\Sigma A' = 180^0 - \angle N'\Sigma M'$. Im Viereck $N'\Sigma_1 M'\Sigma$ machen also die Gegenwinkel $N'\Sigma_1 M'$ und $N'\Sigma M'$ zwei Rechte aus, es läßt sich also auch um dieses Viereck ein (in der Figur nicht verzeichneter) Kreis beschreiben. In demselben ist aber $\angle \Sigma M'N' = \angle \Sigma\Sigma_1 N'$ als Peripheriewinkel, oder

$$\angle MM'\Sigma_2 = \angle \Sigma\Sigma_1 N'; \qquad \dagger\dagger)$$

nun ist $\angle M'\Sigma_2 N = \angle MM'\Sigma_2 + \angle \Sigma MN$;

also nach Gleichung †) und ††)

$$\angle M'\Sigma_2 N = \angle \Sigma\Sigma_1 N' + \angle \Sigma\Sigma_1 N,$$

folglich da $\angle \Sigma\Sigma_1 N' + \angle \Sigma\Sigma_1 N = \angle N\Sigma_1 N' = 90^0$ war,

$$\angle M'\Sigma_2 N = 90^0,$$

also $\angle M'-N') \perp (M-N)$.

Zieht man nun $(B-\Sigma_2)$ und $(B'-\Sigma_2)$, so entsteht, da Punktreihe $BNB'N'$ harmonisch ist, ein harmonischer Strahlbüschel an Σ_2, dessen Strahlen (Σ_2-B), (Σ_2-N), (Σ_2-B'), (Σ_2-N') sind, und da in ihm ein Paar zugeordneter Strahlen (Σ_2-N) und (Σ_2-N') senkrecht auf einander stehen, so wird nach § 1. Lehrsatz 27.

$$\left.\begin{array}{l}\angle B\Sigma_2 N = \angle B'\Sigma_2 N \\ \text{und ebenso} \quad \angle A\Sigma_2 M = \angle A'\Sigma_2 M\end{array}\right\} \quad *)$$

Es ist also $\angle B'\Sigma_2 A' = 90^0 - \angle B'\Sigma_2 N + 90^0 - \angle A'\Sigma_2 M = 180^0 - \angle B'\Sigma_2 N - \angle A'\Sigma_2 M = 180^0 - B\Sigma_2 N - A\Sigma_2 M = 90^0 - B\Sigma_2 N + 90^0 - A\Sigma_2 M = \angle B\Sigma_2 A$, also

$$\angle A'\Sigma_2 B' = \angle A\Sigma_2 B. \qquad **)$$

Wird aber in einem Dreieck ACB der Winkel C durch eine Gerade halbirt, welche die Gegenseite in D schneidet, so verhält sich $AD : BD = AC : BC$. Denn, verlängert man Fig. 96.x, AC über C hinaus um $CE = BC$ und zieht $(B-E)$, so wird $\angle CEB = \angle CBE$, also $\angle ACB = 2 \cdot \angle CEB$ und $\frac{1}{2}\angle ACB = \angle CEB$, oder $\angle ACD = \angle CEB$; es ist also $(E-B) \parallel (C-D)$. Daher verhält sich $AD : BD = AC : EC$, oder, da $EC = BC$ war, $AD : BD = AC : BC$. Nach diesem Satze verhält sich, da nach *) im $\triangle B\Sigma_2 B'$ der Winkel $B\Sigma_2 B'$ durch $\Sigma_2 N$ halbirt wird, $BN : B'N = B\Sigma_2 : B'\Sigma_2$. Nach der Construction aber ist auch der Winkel $B\Sigma_1 B'$ durch $(\Sigma_1 - N)$ halbirt, also verhält sich auch $BN : B'N = B\Sigma_1 : B'\Sigma_1$. Wir haben also die Proportion:

$$B\Sigma_2 : B'\Sigma_2 = B\Sigma_1 : B'\Sigma_1;$$

und ebenso:

$$A\Sigma_2 : A'\Sigma_2 = A\Sigma_1 : A'\Sigma_1;$$

da aber nach dem Früheren $\triangle A\Sigma_1 A' \sim \triangle B\Sigma_1 B'$ war, ist $A\Sigma_1 : A'\Sigma_1 = B\Sigma_1 : B'\Sigma_1$, also haben wir auch

$$A\Sigma_2 : A'\Sigma_2 = B\Sigma_2 : B'\Sigma_2.$$

Es sind also nach dieser letzten und der Gleichung **) in den Dreiecken

$A\Sigma_2B$ und $A'\Sigma_2B'$ zwei Paar Seiten proportionirt, und der von ihnen eingeschlossene Winkel gleich. Es ist also $\triangle A'\Sigma_2B' \sim \triangle A\Sigma_2B$; also auch

$$\angle AB\Sigma_2 = \angle A'B'\Sigma_2; \ \angle BA\Sigma_2 = \angle B'A'\Sigma_2.$$

Man überzeugt sich daher leicht, auf dieselbe Weise, wie bei einstimmig liegenden Systemen in Betreff des Punktes Σ_1, so hier, bei entgegengesetzt liegenden, daß Σ_2 ein sich selbst homologer Punkt ist, indem man das Dreieck $A'\Sigma_2B'$, und folglich das ganze zweite System erst mit seiner Ebene umklappen müßte, bevor es durch bloße Verschiebung mit dem ersten in perspectivische Lage gebracht werden könnte. Es sind also am Punkt Σ_2 als Scheitel zwei homologe gleiche Strahlbüschel in entgegengesetzter Aufeinanderfolge der Strahlen vereinigt. Nach § 4. Lehrsatz 2. γ) giebt es also in denselben zwei sich selbst homologe Strahlen, und zwar stehen dieselben senkrecht auf einander. Es sind nun $(\Sigma_2 - A)$ und $(\Sigma_2 - A')$ homologe Gerade der ähnlichen Systeme, und da nach *) $\angle A\Sigma_2M = \angle A'\Sigma_2M$ ist, und die Aufeinanderfolge der homologen Strahlen $(\Sigma_2 - B)$, $(\Sigma_2 - A)$, $(\Sigma_2 - M)$ des einen und $(\Sigma_2 - B')$, $(\Sigma_2 - A')$, $(\Sigma_2 - M)$ des anderen Systems entgegengesetzt ist, so folgt, daß $(\Sigma_2 - M)$ oder $(M - N)$ der eine, und also $(M' - N')$ der andere sich selbst homologe Strahl sein muß. Da nun auch die unendlich entfernten Punkte von $(M - N)$ und $(M' - N')$ sich selbst homolog sind, so folgt, daß die ähnlichen Systeme auch die unendlich entfernte Verbindungsgerade der unendlich entfernten Punkte von $(M - N)$ und $(M' - N')$ gemein haben. Man sieht also:

5. Lehrsatz. Liegen zwei ähnliche Systeme in derselben Ebene, so haben sie **stets** einen sich selbst homologen Punkt gemein. Liegen sie **einstimmig**, so haben sie **keine** durch den gemeinsamen Punkt Σ_1 gehende Gerade gemein; liegen sie **entgegengesetzt**, so haben sie **zwei** durch den gemeinsamen Punkt Σ_2 gehende, senkrecht auf einander stehende Gerade $(M - N)$, $(M' - N')$, als sich selbst homolog, gemein. Fig. 96x.

Da ferner nach Lehrsatz 1. zwei ähnliche Systeme, wenn sie eine Gerade σ gemein haben, auch einen endlichen Punkt Σ derselben Geraden gemein haben, in diesem also die Scheitel zweier homologer Strahlbüschel liegen; und nach § 4. Lehrsatz 2. γ), dieselben, da sie in ähnlichen Systemen gleich sind, bei einstimmiger Lage mit allen, bei entgegengesetzter Lage mit zwei homologen Strahlen auf einander fallen, so sieht man:

6. Lehrsatz. Haben zwei ähnliche Systeme eine Gerade σ gemein, so haben sie auch einen Strahlbüschel, dessen Scheitel Σ auf σ liegt, gemein, und zwar fällt in demselben **wenigstens** außer σ noch ein Paar homologer Strahlen zusammen; oder auch es fallen alle homologen

Strahlen zusammen. Fällt außer σ nur noch ein Paar Strahlen zusammen, so steht dieser gemeinschaftliche Strahl τ senkrecht auf σ (nach § 4. Lehrsatz 2. γ).

Fassen wir noch einmal alle, möglicher Weise bei affinen und ähnlichen, in derselben Ebene liegenden Systemen, vorkommenden Fälle zusammen, so sehen wir zunächst: eintreten kann der Fall § 7. Lehrsatz 37. 1) und 2). Der daselbst unter 3) erwähnte Fall kann nur dann eintreten, wenn zwei Punkte und also eine Gerade (nämlich ihre Verbindungsgerade) unendlich entfernt sind; denn lägen alle drei Punkte und also auch alle drei Gerade in endlicher Entfernung, so fielen die Systeme ganz zusammen nach § 8. Lehrsatz 23. und 43., indem daselbst stillschweigend vorausgesetzt war, daß keiner der drei Punkte, und keine der drei Geraden in unendlicher Entfernung sich befinden, und wäre bloß ein Punkt unendlich entfernt, also zwei Gerade parallel, so hätten sie auf der Verbindungsgeraden der beiden im Endlichen liegenden Punkte zwei Punkte, außer dem unendlich entfernten, also die Punktreihe mit allen Punkten gemein, was der Fall § 7. Lehrsatz 37. 2) wieder wäre. Der dort unter 4) angeführte Fall kann nur dann statthaben, wenn einer der beiden Punkte der unendlich entfernte ist, indem sonst die Systeme eine Punktreihe mit allen Punkten gemein hätten. Ist aber einer der beiden Punkte der unendliche und zwar zunächst α) derjenige, durch welchen die zweite sich selbst homologe Gerade nicht geht, haben also die Systeme einen Punkt Σ, und zwei durch Σ gehende Gerade σ, τ gemein (vergl. Fig. 77 b) und auf σ den unendlich entfernten Punkt T, so erhält man, da auch der unendlich entfernte Punkt der τ sich selbst homolog ist, den sich aus 3) ergebenden bei affinen und ähnlichen Systemen möglicher Weise eintretenden Fall wieder. Ist β) derjenige Punkt der unendlich entfernte, durch welchen die zweite sich selbst homologe Gerade geht, haben also die Systeme einen im Endlichen liegenden Punkt M einer Geraden σ und den unendlich entfernten Durchschnittspunkt T (vergl. Fig. 77 d) einer zweiten sich selbst homologen mit σ parallelen Geraden τ gemein, so haben sie auf letzterer nach Lehrsatz 1. (dieses Paragraphen) noch einen Punkt N gemein, also eine im Endlichen liegende Gerade (M—N), auf der zwei endliche Punkte, und da die Systeme affin oder ähnlich sind, auch der unendliche sich selbst homolog ist. Die Systeme hätten also dann eine Punktreihe mit allen Punkten gemein, was kein neuer Fall ist. Es kommt also der § 7. Lehrsatz 37. 4) angeführte Fall für affine und ähnliche Systeme gar nicht in Betracht. Der Fall 5) kann ebenfalls nicht eintreten, da, wenn affine oder ähnliche Systeme mit einem Paar homologer Geraden zusammenfallen, sie nach Lehrsatz 1. allemal auf derselben, wenigstens zwei Punkte, einen endlich und den unendlich entfernten gemein haben. Ebenso kann der Fall 6) nicht eintreten, da, wenn die Systeme einen Punkt Σ und eine nicht durch ihn gehende Gerade σ gemein hätten, sie auf letzterer noch einen endlich gelegenen Punkt M, also auch eine Gerade (Σ—M) mit zwei

endlichen Punkten Σ, M, und dem unendlich entfernten, folglich die Punktreihe (Σ—M) mit allen Punkten gemein hätten. Der Fall 7) endlich kann bei affinen Systemen vorkommen, bei ähnlichen aber, wegen Lehrsatz 5. (dieses Paragraphen) nicht. Fassen wir also alles zusammen und berücksichtigen zugleich die Lehrsätze 3., 5., 6. so können wir das Gesetz aussprechen:

7. Lehrsatz. Liegen zwei affine, oder zwei ähnliche Systeme in derselben Ebene, so können sie

1) sich mit allen Punkten und allen Geraden vollständig decken. § 7. Lehrsatz 37. 1);
2) perspectivisch liegen. § 7. Lehrsatz 37. 2);
3) einen Punkt und zwei durch ihn gehende Gerade σ, τ, und auf diesen, außer dem Durchschnittspunkt nur noch die unendlich entfernten Punkte gemein haben. § 7. Lehrsatz 3. Tritt dieser Fall bei ähnlichen Systemen ein, so stehen die beiden sich selbst homologen Geraden σ, τ auf einander senkrecht. § 9. Lehrsatz 6.
4) einen in angebbarer Entfernung befindlichen Punkt gemein haben, ohne eine Gerade von angebbarer Richtung gemein zu haben. § 9. Lehrsatz 3.
5) **Affine** Systeme können auch noch so liegen, daß sie weder einen Punkt, noch eine Gerade gemein haben. § 7. Lehrsatz 37. 7). **Aehnliche** Systeme können **nie** so liegen. § 9. Lehrsatz 5.

Es mögen nun einige Aufgaben folgen, um das Wesen der Collineation recht deutlich zu machen. Der größeren Anschaulichkeit wegen soll überall eine bestimmte, in einem System enthaltene Figur, und zwar ein Viereck oder Vierseit zu Grunde gelegt werden*).

8. Aufgabe. Gegeben ein ebenes System I., und in demselben ein Viereck ABCD; gesucht ein dem gegebenen collineares System II. in derselben Ebene, und von solcher Lage, daß das dem Viereck ABCD homologe Viereck A'B'C'D' mit der Seite (A'—D') oder σ' auf die Seite (A—D) oder σ fällt, daß aber in der gemeinsamen Geraden (A—D) oder (A'—D') kein Paar homologer Punkte zusammenfalle.

Auflösung. Es versteht sich nach § 7. Lehrsatz 30., daß beide Systeme auch einen, irgendwo liegenden, Punkt gemein haben. Dieser Umstand bleibt jedoch hier ganz außer Acht, da es gleichgültig ist, wo

*) Die zu den folgenden sechs Aufgaben nöthigen Figuren wird sich nach den im Text angegebenen Daten jeder leicht construiren können. Sie sind nicht gezeichnet worden, um die Anzahl der Figuren nicht allzusehr zu vergrößern.

dieser gemeinschaftliche Punkt liegt; nur soll er nicht in einer der Ecken A oder D des Vierecks ABCD oder A′B′C′D′ sich befinden. Sollte zufällig B nach B′ oder C nach C′ fallen, so soll dieß nichts ausmachen; jedenfalls soll die Construction nicht in der Absicht ausgeführt werden, dieß herbeizuführen. Dagegen soll die Richtung (A′—D′) mit der Richtung (A—D) zusammenfallen. Die gemeinschaftliche Gerade, auf der also die vier Punkte A, D, A′, D′ liegen, möge durch σ oder σ' bezeichnet werden. Man verzeichne also ein beliebiges System, und nehme darin irgend vier, nicht in derselben Geraden liegende Punkte A, B, C, D, als Ecken des gegebenen Vierecks an, oder noch einfacher: Man construire ein beliebiges Viereck ABCD und ziehe von irgend einem Punkte S derselben Ebene die Strahlen a, b, c, d bezüglich nach den Ecken A, B, C, D des Vierecks; auf einem fünften Strahl e nehme man einen zweiten Punkt $\mathfrak{s}$ beliebig an, und verbinde ihn mit A, B, C, D bezüglich durch die Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$; die Gerade (S—$\mathfrak{s}$) oder ($\mathfrak{s}$—S) kann nun als ein Strahl sowohl des Strahlbüschels S, als des Büschels $\mathfrak{s}$ angesehen werden; es wird daher ($\mathfrak{s}$—S) oder e auch durch $\mathfrak{e}$ bezeichnet. Man denke sich nun das System I. als von den Strahlbüscheln S,abecd und $\mathfrak{s}$,$\mathfrak{abecd}$ erzeugt (s. § 6. Erklärung 2.)*). Die Gerade also, auf der A und D liegen, heiße σ oder σ'. Die Durchschnittspunkte (a · σ), (b · σ), (e · σ), (c · σ), (d · σ), ($\mathfrak{a}$ · σ), ($\mathfrak{b}$ · σ), ($\mathfrak{e}$ · σ), ($\mathfrak{c}$ · σ), ($\mathfrak{d}$ · σ) heißen bezüglich A, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}_1$, D, A, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}_2$, D. Jeder einem Punkte des ersten Systems homologe des zweiten und ebenso jede einer Geraden des ersten Systems homologe des zweiten werde auf dieselbe Weise bezeichnet, und nur durch einen beigefügten Strich unterschieden. Es kommt nun zunächst darauf an, zwei conforme Strahlbüschel S′,a′b′e′c′d′ $\overline{\wedge}$ S,abecd, $\mathfrak{s}'$,$\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{e}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ $\overline{\wedge}$ $\mathfrak{s}$,$\mathfrak{abecd}$ zu construiren. Dieselben dürfen jedoch nicht ganz beliebig sein, da auf der gemeinsamen Geraden σ kein Punkt ein sich selbst homologer sein soll. Nach § 4. Lehrsatz 2. β) dürfen zunächst die auf σ vereinigten Punktreihen nicht entgegengesetzt verlaufen, da sie sonst nothwendig mit zwei Paaren homologer Punkte auf einander fallen würden. Um nun das zweite System so zu construiren, daß in der That kein Paar homologer Punkte der σ zusammenfallen kann, setze man zunächst fest, daß die vereinigten Punktreihen einstimmig verlaufen. Man setze ferner willkürlich fest, daß irgend einer der Punkte der σ, z. B. $\mathfrak{B}_1$ derjenige Punkt sei, dessen Entfernung von dem Gegenpunkte der Reihe σ,A$\mathfrak{B}_1\mathfrak{E}$D.... gleich der Entfernung des homologen Punktes $\mathfrak{B}'_1$ von dem Gegenpunkte der homologen Punktreihe σ,A′$\mathfrak{B}'_1\mathfrak{E}$D′.... sei. Man stelle sich also unter $\mathfrak{B}_1$ den in § 3. Lehrsatz 9. mit G bezeichneten Punkt vor, nehme ferner einen Punkt R willkürlich als Gegenpunkt der Punktreihe σ,A$\mathfrak{B}_1\mathfrak{E}$D.... an, unter

---

*) Der Strahl e soll, was übrigens gleichgültig, zwischen den Schenkeln des von b und c., ebenso $\mathfrak{e}$ zwischen den Schenkeln des von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ eingeschlossenen spitzen Winkels liegend gedacht werden.

dem man sich also den Punkt O des § 3. Lehrsatz 9. vorzustellen hat, trage nach der anderen Seite von $\mathfrak{W}_1$ eine beliebige Strecke $\mathfrak{W}_1 P'$ aber so daß $RP' < 2 R\mathfrak{W}_1$, also $\mathfrak{W}_1 P' < \mathfrak{W}_1 R$ ist, ab, denke sich unter P′ das frühere Q′ § 3. Lehrsatz 9., und mache auf der Strecke RP′ die Entfernung $P'\mathfrak{W}'_1 = R\mathfrak{W}_1$, so hat man sich unter $\mathfrak{W}'_1$ den am angeführten Orte mit G′ bezeichneten Punkt zu denken. Zugleich ist $\mathfrak{W}'_1$ der dem $\mathfrak{W}_1$ homologe Punkt des zweiten Systems, und nach § 4. Lehrsatz 2. α) c) ist die durch die drei Punkte $\infty, \mathfrak{W}'_1$, P′, welche bezüglich homolog R, $\mathfrak{W}_1, \infty$ im System I. sind, bestimmte Punktreihe so gelegen, daß in der That kein Paar homologer Punkte zusammenfallen kann. Man wähle nun einen beliebigen, nur außerhalb der σ liegenden Punkt S′ als dem Punkt S homolog, ziehe $(S'-\mathfrak{W}'_1)$ oder b′, (S′−P′) oder p′ und durch S′ eine Parallele r′ zu σ; ferner ziehe man (S−R) oder r, und durch S eine Parallele p zu σ; so muß Strahlbüschel S′,r′p′b′.... $\overline{\wedge}$ S,rpb .... sein. Es kommt nun also nur darauf an, die den Strahlen a, e, c, d homologen a′, e′, c′, d′ zu finden. Zu dem Zwecke verfahre man folgendermaßen. Man verbinde den Durchschnittspunkt (p · p′) oder $\mathfrak{P}$ mit (r . r′) oder $\mathfrak{R}$ durch die Gerade $(\mathfrak{P}-\mathfrak{R})$ oder m, die von r, a, b, e, c, d bezüglich in $\mathfrak{R}$, V_1, W_1, Z_1, X_1, Y_1 geschnitten wird, nehme auf p′ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ an, ziehe $(W_1-\mathfrak{O})$, die den Strahl b′ in W'_1 trifft und dann $(W'_1-\mathfrak{R})$ oder n. Von $\mathfrak{O}$ aus projicire man $\mathfrak{R}$, V_1, W_1, Z_1, X_1, Y_1 auf n nach $\mathfrak{R}$, V'_1, W'_1, Z'_1, X'_1, Y'_1; so ist nach § 2. Erklärung 7. Punktreihe m,$\mathfrak{R}V_1W_1Z_1X_1Y_1$ $\overline{\wedge}$ Strahlbüschel S,rabecd, zugleich auch Punktreihe n,$\mathfrak{R}V'_1W'_1Z'_1X'_1Y'_1$ $\overline{\wedge}$ Punktreihe m,$\mathfrak{R}V_1W_1Z_1X_1Y_1$, und also auch Punktreihe n,$\mathfrak{R}V'_1W'_1Z'_1X'_1Y'_1$ $\overline{\wedge}$ Strahlbüschel S,rabecd. Zieht man nun $(S'-V'_1)$, $(S'-Z'_1)$, $(S'-X'_1)$, $(S'-Y'_1)$ oder a′, e′, c′, d′, so ist auch Strahlbüschel S′,a′b′e′c′d′ $\overline{\wedge}$ Strahlbüschel S,abecd. Man erhält also die den Punkten A, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{S}_1$, D homologen A′, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{S}'_1$, D′. Man könnte nun ebenso die den Punkten $\mathfrak{W}_2$, $\mathfrak{S}_2$ homologen finden, indem man $(S-\mathfrak{W}_2)$, $(S-\mathfrak{S}_2)$ zöge und die ihnen homologen Strahlen des Büschels S′ bestimmte. Da $\mathfrak{s}$ auf dem Strahl e liegt, muß $\mathfrak{s}'$ sich auf e′ befinden. Es werde beliebig auf e′ angenommen. Da nun die Strahlen a und $\mathfrak{a}$ in A, d und $\mathfrak{d}$ in D sich schneiden, so muß $(\mathfrak{s}'-A')$ der Strahl $\mathfrak{a}'$, $(\mathfrak{s}'-D')$ der Strahl $\mathfrak{d}'$ sein. Hätte man also auf die vorhin angegebene Weise die Punkte $\mathfrak{W}'_2$ und $\mathfrak{S}'_2$ bestimmt, so hätte man auch $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$. Man kann aber auch zur Bestimmung von $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ ein dem früheren analoges Verfahren anwenden. Schneidet nämlich $\mathfrak{d}'$ den Strahl $\mathfrak{d}$ in Y_2, $\mathfrak{e}'$ den Strahl $\mathfrak{e}$ in Z_2, so ziehe man (Y_2-Z_2) oder $\mathfrak{m}$, welche von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ bezüglich in V_2, W_2, Z_2, X_2, Y_2 geschnitten wird, nehme auf $\mathfrak{e}'$ (oder e′) einen beliebigen Punkt $\mathfrak{Y}$ an und ziehe $(\mathfrak{Y}-V_2)$, $(\mathfrak{Y}-W_2)$, $(\mathfrak{Y}-Z_2)$, $(\mathfrak{Y}-X_2)$, $(\mathfrak{Y}-Y_2)$, so wird Punktreihe $\mathfrak{m}$,$V_2W_2Z_2X_2Y_2$ $\overline{\wedge}$ Strahlbüschel $\mathfrak{s}$,$\mathfrak{abecd}$. Schneidet nun $(\mathfrak{Y}-V_2)$ den Strahl $\mathfrak{a}'$ in V'_2, so ziehe man (V'_2-Y_2) oder $\mathfrak{n}$, die von $(\mathfrak{Y}-V_2)$, $(\mathfrak{Y}-W_2)$, $(\mathfrak{Y}-Z_2)$, $(\mathfrak{Y}-X_2)$, $(\mathfrak{Y}-Y_2)$

bezüglich in V'_2, W'_2, Z'_2, X'_2, Y_2 geschnitten wird, und ziehe $(\mathfrak{S}'-W'_2)$ und $(\mathfrak{S}'-X'_2)$ oder $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$, so sind dieß die den Strahlen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ homologen. Denn es wird Strahlbüschel $\mathfrak{S}',\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{e}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ $\overline{\wedge}$ Punktreihe $\mathfrak{u},V'_2W'_2Z'_2X'_2Y_2$ $\overline{\wedge}$ $\mathfrak{w},V_2W_2Z_2X_2Y_2$ $\overline{\wedge}$ Strahlbüschel $\mathfrak{S},\mathfrak{abecd}$. Es sind also jetzt die den Strahlbüscheln S,abecd und $\mathfrak{S},\mathfrak{abecd}$ des Systems I. homologen Strahlbüschel S',a'b'e'c'd' und $\mathfrak{S}',\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{e}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ des Systems II., und folglich dieses selbst vollständig bestimmt. Es ist demnach $(b' \cdot \mathfrak{b}')$ der dem Punkt $(b \cdot \mathfrak{b})$ oder B homologe B', $(c' \cdot \mathfrak{c}')$ der dem Punkt $(c \cdot \mathfrak{c})$ oder C homologe C'. Es sind also die Ecken A', B', C', D' des gesuchten Vierecks bekannt und demnach die Aufgabe gelöst. Will man übrigens wissen, wo der beiden Systemen gemeinsame Punkt liegt, so verfahre man, wie zum Beweise von § 7. Lehrsatz 30. angegeben wurde (vergl. Fig. 76a).

9. Aufgabe. Gegeben ein ebenes System I. und in demselben ein Vierseit abcd; gesucht ein dem gegebenen collineares System II. in derselben Ebene, und von solcher Lage, daß das dem Vierseit abcd homologe Vierseit a'b'c'd' mit der Ecke $(a' \cdot d')$ oder Σ' auf die Ecke $(a \cdot d)$ oder Σ fällt, daß aber an dem gemeinsamen Punkte Σ kein Paar homologer Gerader zusammenfällt.

Auflösung. Nach § 7. Lehrsatz 30. haben beide Systeme auch eine Gerade gemein. Da dieselbe jedoch kein Strahl am gemeinsamen Punkt Σ sein soll, und es nichts ausmachen soll, wenn etwa zufällig b' nach b, oder c' nach c fiele, so kommt ihre Lage hier nicht in Betracht. Man construire also ein beliebiges Vierseit abcd, welches das gegebene sei, und ziehe dann zwei beliebige Gerade s und $\mathfrak{s}$, die Durchschnittspunkte $(s \cdot a)$, $(s \cdot b)$, $(s \cdot \mathfrak{s})$, $(s \cdot c)$, $(s \cdot d)$ nenne man bezüglich A, B, E, C, D; die Durchschnittspunkte $(\mathfrak{s} \cdot a)$, $(\mathfrak{s} \cdot b)$, $(\mathfrak{s} \cdot s)$, $(\mathfrak{s} \cdot c)$, $(\mathfrak{s} \cdot d)$ nenne man bezüglich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, so daß also E und $\mathfrak{E}$ identisch sind. Die Verbindungsgeraden $(A-\Sigma)$, $(B-\Sigma)$, $(E-\Sigma)$, $(C-\Sigma)$, $(D-\Sigma)$, $(\mathfrak{A}-\Sigma)$, $(\mathfrak{B}-\Sigma)$, $(\mathfrak{E}-\Sigma)$, $(\mathfrak{C}-\Sigma)$, $(\mathfrak{D}-\Sigma)$ nenne man bezüglich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{c}_1$, d, a, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{c}_2$, d. Nun denke man sich das System I. von den Punktreihen s,ABECD und $\mathfrak{s},\mathfrak{ABECD}$ erzeugt. Es kommt nun also darauf an, zwei Punktreihen s',A'B'E'C'D'; $\mathfrak{s}',\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ von solcher Beschaffenheit zu finden, daß das von ihnen erzeugte System II. den Punkt Σ mit dem System I. gemein hat, daß also a' und d' oder $(A'-\mathfrak{A}')$, $(D'-\mathfrak{D}')$ sich in Σ schneiden, daß aber die in Σ als Scheitel vereinigten homologen Strahlbüschel keinen sich selbst homologen Strahl haben. Zunächst ist aus § 4. Lehrsatz 2. klar, daß die mit ihren Scheiteln in Σ vereinigten Strahlbüschel einstimmig verlaufen müssen, da sie sonst mit zwei homologen Strahlen zusammenfielen. Damit aber nicht, was doch auch bei einstimmig verlaufenden Strahlbüscheln vorkommen kann, ein oder zwei Paar homologer Strahlen zusammenfallen, setze man fest, daß einer der von Σ ausgehenden Strahlen, z. B. $\mathfrak{b}_1$ derjenige Strahl sei, dessen Abstand von einem der Schenkel des

rechten Winkels im Strahlbüschel Σ gleich dem Abstande des homologen Strahls von dem nicht entsprechenden Schenkel des entsprechenden rechten Winkels im Strahlbüschel Σ' sei. Man stelle sich also unter $\mathfrak{b}_1$ den in § 3. Lehrsatz 9. mit g bezeichneten Strahl vor, nehme ferner einen Strahl r willkürlich als einen der Schenkel des rechten Winkels im Büschel Σ an, unter dem man sich also den Strahl s des § 3. Lehrsatz 9. vorzustellen hat, und trage nach der anderen Seite von $\mathfrak{b}_1$ einen beliebigen Winkel $\mathfrak{b}'_1 p'$, nur $< \angle \mathfrak{b}_1 r$, denke sich unter p′ das frühere t′ und mache in dem Winkelraume rp′ den Winkel $p'\mathfrak{b}'_1 = r\mathfrak{b}$; so hat man sich unter $\mathfrak{b}'_1$ das frühere g′ zu denken. Es ist also jetzt nach § 4. Lehrsatz 2. α) c) und § 3. Lehrsatz 12. der dem Strahlbüschel $\Sigma, r\mathfrak{b}_1 p \ldots$ homologe Strahlbüschel $\Sigma', r'\mathfrak{b}'_1 p' \ldots$ der Art bestimmt, daß in der That kein Paar homologer Strahlen zusammenfallen kann. Man wähle nun eine beliebige, nur nicht durch Σ gehende Gerade s′ als der Geraden s homolog, und bestimme ihre Durchschnittspunkte $(s'.r')$, $(s'\cdot\mathfrak{b}'_1)$, $(s'\cdot p')$ oder R′, B′, P′; so sind diese also homolog den Punkten $(s.r)$, $(s\cdot\mathfrak{b}_1)$, $(s\cdot p)$ oder R, B, P auf s. Es kommt also darauf an, die den auf s liegenden Punkten A, E, C, D homologen auf s′ liegenden zu finden. Zu dem Ende ziehe man $(P-P')$ oder $\mathfrak{p}$, $(R-R')$ oder $\mathfrak{r}$; den Punkt $(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{p})$ nenne man M. Nun ziehe man $(M-R)$, $(M-A)$, $(M-B)$, $(M-E)$, $(M-C)$, $(M-D)$, oder bezüglich $\mathfrak{r}$, v_1, w_1, z_1, x_1, y_1, und ziehe durch P′ eine beliebige Gerade $\mathfrak{u}$, bestimme den Durchschnittspunkt $(\mathfrak{u}\cdot w_1)$ oder W_1, ziehe sodann (W_1-B'), die den Strahl $\mathfrak{r}$ in N schneidet und ziehe von N aus die Strahlen v'_1, w'_1, z'_1, x'_1, y'_1 nach den Durchschnittspunkten V_1, W_1, Z_1, X_1, Y_1 der Strahlen v_1, w_1, z_1, x_1, y_1 mit $\mathfrak{u}$, so ist Strahlbüschel $M,\mathfrak{r}x_1w_1z_1x_1y_1 \;\overline{\wedge}$ Punktreihe $s,RABECD$, aber auch Strahlbüschel $N,\mathfrak{r}v'_1w'_1z'_1x'_1y'_1 \;\overline{\wedge}$ Strahlbüschel $M,\mathfrak{r}v_1w_1z_1x_1y_1$, also auch Strahlbüschel $N,\mathfrak{r}v'_1w'_1z'_1x'_1y'_1 \;\overline{\wedge}$ Punktreihe $s,RABECD$. Schneiden nun v'_1, z'_1, x'_1, y'_1 die s′ bezüglich in A′, E′, C′, D′, so ist auch Punktreihe $s',A'B'E'C'D' \;\overline{\wedge}\; s,ABECD$. Man hat also jetzt auch die Strahlen a′, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{c}'_1$, d′, und könnte ebenso auch $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{c}_2$ finden. Man kann aber auch so verfahren: da $\mathfrak{f}$ durch den Punkt E der s geht, muß $\mathfrak{f}'$ durch den Punkt E′ der s′ gehen. Es werde also eine beliebige durch E′ gehende Gerade als $\mathfrak{f}'$ angenommen, so hat man also auch $\mathcal{A}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}'$, in $(\mathfrak{f}'\cdot a')$, $(\mathfrak{f}'\cdot s')$, $(\mathfrak{f}'\cdot d')$. Da nun A und $\mathcal{A}$ auf a, D und $\mathcal{D}$ auf d liegen, und beide sich in Σ schneiden, hier aber auch a′ und d′ sich schneiden sollen, so muß der Durchschnitt von $(\Sigma-A')$ mit $\mathfrak{f}'$ der Punkt $\mathcal{A}'$, der Durchschnitt von $(\Sigma-D')$ der Punkt $\mathcal{D}'$ sein. Man ziehe nun $(\mathcal{D}-\mathcal{D}')$ und $(\mathcal{E}-\mathcal{E}')$, die sich in $\mathcal{M}$ schneiden und ziehe $(\mathcal{M}-\mathcal{A})$, $(\mathcal{M}-\mathcal{B})$, $(\mathcal{M}-\mathcal{E})$, $(\mathcal{M}-\mathcal{C})$, $(\mathcal{M}-\mathcal{D})$ oder v_2, w_2, z_2, x_2, y_2 und lege durch $\mathcal{E}$ eine beliebige Gerade $\mathfrak{v}$, die von diesen Strahlen bezüglich in V_2, W_2, Z_2, X_2 Y_2 geschnitten wird, so wird $\mathfrak{v},V_2W_2Z_2X_2Y_2 \;\overline{\wedge}\; \mathcal{M},v_2w_2z_2x_2y_2 \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{f},\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{D}$. Man verbinde nun V_2 mit $\mathcal{A}'$ durch eine Gerade v'_2, die den Strahl y_2 in $\mathcal{N}$ schneidet und ziehe $(\mathcal{N}-V_2)$,

$(\mathfrak{N}-W_2)$, $(\mathfrak{N}-Z_2)$, $(\mathfrak{N}-X_2)$, $(\mathfrak{N}-Y_2)$ oder $v'_2w'_2z'_2x'_2y_2$, so ist Strahlbüschel $\mathfrak{N},v'_2w'_2z'_2x'_2y_2 \,\overline{\wedge}\, \mathfrak{M},x_2w_2z_2x_2y_2 \,\overline{\wedge}\, \mathfrak{s},\mathfrak{ABECD}$. Schneidet nun w'_2 die $\mathfrak{s}'$ in $\mathfrak{B}'$, x'_2 die $\mathfrak{s}'$ in $\mathfrak{C}'$, so ist auch Punktreihe $\mathfrak{s}',\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}' \,\overline{\wedge}\, \mathfrak{s},\mathfrak{ABECD}$. Es ist also das zweite System vollständig bestimmt. Demnach ist $(B'-\mathfrak{B}')$ die der Geraden $(B-\mathfrak{B})$ oder b homologe b', $(C'-\mathfrak{C}')$, die der Geraden $(C-\mathfrak{C})$ oder c homologe Gerade c'. Es sind also a', b', c', d' die Seiten des gesuchten Vierseits und somit ist die Aufgabe gelöst. Will man wissen, wo die beiden Systemen gemeinsame Gerade liegt, so wende man dasselbe Verfahren an, welches gebraucht ward, den Lehrsatz 30. in § 7. zu beweisen (vergl. Fig. 76 b).

10. Aufgabe. Gegeben ein ebenes System I. und in demselben ein Viereck ABCD; gesucht ein dem gegebenen collineares System II. in derselben Ebene und von solcher Lage, daß das dem Viereck ABCD homologe Viereck A'B'C'D' mit der Seite (A'−D') oder σ' auf die Seite (A−D) oder σ fällt, und daß in der gemeinsamen Geraden σ ein Paar homologer Punkte A und A', außer diesem aber kein zweites, zusammenfällt.

Auflösung. Man verzeichne das Viereck ABCD, nehme, wie bei Aufgabe 8., zwei beliebige Punkte S und $\mathfrak{s}$ an, und construire die Strahlbüschel S,abecd, $\mathfrak{s},\mathfrak{abecd}$. Da nun auf σ außer A und A' kein Paar homologer Punkte zusamenfallen soll, so nehme man A (oder A') als den Punkt G (in § 3. Lehrsatz 9) an, trage nach links und rechts die Strecken $AR = AP'$, übrigens beliebig groß, ab, und sehe R und P' als die Gegenpunkte (O und Q' in § 3. Lehrsatz 9.) an. Indem man sich dieß System aus Strahlbüscheln S,abecd; $\mathfrak{s},\mathfrak{abecd}$ erzeugt denkt, ziehe man (S−R) und durch S den Strahl p parallel σ; ferner nehme man einen beliebigen Punkt S' als dem S homolog an, ziehe (S'−A), welches der dem a homologe Strahl a' sein muß, und ziehe ferner (S'−P') oder p' und durch S' den Strahl r' parallel σ. Man verbinde ferner die Durchschnittspunkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ von bezüglich p und p', r und r', durch die Gerade m, so daß (wenn gleichbezeichnete Punkte und Gerade gleiche Bedeutung haben wie in Aufgabe 8) Punktreihe $m,V_1W_1Z_1X_1Y_1 \,\overline{\wedge}$ Strahlbüschel S,abecd wird, ziehe von V_1 eine Gerade durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ der p', die den Strahl a' in V'_1 trifft, verbinde V'_1 mit $\mathfrak{R}$ durch die Gerade n und projicire die Punktreihe $m,V_1W_1Z_1X_1Y_1$ auf n, so daß die Punktreihe $n,V'_1W'_1Z'_1X'_1Y'_1$ entsteht, und ziehe $(S'-W'_1)$, $(S'-Z'_1)$, $(S'-X'_1)$, $(S'-Y'_1)$, so sind dieß die Strahlen b' e' c' d' und $(\sigma \cdot b')$, $(\sigma \cdot e')$, $(\sigma \cdot c')$, $(\sigma \cdot d')$ bezüglich die Punkte $\mathfrak{B}'_1$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{C}'_1$, D'. Denn es ist Strahlbüschel $S',a'b'e'c'd'p'r' \,\overline{\wedge}$ Punktreihe $n,V'_1W'_1Z'_1X'_1Y'_1U\mathfrak{R}$ (wenn U der Durchschnittspunkt von n mit p' ist) $\overline{\wedge}$ Punktreihe $m,V_1W_1Z_1X_1Y_1\mathfrak{P}\mathfrak{R} \,\overline{\wedge}$ Strahlbüschel S,abecdpr. Auf e' nehme man willkürlich $\mathfrak{s}'$ an, so sind $(\mathfrak{s}'-A')$ oder $(\mathfrak{s}'-A)$, $(\mathfrak{s}'-\mathfrak{E}')$, $(\mathfrak{s}'-D')$ be-

züglich die Strahlen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{d}'$, die übrigen, $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ bestimme man, wie bei der Auflösung der Aufgabe 8.

11. **Aufgabe.** Gegeben ein ebenes System I., und in demselben ein Viereck ABCD; gesucht ein dem gegebenen collineares System II. in derselben Ebene und von solcher Lage, daß das dem Viereck ABCD homologe Viereck A'B'C'D' mit der Seite (A'−D') oder σ' auf die Seite (A−D) oder σ fällt, ohne daß auf der gemeinsamen Geraden σ ein Paar homologer Punkte vereinigt sind; es sollen aber die Eckpunkte B und B' außerhalb σ zusammenfallen.

Auflösung. Man nehme wieder, wie bei Auflösung der Aufgabe 8., $\mathfrak{W}_1$ auf σ als den Punkt G an, nehme beiderseits von $\mathfrak{W}_1$ zwei Punkte R und P' beliebig, nur so daß $RP' < 2R\mathfrak{W}_1$, also $P'\mathfrak{W}_1 < R\mathfrak{W}_1$ ist, mache $P'\mathfrak{W}'_1 = R\mathfrak{W}_1$, und sehe $\mathfrak{W}'_1$ als den dem Punkt $\mathfrak{W}_1$ homologen an. Der Punkt S' kann hier nicht mehr so ganz beliebig gewählt werden. Denn, da B ein gemeinschaftlicher Punkt beider Systeme sein soll, $\mathfrak{W}'_1$ dem $\mathfrak{W}_1$, also $(B-\mathfrak{W}'_1)$ der Geraden $(B-\mathfrak{W}_1)$ homolog ist, und S auf $(B-\mathfrak{W}_1)$ liegt, so muß S' auf $(B-\mathfrak{W}'_1)$ angenommen werden; im Uebrigen aber ist es beliebig, welchen Punkt der $(B-\mathfrak{W}'_1)$ man als S' wählt. Nun verfahre man, um die Strahlen a', e', c', d' zu bestimmen, wie in Aufgabe 8. Da $\mathfrak{s}$ auf e liegt, muß auch $\mathfrak{s}'$ auf e' sich befinden, da aber $\mathfrak{b}'_1$ jetzt durch B gehen muß und durch diesen Strahl der Punkt $\mathfrak{W}'_2$ auf σ angegeben wird, so folgt, daß $\mathfrak{s}'$ nicht, wie früher, beliebig angenommen werden darf, indem es sonst vorkommen könnte, daß der Punkt $\mathfrak{W}'_2$, den man erhält, wenn man den Durchschnitt von (A'−D') mit $(\mathfrak{s}'-B)$ sucht, nicht der Forderung: Punktreihe $\sigma, \mathfrak{W}'_2 A'\mathfrak{E}D' \,\overline{\wedge}\, \sigma, \mathfrak{W}_2 A\mathfrak{E}D$ genügte, wie es doch in collinearen Systemen sein muß. Um zu bewirken, daß dieß statt habe, ziehe man $(S-\mathfrak{W}_2)$ oder b_1, welche die Gerade m in W_3 schneidet, projicire W_3 auf n nach W'_3 und ziehe $(S'-W'_3)$ oder b'_1, so ist diese Gerade homolog b_1 und also der so gefundene Punkt $(b'_1 \cdot \sigma)$ der dem Punkt $\mathfrak{W}_2$ homologe $\mathfrak{W}'_2$. Nun ziehe man $(\mathfrak{W}'_2-B)$, die den Strahl e' schneidet. Dieser Durchschnittspunkt der $(\mathfrak{W}'_2-B)$ mit e' muß der Punkt $\mathfrak{s}'$ sein. Von dem Strahlbüschel $\mathfrak{s}', \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{e}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ kennt man jetzt $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{d}'$. Um auch noch $\mathfrak{c}'$ zu finden, ziehe man (Y_2-Z_2) oder $\mathfrak{w}$, wenn Y_2 der Durchschnitt $(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{d}')$, Z_2 der Durchschnitt $(\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{e}')$ ist, so daß die Punktreihe $\mathfrak{w}, V_2 W_2 Z_2 X_2 Y_2 \,\overline{\wedge}\,$ Strahlbüschel $\mathfrak{s}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{e}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ entsteht. Auf $\mathfrak{e}'$ nehme man einen beliebigen Punkt $\mathfrak{Y}$ an und ziehe Strahlen durch die Punkte V_2, W_2, Z_2, X_2, Y_2. Schneidet nun $(\mathfrak{Y}-W_2)$ den Strahl $\mathfrak{b}'$ in W'_2 (man hätte auch wie bei Aufgabe 8. den Durchschnittspunkt von $(\mathfrak{Y}-V_2)$ mit $\mathfrak{a}'$ anwenden können), so ziehe man (W'_2-Y_2) oder $\mathfrak{u}$ und projicire von $\mathfrak{Y}$ aus V_2, W_2, Z_2, X_2, Y_2 auf $\mathfrak{u}$ nach V'_2, W'_2, Z'_2, X'_2, Y_2, und ziehe $(\mathfrak{s}'-X'_2)$, so ist dieses der gesuchte Strahl $\mathfrak{c}'$, und also ist die Aufgabe gelöst.

12. **Aufgabe.** Gegeben ein ebenes System I. und in demselben ein Viereck ABCD; gesucht ein dem gegebenen collineares System II. in derselben Ebene und von solcher Lage, daß das dem Viereck ABCD homologe Viereck A′B′C′D′ mit der Seite (A′—D′) oder σ' auf die Seite (A—D) oder σ, und mit der Seite (A′—B′) oder τ' auf die Seite (A—B) oder τ, und zugleich mit dem Punkt $(\sigma' \cdot \tau')$ oder A′ auf den Punkt $(\sigma \cdot \tau)$ oder A, und mit dem Punkt D′ auf den Punkt D fällt.

Auflösung. Nehmen wir an, daß auf σ die Aufeinanderfolge der homologen Punkte einstimmig sein soll (nach § 4. Lehrsatz 2. β) könnte sie, da auf σ zwei Punkte sich selbst homolog sein sollen, auch entgegengesetzt sein), so trage man auf σ eine beliebige Strecke AR links von A und DP′ = AR rechts von D auf, nach § 4. Lehrsatz 2. α) a), ferner trage man auf τ nach beiden Seiten von A die übrigens beliebige Strecke $A\mathfrak{K} = A\mathfrak{P}'$ ab nach § 4. Lehrsatz 2. α) b), ziehe $(S-\mathfrak{K})$, welche die σ in P schneidet, ferner ziehe man durch S eine Parallele zu (A—B) oder τ, und bezeichne ihren Durchschnitt mit σ durch Π, durch P ziehe man weiter eine ebenfalls zu (A—B) oder τ parallele Gerade und dann $(\Pi-\mathfrak{P}')$, welche diese durch P zu τ parallel gezogene Gerade in Σ schneidet, und ziehe $(\Sigma-R)$, welche die τ in $\mathfrak{K}'$ trifft, lege durch $\mathfrak{K}'$ eine zu (A—D) oder σ parallele Gerade und schneide dieselbe mittelst der Verbindungsgeraden $(\Sigma-D)$ in S′, so ist dieser Punkt dem Punkt S des Systems I. homolog. Denn zieht man $(S'-\mathfrak{P}')$, welche die σ in Π' schneidet und bezeichnet $(S-\mathfrak{K})$ durch $\mathfrak{r}$, (S—R) durch r, (S—A) durch a, (S—D) durch d, $(S-\Pi)$ durch $\mathfrak{p}$, eine durch S′ parallel zu τ gezogene Gerade, welche die σ in P′ schneidet, durch $\mathfrak{r}'$, $(S'-\mathfrak{K}')$ durch r′, (S′—A) durch a′, (S′—D) durch d′, $(S'-\Pi')$ durch $\mathfrak{p}'$, $(\Sigma-P)$ durch $\mathfrak{r}_1$, $(\Sigma-R)$ durch r_1, (S—A) durch a_1, $(\Sigma-D)$ durch d_1, welches also dieselbe Gerade bezeichnet, wie d′, $(\Sigma-\mathfrak{P}')$ durch $\mathfrak{p}_1$, so ist Strahlbüschel $\Sigma,\mathfrak{r}_1 r_1 a_1 d_1 \mathfrak{p}_1$ perspectivisch mit Strahlbüschel $S,\mathfrak{r} r a d \mathfrak{p}$ für σ als Axe, also Strahlbüschel $\Sigma,\mathfrak{r}_1 r_1 a_1 d_1 \mathfrak{p}_1 \overline{\wedge} S,\mathfrak{r} r a d \mathfrak{p}$. Zugleich ist Strahlbüschel $\Sigma,\mathfrak{r}_1 r_1 a_1 d_1 \mathfrak{p}_1$ perspectivisch mit Strahlbüschel $S',\mathfrak{r}' r' a' d' \mathfrak{p}'$ für τ als Axe, also Strahlbüschel $\Sigma,\mathfrak{r}_1 r_1 a_1 d_1 \mathfrak{p}_1 \overline{\wedge} S',\mathfrak{r}' r' a' d' \mathfrak{p}'$; folglich Strahlbüschel $S',\mathfrak{r}' r' a' d' \mathfrak{p}' \overline{\wedge} S,\mathfrak{r} r a d \mathfrak{p}$ und also Punktreihe $\sigma, P' \infty A D \Pi' \overline{\wedge} \sigma, P R A D \Pi$ und Punktreihe $\tau, \infty \mathfrak{K}' A Y' \mathfrak{P}' \overline{\wedge} \tau, \mathfrak{K} \mathfrak{K}_1 A Y \infty$, wenn Y′ der Durchschnittspunkt $(d' \cdot \tau)$, Y der Punkt $(d \cdot \tau)$, $\mathfrak{K}_1$ der Punkt $(r \cdot \tau)$ ist. Es ist also R der eine Gegenpunkt der auf σ vereinigten Punktreihen, P′ der andere; und in der That geht, wenn man durch Σ eine Parallele p zu σ zieht, welche die τ in $\mathfrak{P}$ trifft, und $\mathfrak{P}$ mit S′ durch die Gerade $(S'-\mathfrak{P})$ verbindet, diese letztere durch P′. Denn in den Dreiecken $\mathfrak{K}'RA$ und $\mathfrak{K}'\Sigma\mathfrak{P}$ verhält sich $\mathfrak{K}'A : \mathfrak{K}'\mathfrak{P} = RA : \Sigma\mathfrak{P}$; schnitte nun $(S'-\mathfrak{P})$ die σ in einem von P′ verschiedenen Punkte P″, so verhielte sich in den Dreiecken $\mathfrak{P}AP''$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{K}'S' : \mathfrak{K}'A : \mathfrak{K}'\mathfrak{P} = S'P'' : S'\mathfrak{P} = DP'' : \Sigma\mathfrak{P}$. Es müßte also sich verhalten $RA : \Sigma\mathfrak{P} = DP'' : \Sigma\mathfrak{P}$ oder es müßte

sein $RA = DP''$; nun ist aber nach der Construction schon $DP' = RA$, also muß P'' mit P' zusammenfallen. Die übrigen Punkte auf σ, z. B. $\mathfrak{S}'_1$, und Strahlen an S' finden sich nun folgendermaßen: Es soll die Construction nur für die Auffindnng von $\mathfrak{S}'_1$ gezeigt werden. Man ziehe $(\Sigma - \mathfrak{S}_1)$ oder c_1, welche die τ in Γ trifft, so ist Strahlbüschel $\Sigma, \mathfrak{r}_1 r_1 c_1 d_1 p_1$ perspectivisch mit Strahlbüschel $S, \mathfrak{r} r c d p$ für σ als Axe; zugleich ist auch Strahlbüschel $\Sigma, \mathfrak{r}_1 r_1 c_1 d_1 p_1$ perspectivisch mit Strahlbüschel $S', \mathfrak{r}' r' c' d' p'$ für τ als Axe, wenn c' die Verbindungsgerade von S' mit $(c_1 \cdot \tau)$ oder Γ ist, folglich Strahlbüschel $S, \mathfrak{r} r c d p$ $\overline{\wedge}$ $S', \mathfrak{r}' r' c' d' p'$, und also Punktreihe $\sigma, P R \mathfrak{S}_1 D \Pi \;\overline{\wedge}\; \sigma, P' \infty \mathfrak{S}'_1 D \Pi'$, wenn mit $\mathfrak{S}'_1$ der Punkt $(c' \cdot \sigma)$ bezeichnet wird. Es ist daher $\mathfrak{S}'_1$ der dem Pnnkt $\mathfrak{S}_1$ homologe. Auf gleiche Weise finden sich auch die übrigen Punkte und Strahlen $\mathfrak{B}'_1$ und b', $\mathfrak{B}'_2$ und b'_1, $\mathcal{E}'$ und e' (oder $\mathfrak{e}'$), $\mathfrak{S}'_2$ und c'_2, wenn mit c_2 diejenige Gerade des ersten Systems bezeichnet wird, die S mit $\mathfrak{S}_2$ verbindet. Der Durchschnittspunkt B' des Strahls b' mit τ ist nun dem Punkt B homolog. Hat man nun den dem Punkt $\mathfrak{B}_2$ auf σ homologen Punkt $\mathfrak{B}'_2$ (ebenso wie $\mathfrak{S}'_1$) gefunden, so ist $(\mathfrak{B}'_2 - B')$ homolog $(\mathfrak{B}_2 - B)$ oder $\mathfrak{b}$, es ist also $(\mathfrak{B}'_2 - B')$ der Strahl $\mathfrak{b}'$, der Durchschnitt von $\mathfrak{b}'$ mit $\mathfrak{e}'$ ist der Punkt $\mathfrak{s}'$, $(\mathfrak{s}' - A)$ ist der Strahl α', $(\mathfrak{s}' - D)$ ist δ', $(\mathfrak{s}' - \mathfrak{S}'_2)$ (wenn $\mathfrak{S}'_2$ ebenso bestimmt ist wie $\mathfrak{S}'_1$) ist $\mathfrak{c}'$, mithin das System II. und das gesuchte Viereck gefunden. Daß übrigens in den bei A entstehenden, mit ihren Scheiteln auf einander fallenden homologen Strahlbüscheln $A, \sigma \alpha \tau \ldots.$ und $A, \sigma \alpha' \tau \ldots..$ außer σ und σ', τ und τ' kein Paar homologer Strahlen zusammenfallen kann, davon überzeugt man sich leicht. Denn, fiele nur noch ein Paar homologer Strahlen zusammen, so müßten nach § 4. Lehrsatz 1. alle zusammenfallen. Es lassen sich aber (vergl. Beweis zu § 7. Lehrsatz 33. Fig. 77c) jedenfalls ein Paar homologer Strahlen m und m' angeben, die, da jetzt AR nicht gleich AP' (oder in Fig. 77c. ΣR nicht gleich $\Sigma S'$) ist, nicht zusammenfallen können. Es kann dieß also auch bei keinem anderen, außer σ und τ der Fall sein.

13. Aufgabe. Gegeben ein ebenes System I., und in demselben ein Viereck $ABCD$; gesucht ein dem gegebenen collineares System II. in derselben Ebene, und von solcher Lage, daß das dem Viereck $ABCD$ homologe Viereck $A'B'C'D'$ mit drei seiner Ecken A', B', C', auf die homologen Ecken A, B, C, und mit den Geraden $(A' - D')$ oder σ', $(A' - B')$ oder τ', $(B' - D')$ oder ρ' auf die homologen Geraden $(A - D)$ oder σ, $(A - B)$ oder τ, $(B - D)$ oder ρ fällt, daß aber kein anderes Paar homologer Punkte auf diesen Geraden zusammenfällt.

Auflösung. Man nehme, wenn die vereinigten Punktreihen einstimmig verlaufen sollen, R und $\mathfrak{R}$ auf $(A - D)$ und $(A - B)$ beliebig, nur außerhalb der Strecken AD, AB an, ziehe $(S - \mathfrak{R})$, welche

die (A—D) in P trifft, lege durch P eine Parallele zu (A—B) oder τ, und schneide sie durch die Verbindungsgerade (S—B) in Σ, bestimme sodann den Durchschnittspunkt $\mathfrak{K}'$ der (Σ—R) mit τ, ziehe durch $\mathfrak{K}'$ eine Parallele zu σ, und schneide sie durch (Σ—D) in S′, so ist S′ der dem Punkt S homologe des Systems II. Denn es ist unter Beibehaltung derselben Bezeichnung, wie bei der vorigen Aufgabe wenn man noch außerdem (Σ—B) oder ($\Sigma-\mathcal{B}_1$) durch b_1 bezeichnet, Strahlbüschel $\Sigma,\mathfrak{v}_1 r_1 a_1 b_1 d_1$ perspectivisch mit Strahlbüschel $S,\mathfrak{v}rabd$ für σ als Axe, und zugleich perspectivisch mit Strahlbüschel $S',\mathfrak{v}'r'a'b'd'$ für τ als Axe, also Strahlbüschel $S',\mathfrak{v}'r'a'b'd' \,\overline{\wedge}\, S,\mathfrak{v}rabd$. Es ist also auch Punktreihe $\sigma,P'\infty A\mathcal{B}'_1 D \,\overline{\wedge}\, \sigma,PRA\mathcal{B}D$ und Punktreihe $\tau,\infty\mathfrak{K}'ABY' \,\overline{\wedge}\, \tau,\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1 ABY$. Also ist R ein Gegenpunkt der auf σ, $\mathfrak{K}$ ein Gegenpunkt der auf τ vereinigten homologen Punktreihen. Wie die übrigen Punkte der σ und Strahlen des Büschels S′ gefunden werden, soll nur an einem Punkt $\mathcal{C}'_1$ und dem zugehörigen Strahl c′ gezeigt werden. Man ziehe ($\Sigma-\mathcal{C}_1$) oder c_1, welche die τ in Γ trifft, und ($\mathcal{S}'-\Gamma$) oder c′, so ist Strahlbüschel $\Sigma,\mathfrak{v}_1 r_1 b_1 c_1 d_1$ perspectivisch mit $S,\mathfrak{v}rbcd$ für σ als Axe und zugleich perspectivisch mit $S',\mathfrak{v}'r'b'c'd'$ für τ als Axe, also auch Strahlbüschel $S',\mathfrak{v}'r'b'c'd' \,\overline{\wedge}\, S,\mathfrak{v}rbcd$, also ist c′ homolog c, und wenn man ($c'\cdot\sigma$) durch $\mathcal{C}'_1$ bezeichnet, $\mathcal{C}'_1$ homolog $\mathcal{C}_1$. Ebenso bestimmen sich die übrigen Punkte der σ und die übrigen Strahlen an S′. Da nun B ein gemeinsamer Punkt ist, so ist der Durchschnittspunkt von ($\mathcal{B}'_2$—B) oder $\mathcal{b}'$ mit e′ (oder $\mathcal{e}'$) der Punkt $\mathcal{S}'$, ($\mathcal{S}'$—A) ist α', ($\mathcal{S}'$—B) ist $\mathcal{b}'$, ($\mathcal{S}'-\mathcal{C}'_2$) ist $\mathcal{c}'$, ($\mathcal{S}'$—D) ist $\mathcal{d}'$. Es ist also das zweite System vollständig bestimmt, und somit auch das gesuchte Viereck A′B′C′D′ gefunden, und auf σ, τ, ρ sind homologe Punktreihen, und in A, B, D homologe Punkte vereinigt.

Man sieht, wie die Anzahl der möglichen Auflösungen immer kleiner wird, je mehr Elemente zusammenfallen sollen. Sollten alle vier Punkte A, B, C, D und A′, B′, C′, D′, und also auch alle vier Seiten (A—B), (B—C), (C—D), (D—A) und (A′—B′), (B′—C′), (C′—D′), (D′—A′) zusammenfallen, so gäbe es nur eine Lösung, das System II. müßte dann dem System I. völlig congruent sein und sich mit ihm decken, nach § 7. Lehrsatz 17. Sollten fünf Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, oder fünf Gerade, von denen keine drei durch einen Punkt gingen, zusammenfallen, so müßte dies entweder schon in dem vorigen Falle eintreten, wo die Systeme congruent sind, oder die Lösung ist unmöglich.

Ein besonders bemerkenswerther Umstand tritt dann ein, wenn zwei Systeme drei Punkte und drei Punktreihen gemein haben, und von den Punktreihen, oder von den gemeinsamen Strahlbüscheln, deren Scheitel in den drei sich selbst homologen Punkte liegen, zwei involutorisch (s. § 4. Erklärung 4) liegen. Es seien zunächst α) Fig. 97. a. A, B, C oder A′, B′, C′ die drei sich selbst homologen Punkte, a, b, c, oder a′, b′, c′ die sich selbst homologen Geraden, und zwar sollen die auf b oder b′, und c oder c′ vereinigten homologen Punktreihen mit

ihren Gegenpunkten auf einander fallen, also nach § 4. Erklärung 4. involutorisch liegen. Da dieß mit zwei Punktreihen b und c der Fall ist, der Durchschnittspunkt (b · c) oder A oder A′ also sowohl in den auf b als in den auf c vereinigten Punktreihen ein sich selbst homologer, oder ein Hauptpunkt der Involution (s. § 4. Erklärung 3.) ist, einstimmig verlaufende involutorische Punktreihen aber nie einen Hauptpunkt haben können nach § 4. Lehrsatz 7.; so folgt, daß sie entgegengesetzt verlaufen und also nach demselben Lehrsatz noch einen Hauptpunkt haben und zwar müssen dieß die Punkte B (oder B′) und C (oder C′) sein, da sie ein Paar sich selbst homologer Punkte auf b und c sind. Nach § 4. Lehrsatz 10. muß nun, wenn ein Punkt D der Geraden c im System I. auf einen Punkt E′ der auf c liegenden Geraden c′ des Systems II. fällt, der dem Punkt E′ homologe Punkt E des Systems I. mit dem Punkt D′ des Systems II. zusammenfallen. Ebenso muß, wenn auf b ein Punkt F des Systems I. mit einem Punkte G′ des Systems II. zusammenfällt, auch G mit F′ zusammenfallen. Zieht man nun eine Gerade (D′ − F′) oder d′ im System II., welche die gemeinsame Gerade (B − C) oder a in K′ trifft, und zieht dann von dem dem D′ zugeordneten Punkte E′ der Involution auf c′ die Gerade (E′ − K′) oder e′, so muß diese die b′ in dem dem F′ zugeordneten Punkte G′ der Involution auf b′ treffen. Denn, da A′, B′, die Hauptpunkte auf b′ sind, so muß der dem F′ zugeordnete Punkt G′ so liegen, daß Punktreihe b′,A′F′B′G′ harmonisch ist, nach § 4. Lehrsatz 15. Heißt nun der noch unbekannte Punkt, in dem die e′ die b′ schneidet, X′, so muß im vollständigen Vierseit b′c′d′e′ auch Punktreihe b′,A′F′B′X′ harmonisch sein, nach § 3. Lehrsatz 17.; also muß X′ mit G′ zusammenfallen. Es liegt also der Durchschnittspunkt (d′ · e′) oder K′ der Geraden (D′ − F′) und (E′ − G′) auf a′. Bestimmen wir nun den dem Punkt K′ homologen, K, im System I. Vermöge der Involution auf c muß der dem Punkt D′ homologe D nach E′, vermöge der Involution auf b muß der dem Punkt F′ homologe nach G′ fallen. Es fällt also (E′ − G′) oder e′ im System II. mit der Geraden (D − F) oder d im System I. zusammen. Ebenso fällt der dem Punkt E′ homologe E nach D′, der dem Punkt G′ homologe G nach F′, es fällt also (D′ − F′) oder d′ im System II. mit der Geraden (E − G) oder e im System I. zusammen. Folglich ist der Punkt (d′ · e′) zugleich der Punkt (e · d) oder (d · e), d. h. der dem Punkt K′ homologe des ersten Systems K, fällt mit ihm zusammen, oder K (oder K′) ist ein sich selbst homologer Punkt. Da aber K auf a sich befindet, und auf dieser auch noch B und C sich selbst homologe Punkte sind, so folgt, daß beide Systeme die homologen Punktreihen a,BKC .... und a′,B′K′C′ .... mit allen Punkten gemein haben (nach § 4. Lehrsatz 1.) und also für a als Axe perspectivisch liegen, nach § 7. Erklärung 38. und Lehrsatz 26. und zwar muß der Punkt A, da er ein sich selbst homologer ist, und nicht auf der Axe liegt, das Centrum der perspectivischen Collineation sein nach § 8. Lehrsatz 3. Ist nun k ein beliebiger Collineations-

strahl, und M, z. B. der Durchschnittspunkt von (D—G) oder s mit k, irgend ein Punkt des ersten Systems, so muß nach § 8. Lehrsatz 5. auch der homologe Punkt M′ auf k sich befinden. Es muß aber M′ zugleich der Durchschnitt von (D′—G′) oder s′ mit k sein. Ist ebenso N oder der Durchschnitt von (E—F) oder t mit k ein zweiter Punkt des ersten Systems, so muß auch N′ auf k liegen, und zugleich der Durchschnitt von t′ mit k sein. Wegen der Involution der Punktreihen auf den Geraden b und c aber fällt, wenn in D der Punkt E′, in G der Punkt F′ des zweiten Systems liegt, der Punkt D′ nach E, G′ nach F. Es sind also in s die Geraden s des ersten Systems, t′ des zweiten, in t die Geraden t des ersten, s′ des zweiten Systems vereinigt. Es ist daher (k · s) oder M zugleich (k · t′) oder N′, (k · t) oder N zugleich (k · s′) oder M′; ein Gleiches findet mit allen anderen Punktpaaren des Strahls k statt. Fällt irgend ein Punkt R des Systems I. mit einem Punkte Q′ des Systems II. zusammen, so fällt Q nach R′. Es sind also auch die auf dem Collineationsstrahl k vereinigten homologen Punktreihen in involutorischer Lage nach § 4. Lehrsatz 10. Ein Gleiches gilt von jedem anderen Collineationsstrahl, und folglich muß, wenn irgend ein Punkt M des Systems I. mit einem Punkte N′ des Systems II. zusammenfällt, auch M′ mit N und wenn irgend eine Gerade s des Systems I. mit einer Geraden t′ des Systems II. zusammenfällt, auch s′ mit t zusammenfallen. Es seien β) Fig. 97b., a, b, c oder a′, b′, c′ die drei sich selbst homologen Geraden, A, B, C oder A′, B′, C′ die drei sich selbst homologen Punkte, und zwar sollen die an B oder B′ und C oder C′ als Scheiteln vereinigten Strahlbüschel mit den nicht entsprechenden Strahlen der entsprechenden rechten Winkel auf einander fallen, also nach § 4. Erklärung 4. involutorisch liegen. Es ergiebt sich durch Anwendung derselben Sätze, die bei den Punktreihen angewendet wurden, daß die involutorischen Strahlbüschel entgegengesetzt verlaufen, also zwei Hauptstrahlen haben, und a und b an B, a und c an C die Hauptstrahlen sind. Nach dem Begriffe der Involution muß, wenn ein von C ausgehender Strahl d des Systems I. mit einem Strahl e′ des Systems II. zusammenfällt, auch d′ nach e fallen; ebenso muß, wenn ein von B ausgehender Strahl f mit g′ zusammenfällt, auch f′ mit g zusammenfallen. Liegt nun ein Punkt (d′ · f′) oder D′ des Systems II. auf dem Strahl k′ des gemeinsamen Punkts (b · c) oder A, und verbindet man den Durchschnittspunkt von k′ und dem zugeordneten Strahl e′, also den Punkt (e′ · k′) oder E′ mit B durch eine Gerade x′, so muß diese der dem Strahl f′ zugeordnete harmonische Strahl g′ des Büschels B′ sein. Denn nach § 4. Lehrsatz 15. muß B′,a′f′b′g′, und nach § 3. Lehrsatz 17. im Viereck B′C′D′E′ Strahlbüschel B′,a′f′b′x′ harmonisch sein; also ist x′ mit g′ identisch. Es geht also die Verbindungsgerade (D′—E′) oder k′ der Punkte (d′ · f′) und (e′ · g′) durch A′. Bestimmen wir nun die der Geraden k′ homologe k; so muß wegen der Involution an C der dem Strahl d′ homologe d nach e′, wegen der

Involution an B der dem Strahl f′ homologe nach g fallen. Es fällt also (e′ · g′) oder E′ mit (d · f) oder D zusammen, und ebenso (d′ · f′) oder D′ mit (e · g) oder E. Also ist (D′−E′) zugleich (E−D) oder (D−E), oder k fällt mit k′ zusammen. Es ist also der Strahl k ein sich selbst homologer. Die Systeme haben also, da ein Gleiches schon mit b und c der Fall ist, einen Strahlbüschel mit allen Strahlen gemein, und liegen also für A als Centrum perspectivisch; da B und C ebenfalls ein Paar sich selbst homologe, von A verschiedene Punkte sind, so muß nach § 8. Lehrsatz 3. (B−C) oder a die Axe sein. Ist nun K ein beliebiger Collineationspunkt und m z. B. die Verbindungsgerade von (d · g) oder S mit K irgend eine Gerade des Systems I; so muß auch m′ durch K gehen und zwar die Verbindungsgerade von (d′ · g′) oder S′ mit K sein. Ist ebenso n die Verbindungsgerade von (e · f) oder T mit K, so muß auch n′ durch K gehen und die Verbindungsgerade von (e′ · f′) oder T′ mit K sein. Wegen der Involution an B und C aber fällt, wenn in d der Strahl e′, in g der Strahl f′ des zweiten Systems liegt, auch d′ nach e, g′ nach f. Es sind also in S die Punkte S des ersten und T′ des zweiten Systems vereinigt, in T die Punkte T des ersten und S′ des zweiten Systems. Es ist daher (K−S) oder m zugleich (K−T′) oder n′, und (K−T) oder n zugleich (K−S′) oder m′. Ein Gleiches findet mit allen Strahlenpaaren des Strahlbüschels K, und ebenso in allen anderen Strahlbüscheln, deren Scheitel ein Collineationspunkt ist, statt. Folglich muß, wenn irgend eine Gerade m des Systems I. mit einer Geraden n′, des Systems II. zusammenfällt, auch m′ mit n, und, wenn irgend ein Punkt S des Systems I. mit einem Punkte T′ des Systems II. zusammenfällt, auch S′ mit T zusammenfallen. Man erhält also den

14. Lehrsatz. Befinden sich zwei collineare Systeme in derselben Ebene und in solcher Lage, daß sie mit drei homologen Punkten A, B, C und drei homologen Geraden a, b, c der Art auf einander fallen, daß die auf zweien, b und c, dieser Geraden vereinigten homologen Punktreihen involutorisch liegen; so befinden sich die Systeme für (b · c) oder A als Centrum und (B−C) oder a als Axe in perspectivischer Lage und außerdem tritt der charakteristische Fall ein, daß, wenn irgend ein Punkt M

14. Lehrsatz. Befinden sich zwei collineare Systeme in derselben Ebene und in solcher Lage, daß sie mit drei homologen Geraden a, b, c und drei homologen Punkten A, B, C der Art auf einander fallen, daß die an zweien, B und C, dieser Punkte vereinigten homologen Strahlbüschel involutorisch liegen, so befinden sich die Systeme für (B−C) oder a als Axe und (b · c) oder A als Centrum in perspectivischer Lage und außerdem tritt der charakteristische Fall ein, daß, wenn irgend eine Ge-

oder irgend eine Gerade s des ersten Systems, mit bezüglich irgend einem Punkt N′ oder irgend einer Geraden t′ des zweiten Systems zusammenfällt, auch stets die homologen Elemente, der Punkt N oder die Gerade t des ersten Systems mit bezüglich dem Punkt M′ oder der Geraden s′ des zweiten Systems zusammenfallen. Fig. 97a.

rade m oder irgend ein Punkt S des ersten Systems mit bezüglich irgend einer Geraden n′ oder irgend einem Punkt T′ des zweiten Systems zusammenfällt, auch stets die homologen Elemente, die Gerade n oder der Punkt T des ersten Systems mit bezüglich der Geraden m′ oder dem Punkt S′ des zweiten Systems zusammenfallen. Fig. 97b.

Das ganz ähnliche Verhalten der Systeme in diesem Falle mit dem von Grundgebilden, die mit den Gegenpunkten oder den nicht entsprechenden Strahlen der entsprechenden rechten Winkel zusammenfallen (s. § 4. Lehrsatz 10., 11., 12.), bestimmt uns, auch diesen benannten Fall, der bei Systemen eintreten kann, mit einem ähnlichen Namen zu belegen.

15. Erklärung. Haben zwei ebene collineare Systeme eine solche Lage, daß, wenn irgend ein Punkt M des ersten mit einem Punkt N′ des zweiten zusammenfällt, allemal auch der dem ersten homologe Punkt M′ des zweiten mit dem dem zweiten homologen Punkt N des ersten zusammenfällt, und daß, wenn irgend eine Gerade m des ersten mit einer Geraden n′ des zweiten zusammenfällt, allemal auch die der ersten homologe Gerade m′ des zweiten mit der der zweiten homologen Geraden n des ersten zusammenfällt; (Fig. 97a., 97b)., so sagt man: „die Systeme liegen: **„involutorisch“**. oder: sie bilden eine **„Involution“**. Bisweilen faßt man wohl auch beide Systeme zusammen als eins auf, und nennt sie „ein involutorisches System“, worunter man sich also zwei vereinigte vorzustellen hat.

In Figur 97a. und 97b. sahen wir, daß die Systeme zugleich perspectivisch lagen; es fragt sich, ob dieß allemal bei involutorisch liegenden Systemen der Fall sein muß. Es seien also Fig. 97a. zwei Systeme involutorisch gelegen, so ist der Punkt A offenbar sich selbst homolog, da sich die Geraden (D—E) und (F—G) hier schneiden und (F′—G′) mit (D—E), (D′—E′) mit (F—G) zusammenfällt, also auch A′ in A liegt. Ebenso ist P oder der Durchschnitt von (D—G) und (E—F) sich selbst homolog, da (E′—F′) mit (D—G), (D′—G′) mit (E—F) zusammenfällt; ebenso ist K als Durchschnitt von (D—F) und (E—G) oder (E′—G′) und (D′—F′) sich selbst homolog, also (P—K) oder a eine sich selbst homologe Gerade beider Systeme.

Da nun in b und c zwei homologe Punktreihen vereinigt sind, so ist auch (b · a) und (c · a) sich selbst homolog, also sind auf a zwei Punktreihen mit allen Punkten vereinigt, und da A nicht auf a liegt, ist es das Collineationscentrum nach § 8. Lehrsatz 3. Vertauscht man die großen Buchstaben mit den kleinen, die Worte: „Punkt" mit „Gerade" und umgekehrt, „Punktreihe" mit „Strahlbüschel", „Durchschnitt" mit „Verbindungsgerade", so überzeugt man sich von demselben Gesetze an Fig. 97b. Man sieht also:

16. Lehrsatz. Liegen zwei Systeme involutorisch, so liegen sie immer auch zugleich perspectivisch.

17. Erklärung. Der Scheitel A des, beiden involutorisch liegenden Systemen, gemeinschaftlichen Strahlbüschels A,bkc.... heißt das **„Involutionscentrum"**. Jeder Strahl a, k, c des, beiden involutorisch liegenden Systemen, gemeinschaftlichen Strahlbüschels A,bkc.... heißt: **„Involutionsstrahl"**. Fig. 97a.

17. Erklärung. Die Richtung a der, beiden involutorisch liegenden Systemen, gemeinschaftlichen Punktreihe a,BKC.... heißt die **„Involutionsaxe"**. Jeder Punkt B, K, C der, beiden involutorisch liegenden Systemen, gemeinschaftlichen Punktreihe a,BKC.... heißt **„Involutionspunkt"**. Fig. 97b.

Da zwei involutorisch liegende Systeme immer zugleich perspectivisch liegen, also auf jedem Collineationsstrahl z. B. b in Fig. 97a. zwei Punkte sich selbst homolog sind, nämlich das Involutionscentrum und der auf dem Strahle liegende Involutionspunkt, da ferner auf jedem Involutionsstrahl ein Paar involutorische Punktreihen liegen nach § 4. Lehrsatz 11., so folgt, daß das Involutionscentrum und der Involutionspunkt Hauptpunkte der Involution auf diesem Involutionsstrahl sind nach § 4. Erklärung 3. Ferner ist jeder Involutionspunkt, z. B. B, Fig. 97b., der Scheitel zweier homologer Strahlbüschel, in denen zwei Strahlen sich selbst homolog sind, nämlich die Involutionsaxe und der vom Involutionspunkt durch das Centrum gehende Involutionsstrahl; da ferner nach § 4. Lehrsatz 11. an jedem Involutionspunkt ein Paar involutorische Strahlbüschel liegen, so folgt, daß die Involutionsaxe und der Involutionsstrahl Hauptstrahlen der Involution im Strahlbüschel B sind, nach § 4. Erklärung 3. Ferner verlaufen nach § 4. Lehrsatz 7. sowohl die Punktreihen (Fig. 97a.) als die Strahlbüschel (Fig. 97b.) entgegengesetzt. Man hat also den:

18. Lehrsatz. Liegen zwei ebene collineare Systeme involutorisch, so liegen auf jedem Involutionsstrahl zwei entgegengesetzt verlaufende involutorische Punktreihen, deren Hauptpunkte das In-

18. Lehrsatz. Liegen zwei ebene collineare Systeme involutorisch, so liegen an jedem Involutionspunkt zwei entgegengesetzt verlaufende involutorische Strahlbüschel, deren Hauptstrahlen die In-

volutionscentrum und der Durchschnittspunkt des Involutionsstrahls mit der Involutionsaxe ist.

volutionsaxe und die Verbindungsgerade des Involutionspunkts mit dem Involutionscentrum ist.

Nach § 4. Lehrsatz 15. wird also, da die Punktreihe z. B. AMLM' .... involutorisch ist, die Strecke MM' von A und L harmonisch getheilt, Fig. 97 a.; ebenso wird in Fig. 97 b. der Winkel mm' von a und l harmonisch getheilt; dieß gilt für jeden Involutionsstrahl und für jeden Involutionspunkt, für jedes Paar homologer Punkte und für jedes Paar homologer Gerader. Wird umgekehrt bei zwei perspectivisch liegenden collinearen Systemen die Strecke zwischen jeden zwei homologen Punkten auf jedem Collineationsstrahl vom Collineationscentrum und Collineationspunkt harmonisch getheilt, so liegen die Systeme involutorisch. Denn sind z. B. F und F' Fig. 97 a. zwei homologe Punkte, und will man denjenigen Punkt G' finden, der dem Punkt G des ersten Systems homolog ist, welcher in F' liegt, so bestimmt sich, da G' auf demselben Collineationsstrahl wie G liegen muß, und homologe Punkte homologer Gerader in collinearen Systemen conforme Punktreihen bilden müssen, die Lage des Punkts G' durch die Bedingung: Punktreihe b,AF'BG' $\overline{\wedge}$ b,AFBG. Nun liegt G in F'; es ist also b,AFBG harmonisch, da FF' nach der Voraussetzung von A und B harmonisch getheilt wird; also muß auch b,BF'AG' harmonisch sein. Der dem Punkt F' zugeordnete harmonische ist aber nach der Voraussetzung F; also muß G' mit F zusammenfallen. Fällt also G nach F' so fällt G' nach F und so überall, also liegen die Systeme involutorisch. Ebenso überzeugt man sich an Fig. 97 b., daß dasselbe statt findet, wenn bei zwei perspectivisch liegenden Systemen der von jedem Paar homologer Geraden eingeschlossene Winkel von der Collineationsaxe und dem Collineationsstrahl harmonisch getheilt wird. Also:

19. Lehrsatz. Liegen zwei ebene Systeme involutorisch, so wird die von jedem Paar homologer Punkte auf irgend einem Involutionsstrahl begrenzte Strecke vom Involutionscentrum und dem Durchschnittspunkt des Involutionsstrahles mit der Involutionsaxe harmonisch getheilt und umgekehrt:

19. Lehrsatz. Liegen zwei ebene Systeme involutorisch, so wird der von jedem Paar homologer Gerader an irgend einem Involutionspunkt eingeschlossene Winkel von der Involutionsaxe und der Verbindungsgeraden des Involutionspunkts mit dem Involutionscentrum harmonisch getheilt und umgekehrt:

20. Lehrsatz. Liegen zwei collineare Systeme perspectivisch, und wird die von irgend einem Paar homologer

20. Lehrsatz. Liegen zwei collineare Systeme perspectivisch, und wird der von irgend einem Paar homolo-

Punkte begrenzte Strecke vom Collineationscentrum und dem Durchschnittspunkt des Collineationsstrahls mit der Collineationsaxe harmonisch getheilt, und findet dieß auf allen Collineationsstrahlen statt, so liegen die Systeme zugleich involutorisch.

ger Gerader eingeschlossene Winkel von der Collineationsaxe und der Verbindungsgeraden des Collineationspunkts mit dem Collineationscentrum harmonisch getheilt, und findet dieß an allen Collineationspunkten statt, so liegen die Systeme zugleich involutorisch.

Dieser Satz führt zugleich zur Lösung der

21. Aufgabe. Zwei collineare involutorisch liegende ebene Systeme zu construiren.

Auflösung. α) Man ziehe zwei beliebige, sich in A schneidende Gerade b, c und nehme auf ihnen je einen Punkt B und C willkürlich an, und ziehe (B—C), Fig. 97a. Nun nehme man auf c einen beliebigen Punkt D an, und bestimme einen Punkt D′ so, daß Punktreihe c,ADCD′ harmonisch ist. Dann nehme man auf c noch einen Punkt, z. B. Q an, und bestimme Q′ so, daß c,AQCQ′ harmonisch ist, ebenso mache man z. B. c,ARCR′, c,ASCS′ etc. harmonisch, so ist nach § 4. Lehrsatz 17. Punktreihe c,ADQRCR′Q′D′ involutorisch, ebenso c,ADQSCS′Q′D′, desgleichen c,AQRSCS′R′Q′ etc. d. h. es ist c,ADQRCR′Q′D′ $\overline{\wedge}$ c,AD′Q′R′CRQD; c,ADQSCS′Q′D′ $\overline{\wedge}$ c,AD′Q′S′CSQD; c,AQRSCS′R′Q′ $\overline{\wedge}$ c,AQ′R′S′C′SRQ etc.; also auch nach § 2. Lehrsatz 11. und Lehrsatz 12. c,ADQRSCS′R′Q′D′ $\overline{\wedge}$ c,AD′Q′R′S′CSRQD etc. Man erhält also auf diese Weise auf c zwei involutorisch liegende Punktreihen. Dieselbe Construction wende man auf den Strahl b an; nun nehme man in D einen Punkt E′ des zweiten Systems, und den ihm homologen E des ersten in D′ an etc., ebenso bei der Punktreihe auf b; ziehe (D—F), (D—G), (E—G) etc., so erhält man zwei involutorisch liegende Systeme nach Lehrsatz 14. und Erklärung 15.

Auflösung. β) Man nehme zwei beliebige, auf a liegende Punkte B, C an Fig. 97b., und verfahre mit Geraden und Strahlbüscheln wie in Auflösung α) mit Punkten und Punktreihen.

Sind nun ferner ein Paar Systeme in involutorischer Lage für das Involutionscentrum Σ, und die Involutionsaxe σ, Fig. 98. und ist auf einem Involutionsstrahl α der Punkt M der Gegenpunkt des ersten Systems, so ist der ihm homologe Punkt des zweiten Systems, in ∞. Nach Lehrsatz 19. muß nun, wenn A der auf dem Involutionsstrahl α liegende Involutionspunkt ist, Punktreihe α,ΣMA∞ harmonisch, also $\frac{\Sigma M}{AM} = 1$, also $\Sigma M = AM$ sein und folglich muß, da involutorische Systeme nach Lehrsatz 18. und § 8. Erklärung 7. sich in entgegengesetzt perspectivischer Lage befinden und nach § 8. Lehrsatz 12.

die Gegenaxen zwischen Σ und σ liegen, M die Mitte von ΣA sein; und nach § 8. Lehrsatz 11 muß, da $\Sigma M = AN'$ ist, wenn N′ den Durchschnittspunkt der Gegenaxen des zweiten Systems mit α bedeutet, N′ ebenfalls in die Mitte von ΣA, und mit M zusammen fallen. Da nun beide Gegenaxen parallel der Involutionsaxe sind nach § 8. Lehrsatz 10.; und beide durch den Mittelpunkt von ΣA gehen, so müssen sie zusammenfallen. Es geht also auf jedem Involutionsstrahl die gemeinsame Gegenaxe durch den Mittelpunkt der von den Hauptpunkten der involutorischen Punktreihen eingeschlossenen Strecke, also nach § 4. Erklärung 5. durch den Centralpunkt der auf jedem Involutionsstrahl statt habenden Involution. Fallen umgekehrt in zwei perspectivisch liegenden Systemen die Gegenaxen zusammen, so folgt aus § 8. Lehrsatz 10., daß sie in entgegengesetzt perspectivischer Lage sein müssen, und aus § 8. Lehrsatz 12., daß die Gegenaxen zwischen Σ und σ liegen, und sodann aus § 8. Lehrsatz 10., daß die gemeinsame Gegenaxe die Strecken ΣA, ΣB etc. halbiren muß. Sind nun A und A′ irgend ein Paar homologer Punkte der beiden Systeme, so muß also sein Punktreihe $\sigma, \Sigma MAA \,\overline{\wedge}\, \sigma, \Sigma\infty A'A$; also nach § 2. Erklärung 5. und § 1. Lehrsatz 9. $\frac{\Sigma A}{AA} : \frac{\Sigma M}{AM} = \frac{\Sigma A'}{AA'} : \frac{\Sigma \infty}{A\infty}$ oder $\frac{\Sigma A}{AA} : \frac{\Sigma M}{AM} = \frac{\Sigma A'}{AA'}$; oder, da $\frac{\Sigma M}{AM} = 1$ ist, weil M die Mitte von ΣA ist: $\frac{\Sigma A}{AA} = \frac{\Sigma A'}{AA'}$. Es wird also die Strecke AA′ von Σ und A harmonisch getheilt; und ebenso jede andere von zwei homologen Punkten eingeschlossene. Nach Lehrsatz 20. sind also die Systeme in Involutionslage. Man erhält also die Sätze:

22. Lehrsatz. Liegen zwei ebene Systeme involutorisch, so fallen beide Gegenaxen zusammen, und gehen durch die Mittelpunkte der vom Involutionscentrum und den Involutionspunkten auf allen Involutionsstrahlen gebildeten Strecken, d. h. durch die Centralpunkte der auf allen Involutionsstrahlen involutorisch liegenden homologen Punktreihen Fig. 98. und umgekehrt.

23. Lehrsatz. Fallen in zwei perspectivisch liegenden ebenen Systemen die Gegenaxen zusammen, so liegen die Systeme zugleich involutorisch.

Fallen also, wenn man ebene collineare Systeme nach der Methode, die in § 8. Aufgabe 16. Auflösung angegeben ist, in perspectivische Lage bringt, die Gegenaxen im Endlichen*) zusammen, so liegen die

*) Denn lägen beide Gegenaxen im Unendlichen, so wären die Systeme perspectivisch ähnlich.

Systeme zugleich involutorisch. — Endlich ergiebt sich aus Fig. 97a. und 97b.; daß in zwei involutorischen Systemen, wenn man zwei Paar homologer Punkte D, D′; F, F′ wechselseitig verbindet, auch der Durchschnittspunkt K der Verbindungsgeraden der nicht homologen Punkte auf der Involutionsaxe liegen muß. Liegt umgekehrt in zwei perspectivisch liegenden Systemen auch der Durchschnittspunkt K der Verbindungsgeraden (D—F), (D′—F′) auf der Collineationsaxe, so folgt nach § 3. Lehrsatz 17., daß Punktreihe b,AFBF′; c,ADCD′ harmonisch ist. Tritt also der Fall, daß der Durchschnittspunkt der Verbindungsgeraden zweier nicht homologen Punkte auf der Collineationsaxe liegt, auf allen Collineationsstrahlen ein, so folgt aus Lehrsatz 20., daß die Systeme involutorisch liegen. Ganz analoge Schlüsse lassen sich an Fig. 97b. machen, so daß man sagen kann:

24. Lehrsatz. Verbindet man in zwei involutorisch liegenden ebenen Systemen zwei Paar homologe Punkte durch sechs Gerade, so liegt auch der Durchschnittspunkt der Geraden, welche die nicht homologen Punkte verbinden, auf der Involutionsaxe, und dieß gilt von allen Paaren homologer Punkte; und umgekehrt:

25. Lehrsatz. Liegen zwei ebene collineare Systeme perspectivisch und liegt, wenn man irgend zwei Paar homologer Punkte durch sechs Gerade verbindet, allemal auch der Durchschnittspunkt der Geraden, welche die nicht homologen Punkte verbinden, auf der Collineationsaxe; so liegen die Systeme zugleich involutorisch.

24. Lehrsatz. Sucht man in zwei involutorisch liegenden ebenen Systemen die sechs Durchschnittspunkte von zwei Paar homologen Geraden, so geht auch die Verbindungsgerade der Punkte, in denen sich die nicht homologen Geraden schneiden, durch das Involutionscentrum, und dieß gilt von allen Paaren homologer Gerader; und umgekehrt:

25. Lehrsatz. Liegen zwei ebene collineare Systeme perspectivisch und geht, wenn man alle sechs Durchschnittspunkte irgend zweier Paare homologer Gerader sucht, allemal auch die Verbindungsgerade der Punkte, in denen sich die nicht homologen Geraden schneiden, durch das Collineationscentrum; so liegen die Systeme zugleich involutorisch.

§ 10.

Projectivische Lage der ebenen Systeme.

Ueber diesen Fall ist, seiner großen Allgemeinheit wegen, nur wenig zu sagen. Es läßt sich zunächst nur ein dem in § 5. Lehrsatz 2.

erwähnten Gesetze analoges aufstellen. Denn liegen zwei Systeme projectivisch (s. § 7. Erklärung 38.) in derselben Ebene, Fig. 73a., so läßt sich sogleich ein drittes finden, welches mit jedem der beiden Systeme perspectivisch liegt. Denn sind s und s', $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ ein Paar homologe Gerade, und Punktreihe s,ACBE .... $\barwedge$ s',A'C'B'E'...., $\mathfrak{s},\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{E}$ .... $\barwedge$ $\mathfrak{s}',\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'$ ...., so braucht man nur aus s,ACBE .... und $\mathfrak{s}',\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'$ ...., oder aus s',A'C'B'E' .... und $\mathfrak{s},\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{E}$ .... als erzeugenden Grundgebilden ein drittes System zu construiren nach § 7. Aufgabe 12. Auflösung 1. α), so ist jedes der so erhaltenen Systeme z. B. das aus s,ACBE und $\mathfrak{s}',\mathfrak{A}'\mathfrak{D}'\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'$ construirte collinear jedem der beiden gegebene, wie am angeführten Orte bewiesen wurde, und hat zugleich mit dem ersten die Punktreihe auf s, mit der zweiten die auf $\mathfrak{s}'$ gemein, liegt also mit beiden perspectivisch nach § 7. Lehrsatz 26. und Erklärung 38.; oder auch, wenn Fig. 73b. Strahlbüschel S,acbe .... $\barwedge$ S',a'c'b'e'...., $\mathfrak{S},\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{b}\mathfrak{e}$ $\barwedge$ $\mathfrak{S}',\mathfrak{a}'\mathfrak{d}'\mathfrak{b}'\mathfrak{e}'$ in zwei collinearen Systemen ist, construire man nach § 7. Aufgabe 12. Auflösung 2. α) entweder aus den Strahlbüscheln S,acbe .... und $\mathfrak{S}',\mathfrak{a}'\mathfrak{d}'\mathfrak{b}'\mathfrak{e}'$ ...., oder aus S',a'c'b'e'.... und $\mathfrak{S},\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{b}\mathfrak{e}$ .... als erzeugenden Grundgebilden ein drittes, so ist jedes der so erhaltenen mit jedem der beiden ersten collinear und hat mit jedem einen Strahlbüschel gemein, liegt also nach § 7. Lehrsatz 26. und Erklärung 38. perspectivisch. Man sieht sogleich, daß man auf diese Weise unzählig viele Systeme von der verlangten Beschaffenheit und Lage bilden kann. Also:

1. **Lehrsatz.** Liegen zwei collineare Systeme in derselben Ebene projectivisch, so lassen sich stets beliebig viele dritte Systeme construiren, deren jedes jedem der beiden ersteren collinear und mit ihm in perspectivischer Lage befindlich ist.

Es mögen nur noch ein Paar, nicht nur für die projectivische, sondern auch für die perspectivische und conjectivische Lage gültiger Gesetze erwähnt werden, die in den folgenden zwei Kapiteln von Wichtigkeit sind.

Gesetzt, man hätte in dem einen von zwei collinearen Systemen Fig. 99. durch Verbindung unendlich vieler Durchschnittspunkte eine Curve B$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}$A construirt, und suchte zu jedem ihrer Punkte den homologen, so erhielte man offenbar auch wieder unendlich viele Punkte und durch Verbindung derselben eine der Curve des ersten Systems homologe Figur; es fragt sich, was dieß für eine sein werde. Es ist leicht zu sehen, daß dieß wieder eine Curve sein muß. Denn, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B}'$ irgend drei homologe Punkte, und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ Punkte der Curve des ersten Systems sind, die nicht auf derselben Geraden liegen, so folgt, daß auch $\mathfrak{C}'$ nicht mit $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ auf derselben Geraden ($\mathfrak{A}'-\mathfrak{B}'$) oder $\mathfrak{s}'$ liegen kann, weil sonst nach § 7. Lehrsatz 14. auch $\mathfrak{C}$ auf ($\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$) oder $\mathfrak{s}$ liegen müßte, was gegen die Voraussetzung ist. Man sieht also allgemein:

2. Lehrsatz. Sind zwei ebene Systeme einander collinear, so ist einer Curve des ersten Systems eine Curve des zweiten homolog. Fig. 99.

Ferner sieht man sogleich, da jedem Curvenpunkt des ersten ein Curvenpunkt im zweiten homolog ist, aber auch nur einer nach § 7. Lehrsatz 13., und da dies auch mit homologen Geraden der Fall ist:

3. Lehrsatz. Sind in zwei ebenen collinearen Systemen zwei homologe Curven verzeichnet, so ist jeder Secante s der Curve im ersten System eine Secante s′ der Curve im zweiten System homolog. Fig. 99.

3. Lehrsatz. Sind in zwei ebenen collinearen Systemen zwei homologe Curven verzeichnet, so ist jeder Tangente r der Curve im ersten System eine Tangente r′ der Curve im zweiten System homolog. Fig. 99.

Denn berührt z. B. die Gerade r die Curve des ersten Systems in U, so muß der dem Punkt U homologe Curvenpunkt U′ auf r′ liegen, nach Lehrsatz 2. und § 7. Lehrsatz 14. Läge aber auf r′ noch ein Punkt V′ der Curve des zweiten Systems, so müßte auch auf r noch ein Punkt V der Curve des ersten Systems liegen, nach Lehrsatz 2. und § 7. Lehrsatz 14., was gegen die Voraussetzung ist. Es muß also r′ einen Punkt der Curve treffen, kann aber nur einen enthalten, und ist daher Tangente. Ferner folgt sofort ebenso:

4. Lehrsatz. Sind in zwei ebenen collinearen Systemen zwei homologe Curven verzeichnet, und wird irgend eine Gerade p in der Ebene des ersten Systems von der Curve des ersten Systems in n Punkten M, N, Q, ... geschnitten, so wird auch die homologe Gerade p′ in der Ebene des zweiten Systems von der homologen Curve des zweiten Systems in ebenso viel, nämlich n Punkten M′, N′, Q′ .... geschnitten. Fig. 99.

4. Lehrsatz. Sind in zwei ebenen collinearen Systemen zwei homologe Curven verzeichnet, und können von irgend einem Punkt P der Ebene des ersten Systems an die Curve des ersten Systems n Tangenten m, n, q, ... gelegt werden, so können auch von dem homologen Punkte P′ der Ebene des zweiten Systems an die Curve des zweiten Systems ebenso viel, nämlich n Tangenten m′, n′, q′, ... gelegt werden. Fig. 99.

Sagt man nun kurz *)

5. Erklärung. Eine ebene Curve, die von einer Gera-

5. Erklärung. Eine ebene Curve, an welche von einem

*) Vergl. Steiner: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“. Seite 149. Vergl. auch von Staudt: „Geometrie der Lage“. Seite 82.

derselben Ebene höchstens in n Punkten geschnitten werden kann, heiße eine „ebene Curve nter Ordnung“.

Punkte derselben Ebene höchstens n Tangenten gelegt werden können, heiße „eine ebene Curve nter Klasse“.

so folgt aus Lehrsatz 4. sogleich:

6. Lehrsatz. Sind in zwei ebenen collinearen Systemen zwei homologe Curven verzeichnet, und ist die des ersten Systems eine ebene Curve nter Ordnung, so ist auch die homologe des zweiten Systems eine ebene Curve nter Ordnung.

6. Lehrsatz. Sind in zwei ebenen collinearen Systemen zwei homologe Curven verzeichnet, und ist die des ersten Systems eine ebene Curve nter Klasse, so ist auch die homologe des zweiten Systems eine ebene Curve nter Klasse.

Aus § 7. Erklärung 19. folgt ferner, daß, wenn eine Curve K die Gegenaxe m, Fig. 100a., ihres Systems berührt, die homologe K′ einen, aber auch, nach § 7. Lehrsatz 13., nur einen einzigen Punkt im Unendlichen hat, daß also ein unendlich entfernter Punkt des zweiten Systems ein Curvenpunkt ist, und daß also die Curve mit einem Aste in das Unendliche verläuft, und daß, wenn die Curve des ersten Systems die Gegenaxe desselben in zwei Punkten schneidet, Fig. 100b., die homologe Curve mit zwei Punkten im Unendlichen liegt und durch die unendlich entfernte Gerade in zwei Theile getheilt wird und mit zwei Aesten in das Unendliche verläuft; daß endlich, wenn die Curve des ersten Systems geschlossen ist, also keinen unendlich entfernten Punkt hat und die Gegenaxe m in keinem Punkte trifft, Fig. 100c., auch die Curve des zweiten Systems geschlossen sein muß, und die Gegenaxe p′ nicht treffen kann, weil sonst die des ersten einen unendlich entfernten Punkt hätte. Man sieht also:

7. Lehrsatz. Sind in zwei ebenen collinearen Systemen zwei homologe Curven verzeichnet, und ist die des ersten Systems eine geschlossene, und trifft sie die Gegenaxe m des ersten Systems nicht; so ist auch die homologe des zweiten Systems geschlossen, und trifft die Gegenaxe p′ des zweiten Systems nicht, Fig. 100c.; berührt die des ersten Systems die Gegenaxe m, so verläuft die des zweiten Systems mit einem Aste in das Unendliche, Fig. 100a.; schneidet die des ersten Systems die Gegenaxe m in zwei Punkten, so verläuft die des zweiten Systems mit zwei Aesten in das Unendliche Fig. 100b.

Kap. III.

Eigenschaften der Kegelschnitte im Allgemeinen.

§ 11.

Entwickelung der Kegelschnitte.

Vielleicht hat der Leser schon bemerkt, daß im ersten Kapitel eine sich aufdrängende Frage noch nicht erledigt ist. Ihre Erörterung und Beantwortung ist deshalb verschoben worden, theils weil dazu die Sätze des zweiten Kapitels nothwendig sind, theils weil sie zu einem besonderen, in sich abgeschlossenen Abschnitt führt.

Liegen nämlich ein Paar conforme Punktreihen perspectivisch, so weiß man, daß die Projectionsstrahlen d. h. die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte sämmtlich durch einen und denselben Punkt gehen; liegen ein Paar conforme Punktreihen conjectivisch, so weiß man, daß die Projectionsstrahlen in einer und derselben Geraden liegen, nämlich in derjenigen, auf welcher beide Punktreihen liegen; man weiß aber noch nicht, welches Gesetz für die Projectionsstrahlen (s. § 5. Erklärung 1.) gilt, wenn die conformen Punktreihen projectivisch liegen. Ebenso weiß man, daß, wenn ein Paar conformer Strahlbüschel perspectivisch liegen, die Projectionspunkte, d. h. die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen auf einer und derselben Geraden liegen; liegen ein Paar conformer Strahlbüschel conjectivisch, so weiß man, daß die Projectionspunkte in einem und demselben Punkte liegen, nämlich in demjenigen, in welchem die Scheitel beider Strahlbüschel sich befinden; man weiß aber noch nicht, welches Gesetz für die Projectionspunkte (s. § 5. Erklärung 1.) gilt, wenn die conformen Strahlbüschel projectivisch liegen. Es ist klar, daß im letzteren Falle die Projectionspunkte auf irgend einer Curve liegen werden, die, da die Strahlbüschel nicht ganz beliebig, sondern einem bestimmten (dem Conformitäts-) Gesetz unterworfen sind, ebenfalls gesetzmäßig und nicht willkürlich gebildet ist. Im ersteren Falle wird man, namentlich auch im Hinblick auf die Analogie zwischen Curvenpunkt und Curventangente, die sich in § 10. herausgestellt hat, schließen, daß die Projectionsstrahlen eine, nach einem bestimmten Gesetz gebildete Curve berühren werden. Wir stellen uns daher als Aufgabe die Beantwortung der Frage:

Welche Curve wird von den Projectionsstrahlen projectivisch liegender conformer Punktreihen, als von Tangenten, berührt?	Welche Curve wird von den Projectionspunkten projectivisch liegender conformer Strahlbüschel, als von Curvenpunkten, gebildet?

Zunächst haben wir eine doppelte Lage der Grundgebilde, als möglich, zu unterscheiden. Zwei conforme, in derselben Ebene projecti-

visch liegende Punktreihen s,APBCTD und s',A'P'B'C'T'D' nämlich liegen jedenfalls so, daß in ihrem Durchschnittspunkt (s · s') zwei nicht entsprechende Punkte, z. B. P und T' vereinigt sind, weil sie, wenn sie mit einem Paare entsprechender Punkte zusammen fielen, nach § 3. Lehrsatz 2. β. perspectivisch lägen. Es kann jedoch diese Lage eine doppelte sein; entweder nämlich eine solche, daß, wenn man, Fig. 101 a., die eine Gerade, z. B. s' um den Durchschnittspunkt (s · s') als Centrum, so herumdreht, daß die den Punkten P, T', die in (s · s') vereinigt sind, entsprechenden Punkte, P', T auf verschiedene Seiten von (s · s') fallen, die Punktreihen dann auf s einstimmig verlaufen; oder sie können so liegen, daß unter gleichen Bedingungen, die Punktreihen dann entgegengesetzt verlaufen, Fig. 101 b. Desgleichen fallen bei zwei conformen, in derselben Ebene projectivisch liegenden Strahlbüscheln S,apbctd, S',a'p'b'c't'd', in der Verbindungsgeraden (S—S') der Scheitel zwei nicht homologe Strahlen, z. B. p und t' zusammen, weil sie sonst nach § 3. Lehrsatz 2. β. perspectivisch lägen. Diese Lage kann jedoch so sein, daß, wenn man den Scheitel des einen Strahlbüschels, z. B. S' auf der Verbindungsgeraden (S—S') nach dem anderen Scheitel S hin rücken, und endlich mit ihm zusammenfallen läßt, die dann an S vereinigten Strahlbüschel entweder einstimmig, Fig. 101 c., oder entgegengesetzt, Fig. 101 d. verlaufen. Um diese verschiedenen Fälle aus einander zu halten, setzen wir fest:

1. Erklärung. Wenn zwei in derselben Ebene befindliche nicht parallel verlaufende, conforme Punktreihen s,APBCTD und s',A'P'B'C'T'D' eine solche Lage haben, daß, wenn man die eine um ihren Durchschnittspunkt (s·s') so dreht, daß die Punkte T, P', welche den im Durchschnittspunkte (s·s') vereinigten, nicht entsprechenden, T', P entsprechen, auf **verschiedene** Seiten des Punktes T' oder P fallen, daß dann die beiden Punktreihen einstimmig verlaufen, so soll gesagt werden: „Die conformen Punktreihen liegen projectivisch **einstimmig.**" Fig. 101 a.; verlaufen sie unter denselben Verhältnissen entgegengesetzt, so soll gesagt werden: „Die conformen Punktreihen lie-

1. Erklärung. Wenn zwei in derselben Ebene befindliche conforme Strahlbüschel S,apbctd und S',a'p'b'c't'd' eine solche Lage haben, daß, wenn man den Scheitel des einen auf der nicht sich selbst entsprechenden Verbindungsgeraden ihrer Scheitel, (S—S') nach dem Scheitel des anderen hat rücken und mit demselben zusammenfallen lassen, daß dann die beiden Strahlbüschel einstimmig verlaufen, so soll gesagt werden: „Die conformen Strahlbüschel liegen projectivisch **einstimmig**". Fig. 101 c.; verlaufen sie unter denselben Verhältnissen entgegengesetzt, so soll gesagt werden: „Die conformen Strahlbüschel liegen projectivisch **entgegengesetzt.**" Fig. 101 d.

gen projectivisch **entgegengesetzt**". Fig. 101b.

Sind die Richtungen der Punktreihen parallel, so sollen sie, wie in § 4. **einstimmig** verlaufend heißen, wenn beide von links nach rechts oder von rechts nach links, **entgegengesetzt** verlaufend, wenn eine von links nach rechts, die andere von rechts nach links verläuft*)

In beiden Fällen ist ein Satz gültig, nämlich der, daß wenn zwei conforme Punktreihen in derselben Ebene projectivisch liegen, mag es einstimmig oder entgegengesetzt sein, in jedem Punkt dieser Ebene höchstens zwei Projectionsstrahlen sich schneiden können. Denn schnitten sich in irgend einem Punkte Π der Ebene drei Projectionsstrahlen, so lägen nach § 3. Lehrsatz 2. α. die Punktreihen s,APBCTD und s',A'P'B'C'T'D' für Π als Projectionscentrum perspectivisch; gegen die Voraussetzung. Ebenso können, wenn zwei conforme Strahlbüschel in derselben Ebene projectivisch liegen, auf jeder Geraden dieser Ebene höchstens zwei Projectionspunkte sich befinden; denn lägen auf irgend einer Geraden π drei derselben, so befänden sich nach § 3. Lehrsatz 2. α. die Strahlbüschel S,apbctd und S',a'p'b'c't'd' für π als Projectionsaxe in perspectivischer Lage; gegen die Voraussetzung. Verfolgen wir die Sache weiter, so sehen wir, daß, wenn wir bei einstimmig liegenden Punktreihen Fig. 101a. einen Punkt in ihrer Ebene, und zwar in dem Flächenraume desjenigen von ihnen eingeschlossenen Winkels, auf dessen Schenkeln die den Punkten P, T' entsprechenden P', T sich befinden, (er möge durch $\angle$ T (s · s') P' bezeichnet werden,) z. B. in Π_2 annehmen, und Π_2 mit den Punkten A, P, B, C,.... der einen, sowie mit den entsprechenden Punkten A', P', B', C',.... der anderen Punktreihe verbinden, zwei conjectivisch liegende conforme Strahlbüschel entstehen, deren Scheitel also in Π_2 sich befindet und deren Strahlen (Π_2—A); (Π_2—P);.... (Π_2—A'); (Π_2—P');.... sind, und daß diese Strahlbüschel einstimmig verlaufen, daß also in ihnen nach § 4. Lehrsatz 2. α); entweder zwei, oder ein oder kein Paar entsprechender Strahlen zusammenfallen. Ein Gleiches findet statt, für jeden Punkt Π'_2, der in dem Flächenraume des Scheitelwinkels zu dem vorhergenannten Winkel sich befindet. Es könnten demnach in einem Punkte Π_2, Π'_2 innerhalb der genannten Winkel ein Paar Projectionsstrahlen sich schneiden, aber sie müssen nicht, ja es kann in dem Flächenraume

*) Es wird nämlich dann, da der Durchschnittspunkt (s · s') in das Unendliche rückt, die erstere Erklärung unbestimmt, und es soll daher, da es keinen Widerspruch herbeiführt, dieselbe Benennung beibehalten werden, wie in § 4.

dieser Winkel sogar Punkte geben, durch die nicht einmal ein Projectionsstrahl geht. Und in der That ergiebt sich sogleich durch Betrachtung der Aufeinanderfolge der entsprechenden Punkte auf den Punktreihen s und s′, daß die endliche Strecke TP′ der Geraden (T—P′) von keinem einzigen Projectionsstrahl getroffen werden kann. Verbindet man aber einen Punkt Π_1 oder Π'_1 innerhalb des Flächenraumes der beiden übrigen Winkel mit A, P, B,.... und A′, P′, B′,.... so sieht man, daß die von (Π_1—A); (Π_1—P);.... (Π_1—A′); (Π_1—P′);.... oder von (Π'_1—A); (Π'_1—P);.... (Π'_1—A′); (Π'_1—P′);.... gebildeten conjectivisch liegenden conformen Strahlbüschel entgegengesetzt verlaufen. Es müssen also nach § 4. Lehrsatz 2. β) in ihnen zwei Strahlen selbst entsprechende sein, d. h. es müssen in jedem Punkt Π_1, Π'_1, der genannten Winkel sich zwei Projectionsstrahlen schneiden. Liegen aber die Punktreihen entgegengesetzt Fig. 101 b., so bemerkt man, daß hier das Umgekehrte stattfindet, daß in jedem Punkt Π_2 des Winkels T (s · s′) P′, sowie in jedem Punkt Π'_2 seines Scheitelwinkels sich zwei Projectionsstrahlen schneiden müssen, weil die an Π_2 sowie die an Π'_2 als Scheitel entstehenden conjectivisch liegenden Strahlbüschel entgegengesetzt verlaufen, daß aber für die Punkte Π_1 und Π'_1 dasselbe gilt, wie bei einstimmiger Lage für Π_2 und Π'_2 insbesondere, daß durch die unendliche Strecke T ∞ P′ kein Projectionsstrahl gehen kann. Zieht man ferner bei zwei einstimmig verlaufenden Strahlbüscheln Fig. 101 c. eine Gerade π_1, welche die Verbindungsgerade (S—S′) auf der endlichen, von S und S′ begrenzten Strecke schneidet, so sieht man, daß die entsprechenden Strahlen der conformen Strahlbüschel auf ihr conforme Punktreihen bilden, indem die Punkte (π_1 · a); (π_1 · p);.... entsprechen den Punkten (π_1 · a′), (π_1 · p′), ... Zugleich liegen diese Punktreihen conjectivisch und verlaufen entgegengesetzt; es fallen also nach § 4. Lehrsatz 2. β) zwei entsprechende Punkte zusammen. Es liegen mithin auf jeder durch SS′ (vergl. § 1. Erklärung 2.) gehenden Geraden π_1 zwei Projectionspunkte. Zieht man aber eine Gerade π_2, welche die (S—S′) auf der Strecke S ∞ S′ schneidet, so erhält man zwei einstimmig verlaufende Punktreihen, auf denen also zwei, oder ein, oder auch kein Punkt ein selbst entsprechender sein kann. Besonders bemerkt man sogleich, daß auf keiner durch den Punkt (t · p′) gehenden Geraden, welche die (S—S′) in einem Punkte der Strecke S ∞ S′ trifft, ein Projectionspunkt liegen kann. Es brauchen also auf einer solchen Geraden π_2 keine zwei, ja es braucht gar kein Projectionspunkt auf ihr zu liegen. Liegen die Strahlbüschel entgegengesetzt Fig. 101 d., so gilt dasselbe, was jetzt von π_1 gesagt worden war, von π_2 und umgekehrt. Man muß also sagen:

2. Lehrsatz. Liegen zwei conforme Punktreihen s,APBCTD und s′,A′P′B′C′T′D′ in derselben Ebene projectivisch; so können durch einen	2. Lehrsatz. Liegen zwei conforme Strahlbüschel S,apbctd und S′,a′p′b′c′t′d′ in derselben Ebene projectivisch; so können auf einer

Punkt dieser Ebene höchstens zwei Projectionsstrahlen gehen, die Lage der Punktreihen mag einstimmig oder entgegengesetzt sein.

3. Lehrsatz. Liegen zwei conforme Punktreihen s,APBCTD und s′,A′P′B′C′T′D′ in derselben Ebene projectivisch, sind im Durchschnittspunkte (s · s′) die nicht entsprechenden Punkte P und T′ vereinigt, und ist Π_2 ein Punkt in dem Flächenraume desjenigen einfachen Winkels T (s · s′) P′, auf dessen Schenkeln die Punkte T und P′ liegen, deren entsprechende im Durchschnittspunkte (s · s′) vereinigt sind, ist Π'_2 ein Punkt im Flächenraume des Scheitelwinkels des vorigen, Π_1 und Π'_1 ein Punkt im Flächenraume eines der beiden Nebenwinkel des einfachen Winkels T (s · s′) P′, so findet das Gesetz statt:

α) Bei **einstimmiger** Lage der Punktreihen **müssen** durch **jeden** Punkt Π_1 oder Π'_1 zwei Projectionsstrahlen gehen, durch einen Punkt Π_2 oder Π'_2 **können** zwei Projectionsstrahlen, aber auch nur einer oder keiner, gehen; insbesondere geht keiner durch die Strecke TP′ der Geraden (T—P′). Fig. 101a.

β) Bei **entgegengesetzter** Lage der Punktreihen **müssen** durch **jeden** Punkt Π_2 oder Π'_2 zwei Projectionsstrahlen gehen; durch einen Punkt Π_2 oder Π'_2 **können** zwei Projectionsstrahlen, aber auch nur

Geraden dieser Ebene höchstens zwei Projectionspunkte liegen, die Lage der Strahlbüschel mag einstimmig oder entgegengesetzt sein.

3. Lehrsatz. Liegen zwei conforme Strahlbüschel S,apbctd und S′,a′p′b′c′t′d′ in derselben Ebene projectivisch, sind in der Verbindungsgeraden der Scheitel (S—S′) die nicht entsprechenden Strahlen p und t′ vereinigt, und ist π_2 eine Gerade, welche die (S—S′) in einem Punkt der den unendlich entfernten Punkt enthaltenden Strecke S∞S′ schneidet, π_1 eine Gerade, welche die (S—S′) in der den unendlich entfernten Punkt nicht enthaltenden Strecke S, S′ trifft, so findet das Gesetz statt:

α) Bei **einstimmiger** Lage der Strahlbüschel **müssen** auf **jeder** Geraden π_1 zwei Projectionspunkte liegen; auf einer Geraden π_2 **können** zwei Projectionspunkte, aber auch nur einer oder keiner, liegen; insbesondere liegt keiner auf einer Geraden, die durch (t · p′) geht, und die (S—S′) in der Strecke S∞S′ trifft. Fig. 101c.

β) Bei **entgegengesetzter** Lage der Strahlbüschel **müssen** auf **jeder** Geraden π_2 zwei Projectionspunkte liegen; auf einer Geraden π_1 **können** zwei Projectionspunkte, aber auch nur einer oder keiner, liegen; insbesondere liegt keiner auf einer Geraden,

einer oder keiner, gehen insbesondere geht keiner durch die Strecke TP' der Geraden (T—P'), Fig. 101b. | die durch (t·p') geht, und die (S—S') in der Strecke SS' trifft. Fig. 101d.

Da sich nach Lehrsatz 2. in jedem Punkte der Ebene höchstens zwei Tangenten treffen können, so folgt daraus unmittelbar, daß jeder Punkt, in dem dieß geschieht, außerhalb der berührten Curve liegen muß. Denn schnitten sich in einem Punkte T derselben zwei Gerade x, y, welche beide die Curve in demselben Punkte T berührten, ohne zusammen zu fallen, so müßte in diesem Punkte die Curve sich selbst schneiden, und eine Schlinge bilden (vgl. Fig. 99.), und es müßte dann Punkte geben, von denen aus sich vier Tangenten legen ließen, z. B. der Punkt P, Fig. 99. Berührte aber von den beiden durch denselben Curvenpunkt z. B. durch R gehenden Geraden, m, r, letztere r, die Curve in einem Punkt, der nicht mit dem Berührungspunkt von m zusammenfällt, so daß also r die Curve im Berührungspunkte R von m durchschnitte und zugleich in einem anderen berührte, z. B. in U, Fig. 99., so müßte man wieder, wenn man sich auch um eine noch so kleine Strecke auf m vom Punkte R aus fortbewegt, auf einen Punkt P treffen, von dem aus vier Tangenten möglich sein müßten, zwei an den Curvenzweig, auf dem R, zwei an den Curvenzweig, auf dem U liegt; was wieder gegen Lehrsatz 2. wäre. Es muß also jeder Punkt, in dem sich zwei Projectionsstrahlen schneiden, außerhalb der von den Projectionsstrahlen als Tangenten, umhüllten Curve sich befinden. Nun ist offenbar in Fig. 101a. und 101b., sowohl s als s' ein Projectionsstrahl, denn die erstere ist die Verbindungsgerade der entsprechenden Punkte T und T'; die zweite die der entsprechenden Punkte P und P'. Es sind also s und s' Projectionsstrahlen; sie müssen also die gesuchte Curve berühren, folglich einen Punkt mit derselben gemein haben. In jedem Punkt der s aber, z. B. in B schneiden sich zwei Projectionsstrahlen, nämlich s und (B—B'); ebenso in C schneiden sich s und (C—C') u. s. w.; alle diese Punkte liegen also nach dem Vorigen außerhalb der gsuchten Curve. Nur einen einzigen Punkt auf s giebt es, in dem sich keine zwei Projectionsstrahlen schneiden, dieß ist der Punkt T, indem (T—T') mit s zusammenfällt. Da nun auf s ein Punkt der Curve liegen muß, nämlich der Berührungspunkt, aber kein Punkt der s mit Ausnahme von T ein Curvenpunkt sein kann, so folgt, daß T der Berührungspunkt der Tangente s mit der gesuchten Cnrve sein muß. Ebenso muß auf der Tangente s' der Berührungspunkt in P' liegen. Bei der durch Strahlbüschel erzeugten Curve, Fig. 101c. und 101d. muß nun jedenfalls sowohl S als S' ein Curvenpunkt sein, denn beide sind Projectionspunkte, indem sich im ersteren die Strahlen t und t', im letzteren die Strahlen p und p' treffen. Da es nun im Strahlbüschel S' nur einen einzigen, dem Strahl t des Büschels S entsprechenden Strahl t' giebt, so kann es auf t keinen zweiten Projectionspunkt, also keinen zweiten Curvenpunkt geben; es kann also t nur

den einzigen Punkt S mit der Curve gemein haben, und muß also Tangente sein, und S der Berührungspunkt. Zugleich kann durch S keine zweite Tangente der Curve gehen. Denn auf jedem ihrer Strahlen, z. B. auf d liegt ein Curvenpunkt, nämlich der Durchschnittspunkt (d · d′) mit dem entsprechenden Strahl des Strahlbüschels S′. Berührte nun d die Curve im Punkte (d · d′) und zugleich in S, so müßte es eine, ebenfalls durch S gehende und nicht ganz mit d zusammenfallende Gerade geben, welche die Curve in drei oder mehr Punkten schnitte, gegen Lehrsatz 2. Schnitte aber d die Curve in S und berührte sie nur in (d · d′), so müßte ein gleiches statt finden, z. B. in Fig. 99. muß jede, etwas rechts von r fallende Gerade die Curve in mehr als zwei Punkten schneiden. Ebenso muß p′ die Tangente am Berührungspunkte S′ sein, und es kann kein anderer Curvenpunkt außer S′ auf ihr sich befinden. Indessen sind diese Schlüsse doch nicht scharf, und es soll daher nur zur vorläufigen Orientirung ausgesprochen werden, es scheint, als fände das Gesetz statt:

An der Curve, die durch die Projectionsstrahlen zweier conformer projectivisch liegender Punktreihen s,APBCTD und s′,A′P′B′C′T′D′, als Tangenten, erzeugt wird, sind die Richtungen s und s′ dieser Punktreihen selbst Tangenten, die Punkte T und P′, welche den im Durchschnittspunkte (s · s′) vereinigten nicht entsprechenden Punkten T′ und P entsprechen, sind die Berührungspunkte bezüglich auf s und s′. Außer T und P′ liegt kein anderer Curvenpunkt auf s oder s′. Fig. 101 a., 101 b.

An der Curve, die durch die Projectionspunkte zweier conformer projectivisch liegender Strahlbüschel S,apbctd und S′,a′p′b′c′t′d′, als Curvenpunkten, erzeugt wird, sind die Scheitel S und S′ dieser Strahlbüschel selbst Curvenpunkte, die Strahlen t und p′, welche den in der Verbindungsgeraden (S—S′) vereinigten nicht entsprechenden Strahlen t′ und p entsprechen, sind die Berührungsgeraden bezüglich an S und S′. Außer t und p′ geht keine andere Tangente durch S oder S′. Fig. 101 c., 101 d.

Untersuchen wir jetzt, ob die von Punktreihen erzeugte Curve eine im Unendlichen liegende Gerade als Tangente haben kann, so ergiebt sich sofort, daß, mag die Lage der conformen Punktreihen einstimmig oder entgegengesetzt sein, dieß nur dann statt haben kann, wenn die unendlich entfernten Punkte der conformen auf s und s′ gelegenen Punktreihen entsprechende sind, wenn also die Punktreihen nach § 3. Lehrsatz 22. proportional sind. Zugleich sieht man sogleich, daß es nur eine einzige unendlich entfernte Tangente geben kann. Ferner bemerkt man, daß bei proportionaler Theilung die Lage der Punktreihen allemal einstimmig sein muß. Denn liegt in der Reihe auf s′, Fig. 101 a. z. B. der Punkt A′ außerhalb der Strecke T′P′ und zwar zwischen P′ und ∞, also auf der Strecke P′∞ und befände sich A auf T∞, so verliefen auf s′ die Punkte A′, P′ T′, ∞ in der Folge A′, P′, T′, ∞, auf s aber die

entsprechenden in der Folge A, ∞, P, T. Es können also ein Paar entsprechende Punkte nicht die angenommene Lage haben. Ebenso überzeugt man sich, daß bei derselben Lage von A′, das entsprechende A nicht zwischen P und T, also auf der Strecke PT liegen kann; es kann also nur noch auf der Strecke P∞ sich befinden und dann verlaufen beide Punktreihen, wenn sie der Erklärung 1. zufolge auf einander gelegt werden, einstimmig. Liegt A′ auf P′T′, so kann A nicht auf T∞, noch auf P∞, sondern nur auf PT liegen; und dann verlaufen die Punktreihen ebenfalls einstimmig; ebenso müssen, wenn A′ auf T′∞ liegt, und A also, da es nicht auf PT und nicht auf P∞ sich befinden kann, auf T∞ liegen muß, die Punktreihen einstimmig verlaufen. Weniger einfach ist die Beantwortung der analogen Frage, ob die von Strahlbüscheln erzeugte Curve einen unendlich entfernten Punkt als Curvenpunkt habe. Da jeder Punkt der Curve durch den Durchschnitt zweier entsprechenden Strahlen der Büschel S und S′ erzeugt wird, mithin ein unendlich entfernter Punkt nur dann vorkommen kann, wenn zwei entsprechende Strahlen parallel werden, so hängt also die Beantwortung unserer Frage von der Erörterung der Untersuchung ab, ob und unter welchen Umständen ein Paar entsprechender Strahlen in zwei conformen projectivisch liegenden Strahlbüscheln parallel sind. Es seien nun, um hierüber Aufschluß zu erhalten, a und a′, b und b′ die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel der Strahlbüschel S und S′ (vgl. § 2. Erklärung 15.), also $\angle ab = \angle a'b' = 90^0$, ferner seien g und g′ ein Paar entsprechende Strahlen der Büschel S und S′ und zwar sei $\angle a'g' = \angle bg$; $\angle b'g' = \angle ag$ (vgl. § 3. Lehrsatz 9.); die Strahlbüschel seien zunächst einstimmig verlaufende, Fig. 102a. Nehmen wir an, daß m und m′ ein Paar entsprechender paralleler Strahlen sein, bezeichnen den Winkel, den b und a′ einschließen mit v, den unbekannten Winkel bm durch x, den ebenfalls unbekannten Winkel a′m′ durch x′, so muß zunächst, da m′ ∥ m sein soll, die Gleichung gelten:

$$x + x' = v;$$

ferner muß nach § 2. Lehrsatz 17. die Gleichung gelten:

$$\operatorname{tang} x \cdot \operatorname{tang} x' = \operatorname{tang}^2 bg = \operatorname{tang}^2 a'g';$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort, wenn man den aus der ersteren sich ergebenden Werth $x' = v - x$, also $\operatorname{tang} x' = \frac{\operatorname{tang} v - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang} v \cdot \operatorname{tang} x}$ in die zweite einsetzt:

$$\operatorname{tang} x = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 bg}{2} \cdot \operatorname{tang} v \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \operatorname{tang}^2 bg}{2} \cdot \operatorname{tang} v\right)^2 - \operatorname{tang}^2 bg}.$$

Es giebt demnach im Allgemeinen zwei Werthe für tang x, also auch zwei Winkel x, für welche die entsprechenden Strahlen parallel sind. Doch kann es auch kommen, daß nur ein oder auch, daß kein solcher Winkel möglich ist. Sollen zwei Werthe für x möglich sein, so muß offenbar sein

$$\left(\frac{1 - \text{tang}^2\,\text{bg}}{2} \cdot \text{tang}\,\text{v}\right)^2 > \text{tang}^2\,\text{bg},$$

oder $\frac{1 - \text{tang}^2\,\text{bg}}{2} \cdot \text{tang}\,\text{v} > \text{tang}\,\text{bg},$

also: $\text{tang}\,\text{v} > \frac{2\,\text{tang}\,\text{bg}}{1 - \text{tang}^2\,\text{bg}};$

d. h. $\text{tang}\,\text{v} > \text{tang}\,(2 \cdot \text{bg}),$

also $\angle\,\text{v} > \angle\,(2 \cdot \text{bg})$ oder $\angle\,\text{v} > \angle\,(2 \cdot \text{a}'\text{g}')$.

Sind also die Strahlbüschel S und S′ in solcher Lage, daß diese Bedingung erfüllt ist, so hat die von ihnen erzeugte Curve zwei unendlich entfernte Punkte; liegen sie so, daß $\angle\,\text{v} < \angle\,(2 \cdot \text{bg})$ oder $\angle\,\text{v} < \angle\,(2 \cdot \text{a}'\text{g}')$ so hat die Curve keinen unendlich entfernten Punkt. Ist endlich der Radicand in der Gleichung für tang x, gleich 0, so hat sie nur einen unendlich entfernten Punkt. Es muß im letztgenannten Falle also sein $\angle\,\text{v} = \angle\,(2 \cdot \text{bg}) = \angle\,(2 \cdot \text{a}'\text{g}')$. Ist dieß aber der Fall, so ist:

$$\text{tang}\,\text{x} = \frac{1 - \text{tang}^2\,\text{bg}}{2} \cdot \text{tang}\,\text{v};$$

zugleich aber ist dann

$$\frac{1 - \text{tang}^2\,\text{bg}}{2} \cdot \text{tang}\,\text{v} = \frac{1 - \text{tang}^2\,\text{bg}}{2} \cdot \text{tang}\,(2 \cdot \text{bg})$$

$$= \frac{1 - \text{tang}^2\,\text{bg}}{2} \cdot \frac{2\,\text{tang}\,\text{bg}}{1 - \text{tang}^2\,\text{bg}} = \text{tang}\,\text{bg};$$

also $\text{tang}\,\text{x} = \text{tang}\,\text{bg} = \text{tang}\,\text{a}'\text{g}'$.

Es müssen also die parallelen entsprechenden Strahlen m und m′ bezüglich nach g und g′ fallen, oder die Strahlbüschel müssen so liegen, daß g ∥ g′ ist, und die Curve hat dann nur einen einzigen unendlich entfernten Punkt (g · g′). — Sind die Strahlbüschel S und S′ insbesondere gleich, so sieht man, daß, wenn ein Paar entsprechender Strahlen z. B. m und m′ parallel sind, dasselbe auch mit jedem anderen Paare entsprechender Strahlen, z. B. n und n′ der Fall sein muß, denn da dann $\angle\,\text{m}'\text{n}' = \angle\,\text{mn}$ ist, so folgt n′ ∥ n etc. Es entsteht also dann gar keine Curve, wenigstens nicht in angebbarer Entfernung in der Ebene. — Ist der Verlauf der Strahlbüschel S und S′ entgegengesetzt, Fig. 102 b., so erhält man zur Bestimmung des Winkels x die Gleichungen:

$$\text{x} - \text{x}' = \text{v};$$

und $\text{tang}\,\text{x} \cdot \text{tang}\,\text{x}' = \text{tang}^2\,\text{bg};$

woraus folgt:

$$\text{tang}\,\text{x} = \frac{1 + \text{tang}^2\,\text{bg}}{2} \cdot \text{tang}\,\text{v} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \text{tang}^2\,\text{bg}}{2} \cdot \text{tang}\,\text{v}\right)^2 + \text{tang}^2\,\text{bg}}.$$

Da hier der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen stets positiv ist, so muß es also stets zwei Werthe für tang x und x, also zwei Richtun-

gen für den Strahl m geben. Sind insbesondere die Strahlbüschel gleich, so haben die die Grundlage der bisherigen Untersuchung bildenden: „entsprechenden Strahlen der rechten Winkel" keinen Sinn mehr, denn stehen in dem ersten Strahlbüschel die Strahlen a und b; c und d; e und f, u. s. w. senkrecht auf einander, so muß auch im zweiten Strahlbüschel, da er dem ersten gleich sein soll, $a' \perp b'$, $c' \perp d'$, $e' \perp f'$ u. s. w. sein. Es giebt also unzählig viele Paare entsprechender rechter Winkel. Man gelangt aber dann folgendermaßen zur Einsicht in die dann eintretenden Verhältnisse. Man lasse den Strahlbüschel S′ so auf der Geraden (S−S′) fortrücken, daß jeder Strahl sich selbst parallel geblieben ist, wenn S′ mit S zusammenfällt, und beide die Lage Fig. 51b. haben, also conjectivisch liegen. Nach § 4. Lehrsatz 2. γ) fallen dann stets zwei, aber auch nur zwei, und zwar rechtwinklig zu einander stehende Strahlen m, m′; n, n′ zusammen. Denkt man nun den Büschel S′ sich wieder ebenso in seine frühere Lage zurückbewegend, so muß auch in dieser $m' \parallel m$; $n' \parallel n$ sein. Es muß also immer zwei parallele Strahlen m, m′; n, n′ geben, und man sieht, daß dann die beiden nach dem unendlich entfernten Curvenpunkte gehenden Strahlen auf einander senkrecht stehen müssen.

Es ergiebt sich also aus dem Bisherigen der

4. Lehrsatz. Die von den Projectionsstrahlen zweier conformen, projectivisch liegenden Punktreihen, als Tangenten, erzeugte Curve hat nur dann eine unendlich entfernte Gerade zur Tangente, wenn die Punktreihen proportional sind. Es kann nur eine einzige unendlich entfernte Tangente geben. Es liegen aber proportionale Punktreihen allemal einstimmig.

4. Lehrsatz. Die von den Projectionspunkten zweier conformen projectivisch liegenden Strahlbüschel, als Curvenpunkten, erzeugte Curve hat, wenn die Strahlbüschel **einstimmig** liegen, **zwei** unendlich entfernte Punkte, wenn $\angle v > \angle (2 \cdot bg)$, Fig. 102a. ist; sie hat nur **einen** unendlich entfernten Punkt wenn $\angle v = \angle (2 \cdot bg)$ und also $g \parallel g'$ (s. § 3. Lehrsatz 9.); sie hat **keinen** unendlich entfernten Punkt, wenn $\angle v < \angle (2 \cdot bg)$ ist. Sind die Strahlbüschel insbesondere gleich, so entsteht entweder gar keine angebbare Curve oder eine Curve mit keinem unendlich entfernten Punkt. Liegen die Strahlbüschel **entgegengesetzt**, Fig. 102b., so hat die von ihnen erzeugte Curve allemal **zwei** unendlich

entfernte Punkte, mögen die Strahlbüschel gleich sein oder nicht. Sind sie gleich, so giebt es stets zwei, aber nur zwei, und zwar senkrecht auf einander stehende Strahlen an S und S′, deren jeder einen der unendlich entfernten Punkte enthält*).

Der Kürze wegen soll im Folgenden folgende Bezeichnung festgehalten werden:

5. Erklärung. Die von zwei einstimmig verlaufenden Punktreihen erzeugte Curve soll im Folgenden durch K'_1, die durch entgegengesetzt verlaufende Punktreihen erzeugte durch K'_2; die durch proportionale einstimmig verlaufende Punktreihen erzeugte durch K'_3 bezeichnet werden.

5. Erklärung. Die von zwei einstimmig verlaufenden Strahlbüscheln erzeugte Curve mit keinem unendlich entfernten Punkte soll im Folgenden durch k_1, die mit zwei unendlich entfernten Punkten durch k_2, die durch einstimmig verlaufende Strahlbüschel erzeugte mit einem unendlich entfernten Punkt durch k_4, die durch entgegengesetzt verlaufende Strahlbüschel erzeugte durch k_3, die durch einstimmig verlaufende gleiche Strahlbüschel erzeugte durch k_5, die durch entgegengesetzt verlaufende gleiche Strahlbüschel erzeugte durch k_0 bezeichnet werden.

Zunächst wollen wir uns mit der Untersuchung der Curven K'_1 und k_1 beschäftigen.

Es sei nun $(T-P')$ die die Punkte T und P′ der Curve K'_1 verbindende Gerade: sie heiße im Folgenden stets τ; und Π sei ein Punkt in einem Nebenwinkel des Winkels $T(ss')P'$ auf τ. In Π convergiren dann nach Lehrsatz 3. jedenfalls zwei Projectionsstrahlen a_1 und a_2, Fig. 103a. Die Verbindungsgerade von Π mit $(s \cdot s')$ heiße α'. Da nun die Punktreihen auf s und s′ conform sind, so ist also, vermöge § 1. Lehrsatz 13:

---

*) M. s. Steiner: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander". pag. 144.

Strahlbüschel $\Pi, a_1 \alpha' a_2 \tau \overline{\wedge}$ Strahlbüschel $\Pi, a_1 \tau a_2 \alpha'$, da T und T′, P und P′ entsprechende Punkte sind. Es ist also: $\frac{\sin a_1 \alpha'}{\sin a_2 \alpha'} : \frac{\sin a_1 \tau}{\sin a_2 \tau} = \frac{\sin a_1 \tau}{\sin a_2 \tau} : \frac{\sin a_1 \alpha'}{\sin a_2 \alpha'}$; folglich $\frac{\sin a_1 \alpha'}{\sin a_2 \alpha'} = \frac{\sin a_1 \tau}{\sin a_2 \tau}$; oder $\frac{\sin a_1 \alpha'}{\sin a_2 \alpha'} : \frac{\sin a_1 \tau}{\sin a_2 \tau} = 1$, also Strahlbüschel $\Pi_1 a_1 \alpha' a_2 \tau$ harmonisch nach § 1. Erklärung 23. Ein Gleiches läßt sich von jedem Strahlbüschel zeigen, dessen einer Strahl τ ist, und dessen anderer durch $(s \cdot s')$ geht, und dessen andere beiden zwei Projectionsstrahlen sind, mag sein Scheitel in Π_1 oder Π'_1 liegen, Fig. 101 a. Ein ganz analoger Satz gilt auch für die Curve k_1. Es heiße der Durchschnittspunkt $(t \cdot p')$, Fig. 103 b. T und es sei π irgend eine durch T gehende Gerade, auf der zwei Curvenpunkte A_1 und A_2 liegen; ihr Durchschnittspunkt mit $(S - S')$ heiße A′, so ist, da Strahlbüschel $S, a_1 p a_2 t \overline{\wedge} S', a'_1 p' a'_2 t'$ ist, Punktreihe $\pi, A_1 A' A_2 T \overline{\wedge} \pi, A_1 T A_2 A'$, also Punktreihe $\pi, A_1 A' A_2 T$ harmonisch. Dasselbe gilt von jeder durch T gehenden Geraden π_1, Fig. 101 c., auf der zwei Curvenpunkte liegen. Man sieht also:

6. Lehrsatz. Gehen zwei Projectionsstrahlen a_1, a_2 durch einen Punkt der Geraden τ, so sind a_1 und a_2 zugeordnete Strahlen eines harmonischen Strahlbüschels, $(a_1 \cdot a_2), a_1 \alpha' a_2 \tau$ in dem τ und $[(s \cdot s') - (a_1 \cdot a_2)]$ das andere Paar zugeordneter Strahlen sind. Fig. 103a.

6. Lehrsatz. Liegen zwei Projectionspunkte A_1, A_2 auf einer durch T gehenden Geraden, so sind A_1 und A_2 zugeordnete Punkte einer harmonischen Punktreihe $(A_1 - A_2)$, $A_1 A' A_2 T$, in der T und $[(S - S') \cdot (A_1 - A_2)]$ das andere Paar zugeordneter Punkte sind. Fig. 103b.

Denkt man sich nun drei Paar Strahlen $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2$, die sich zu zweien in je einem Punkte $(a_1 \cdot a_2)$, $(b_1 \cdot b_2)$, $(c_1 \cdot c_2)$ der τ schneiden, und bezeichnet man $[(s \cdot s') - (a_1 \cdot a_2)]$ mit α'; $[(s \cdot s') - (b_1 \cdot b_2)]$ mit β'; $[(s \cdot s') - (c_1 \cdot c_2)]$ mit γ', so ist also nach Lehrsatz 6. Strahlbüschel $(a_1 \cdot a_2), a_1 \alpha' a_2 \tau$; $(b_1 \cdot b_2), b_1 \beta' b_2 \tau$; $(c_1 \cdot c_2), c_1 \gamma' c_2 \tau$ harmonisch, also auch, wenn man die Durchschnittspunkte dieser Projectionsstrahlen mit s durch die gleichnamigen großen Buchstaben bezeichnet, (wobei nur $(s \cdot \alpha')$, $(s \cdot \beta')$, $(s \cdot \gamma')$, wie bisher P heißen soll), Punktreihe $s, A_1 P A_2 T$; $s, B_1 P B_2 T$; $s, C_1 P C_2 T$ harmonisch. Es bilden also nach § 4. Lehrsatz 17. die Punkte $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$; P, T eine Involution mit den Hauptpunkten P, T. Ein Gleiches gilt natürlich von den entsprechenden Punkten auf S′, und auf dieselbe Weise überzeugt man sich bei Strahlbüscheln von der Richtigkeit des analogen Gesetzes. Wir können also sagen:

7. Lehrsatz. Die Durchschnittspunkte A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2,.... der Richtung s

7. Lehrsatz. Die Verbindungsgeraden a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, ... des Scheitels S

einer die Curve K'_1 erzeugenden Punktreihe mit den Projectionsstrahlen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2,...., von denen je zwei ihren Durchschnittspunkt auf τ haben, bilden eine entgegengesetzt verlaufende involutorische Punktreihe mit den Hauptpunkten P und T; in ihr sind je zwei Punkte A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2, etc. entsprechend. Dasselbe gilt für die Punktreihe auf s'.

eines die Curve k_1 erzeugenden Strahlbüschels mit den Projectionspunkten A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2,...., von denen je zwei auf einer durch T gehenden Geraden liegen, bilden einen entgegengesetzt verlaufenden involutorischen Strahlbüschel mit den Hauptstrahlen p und t; in ihm sind je zwei Strahlen a_1 und a_2, b_1 und b_2, c_1 und c_2 etc. entsprechend. Dasselbe gilt für den Strahlbüschel an S'.

Es sei nun Π' Fig. 104a. ein zweiter Punkt, (außer Π) auf τ, in dem die Projectionsstrahlen b_1, b_2 sich schneiden; so können s und s' als erste und dritte Seite eines vollständigen Sechsseits (s. § 5. Erklärung 3.) angesehen werden, in dem a_1 und a_2, b_1 und b_2, die übrigen 4 Seiten sind, welche die erste und dritte, s und s', in den Punkten A_1, A_2, B_1, B_2, A'_1, A'_2, B'_1, B'_2 so schneiden, daß die Punktreihe $s', B'_1 A'_1 A'_2 B'_2 \;\overline{\wedge}\; s, B_1 A_1 A_2 B_2$ ist. Nach § 5. Erklärung 4. enthält das vollständige Sechsseit zwar 60 einfache Sechsseite; unter diesen sind jedoch nur 24. einfache Sechsseite von der Beschaffenheit, daß in ihnen s und s' je die erste und dritte Seite bildet. Denn von den vier übrigen Seiten a_1, a_2; b_1, b_2 kann jede die zweite sein. Man erhält also zunächst vier Sechsseite, eins, in dem s, a_1, s', eins, in dem s, a_2, s', eins, in dem s, b_1, s', und eins, in dem s, b_2, s' bezüglich die erste, zweite und dritte Seite ist. Es giebt nun aber offenbar nicht ein, sondern sechs Sechsseite, in denen a_1 die zweite Seite ist, denn jede der übrigen drei Seiten a_2, b_1, b_2 kann die vierte, fünfte und sechste sein. Es giebt also so viel einfache Sechsseite mit der zweiten Seite a_1, als es Permutationen von a_2, b_1, b_2 giebt, nämlich 6. Ebenso giebt es 6, in denen a_2, ebenso viele, in denen b_1, und ebenso viele, in denen b_2 die zweite Seite ist; im Ganzen also 24., und nicht mehr. Sie lassen sich, wenn wir für je sechs die ersten, zweiten, dritten Seiten nur einmal hinschreiben, folgendermaßen darstellen. Zugleich sollen dabei bei jedem der 24. einfachen Seite die drei Geraden, die nach § 5. Lehrsatz 6. durch denselben Punkt gehen, angegeben werden, und zwar nach dem Schema, daß, wenn m, n, p, q Gerade bedeuten, vermöge zweimaliger Anwendung von § 1. Erklärung 2. unter $[(m \cdot n) \overline{} (p \cdot q)]$ die Verbindungsgerade der Durchschnittspunkte $(m \cdot n)$ und $(p \cdot q)$ zu verstehen ist. Man erhält also folgende Tabelle der 24. einfachen Sechsseite:

t_1.

I. sa_1s'	$a_2b_1b_2$;	$[(s \cdot a_1) - (a_2 \cdot b_1)]$;	$[(a_1 \cdot s') - (b_1 \cdot b_2)]$;	$[(s' \cdot a_2) - (b_2 \cdot s)]$;
	$a_2b_2b_1$;	$[(s \cdot a_1) - (a_2 \cdot b_2)]$;	$[(a_1 \cdot s') - (b_2 \cdot b_1)]$;	$[(s' \cdot a_2) - (b_1 \cdot s)]$;
	$b_1a_2b_2$;	$[(s \cdot a_1) - (b_1 \cdot a_2)]$;	$[(a_1 \cdot s') - (a_2 \cdot b_2)]$;	$[(s' \cdot b_1) - (b_2 \cdot s)]$;
	$b_1b_2a_2$;	$[(s \cdot a_1) - (b_1 \cdot b_2)]$;	$[(a_1 \cdot s') - (b_2 \cdot a_2)]$;	$[(s' \cdot b_1) - (a_2 \cdot s)]$;
	$b_2a_2b_1$;	$[(s \cdot a_1) - (b_2 \cdot a_2)]$;	$[(a_1 \cdot s') - (a_2 \cdot b_1)]$;	$[(s' \cdot b_2) - (b_1 \cdot s)]$;
	$b_2b_1a_2$;	$[(s \cdot a_1) - (b_2 \cdot b_1)]$;	$[(a_1 \cdot s') - (b_1 \cdot a_2)]$;	$[(s' \cdot b_2) - (a_2 \cdot s)]$;
II. sa_2s'	$a_1b_1b_2$;	$[(s \cdot a_2) - (a_1 \cdot b_1)]$;	$[(a_2 \cdot s') - (b_1 \cdot b_2)]$;	$[(s' \cdot a_1) - (b_2 \cdot s)]$;
	$a_1b_2b_1$;	$[(s \cdot a_2) - (a_1 \cdot b_2)]$;	$[(a_2 \cdot s') - (b_2 \cdot b_1)]$;	$[(s' \cdot a_1) - (b_1 \cdot s)]$;
	$b_1a_1b_2$;	$[(s \cdot a_2) - (b_1 \cdot a_1)]$;	$[(a_2 \cdot s') - (a_1 \cdot b_2)]$;	$[(s' \cdot b_1) - (b_2 \cdot s)]$;
	$b_1b_2a_1$;	$[(s \cdot a_2) - (b_1 \cdot b_2)]$;	$[(a_2 \cdot s') - (b_2 \cdot a_1)]$;	$[(s' \cdot b_1) - (a_1 \cdot s)]$;
	$b_2a_1b_1$;	$[(s \cdot a_2) - (b_2 \cdot a_1)]$;	$[(a_2 \cdot s') - (a_1 \cdot b_1)]$;	$[(s' \cdot b_2) - (b_1 \cdot s)]$;
	$b_2b_1a_1$;	$[(s \cdot a_2) - (b_2 \cdot b_1)]$;	$[(a_2 \cdot s') - (b_1 \cdot a_1)]$;	$[(s' \cdot b_2) - (a_1 \cdot s)]$;
III. sb_1s'	$a_1a_2b_2$;	$[(s \cdot b_1) - (a_1 \cdot a_2)]$;	$[(b_1 \cdot s') - (a_2 \cdot b_2)]$;	$[(s' \cdot a_1) - (b_2 \cdot s)]$;
	$a_1b_2a_2$;	$[(s \cdot b_1) - (a_1 \cdot b_2)]$;	$[(b_1 \cdot s') - (b_2 \cdot a_2)]$;	$[(s' \cdot a_1) - (a_2 \cdot s)]$;
	$a_2a_1b_2$;	$[(s \cdot b_1) - (a_2 \cdot a_1)]$;	$[(b_1 \cdot s') - (a_1 \cdot b_2)]$;	$[(s' \cdot a_2) - (b_2 \cdot s)]$;
	$a_2b_2a_1$;	$[(s \cdot b_1) - (a_2 \cdot b_2)]$;	$[(b_1 \cdot s') - (b_2 \cdot a_1)]$;	$[(s' \cdot a_2) - (a_1 \cdot s)]$;
	$b_2a_1a_2$;	$[(s \cdot b_1) - (b_2 \cdot a_1)]$;	$[(b_1 \cdot s') - (a_1 \cdot a_2)]$;	$[(s' \cdot b_2) - (a_2 \cdot s)]$;
	$b_2a_2a_1$;	$[(s \cdot b_1) - (b_2 \cdot a_2)]$;	$[(b_1 \cdot s') - (a_2 \cdot a_1)]$;	$[(s' \cdot b_2) - (a_1 \cdot s)]$;
IV. sb_2s'	$a_1a_2b_1$;	$[(s \cdot b_2) - (a_1 \cdot a_2)]$;	$[(b_2 \cdot s') - (a_2 \cdot b_1)]$;	$[(s' \cdot a_1) - (b_1 \cdot s)]$;
	$a_1b_1a_2$;	$[(s \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_1)]$;	$[(b_2 \cdot s') - (b_1 \cdot a_2)]$;	$[(s' \cdot a_1) - (a_2 \cdot s)]$;
	$a_2a_1b_1$;	$[(s \cdot b_2) - (a_2 \cdot a_1)]$;	$[(b_2 \cdot s') - (a_1 \cdot b_1)]$;	$[(s' \cdot a_2) - (b_1 \cdot s)]$;
	$a_2b_1a_1$;	$[(s \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$;	$[(b_2 . s') - (b_1 \cdot a_1)]$;	$[(s' \cdot a_2) - (a_1 \cdot s)]$;
	$b_1a_1a_2$;	$[(s \cdot b_2) - (b_1 . a_1)]$;	$[(b_2 \cdot s') - (a_1 \cdot a_2)]$;	$[(s' \cdot b_1) - (a_2 \cdot s)]$;
	$b_1a_2a_1$;	$[(s \cdot b_2) - (b_1 \cdot a_2)]$;	$[(b_2 \cdot s') - (a_2 \cdot a_1)]$:	$[(s' \cdot b_1) - (a_1 \cdot s)]$.

Ist ferner Fig. 104b. π' eine zweite, durch den Punkt T gehende Gerade, auf der die Projectionspunkte B_1 und B_2 liegen, so können S und S′ als die erste und dritte Ecke eines vollständigen Sechsecks (s. § 5. Erklärung 3.) angesehen werden, dessen übrige vier Ecken die Punkte A_1, A_2, B_1, B_2 sind, die so beschaffen sind, daß man, wenn man S und S′ mit diesen Punkten durch Gerade verbindet, zwei conforme Strahlbüschel $S', b'_1 a'_1 a'_2 b'_2 \barwedge S, b_1 a_1 a_2 b_2$ erhält. Es giebt nun 24. einfache Sechsecke, in denen S und S′ als erste und dritte Ecke betrachtet werden kann. Nach § 5. Lehrsatz 6. liegen die Durchschnittspunkte der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Seite eines jeden dieser vier und zwanzig einfachen Sechsecke in derselben Geraden. Diese Sechsecke lassen sich ebenfalls in vier Gruppen theilen, je nachdem A_1, A_2, B_1, B_2 die zweite Ecke bildet. Sie sollen im Folgenden aufgezählt und zugleich die Punkte angegeben

werden, die nach § 5. Lehrsatz 6. auf derselben Geraden liegen, und zwar soll, unter zweimaliger Anwendung von § 1. Erklärung 2., wenn M, N, P, Q Punkte bedeuten, unter $[(M-N)\cdot(P-Q)]$ der Durchschnittspunkt der Verbindungsgeraden $(M-N)$ und $(P-Q)$ verstanden werden. Man erhält dann für die vier und zwanzig einfachen Sechsecke folgende Tabelle:

T_1.

I. SA_1S'	$A_2B_1B_2$;	$[(S-A_1)\cdot(A_2-B_1)]$;	$[(A_1-S')\cdot(B_1-B_2)]$;	$[(S'-A_2)\cdot(B_2-S)]$;
	$A_2B_2B_1$;	$[(S-A_1)\cdot(A_2-B_2)]$;	$[(A_1-S')\cdot(B_2-B_1)]$;	$[(S'-A_2)\cdot(B_1-S)]$;
	$B_1A_2B_2$;	$[(S-A_1)\cdot(B_1-A_2)]$;	$[(A_1-S')\cdot(A_2-B_2)]$;	$[(S'-B_1)\cdot(B_2-S)]$;
	$B_1B_2A_2$;	$[(S-A_1)\cdot(B_1-B_2)]$;	$[(A_1-S')\cdot(B_1-A_2)]$;	$[(S'-B_1)\cdot(A_2-S)]$;
	$B_2A_2B_1$;	$[(S-A_1)\cdot(B_2-A_2)]$;	$[(A_1-S')\cdot(A_2-B_2)]$;	$[(S'-B_2)\cdot(B_1-S)]$;
	$B_2B_1A_2$;	$[(S-A_1)\cdot(B_2-B_1)]$;	$[(A_1-S')\cdot(B_1-A_2)]$;	$[(S'-B_2)\cdot(A_2-S)]$;
II. SA_2S'	$A_1B_1B_2$;	$[(S-A_2)\cdot(A_1-B_1)]$;	$[(A_2-S')\cdot(B_1-B_2)]$;	$[(S'-A_1)\cdot(B_2-S)]$
	$A_1B_2B_1$;	$[(S-A_2)\cdot(A_1-B_2)]$;	$[(A_2-S')\cdot(B_2-B_1)]$;	$[(S'-A_1)\cdot(B_1-S)]$
	$B_1A_1B_2$;	$[(S-A_2)\cdot(B_1-A_1)]$;	$[(A_2-S')\cdot(A_1-B_2)]$;	$[(S'-B_1)\cdot(B_2-S)]$
	$B_1B_2A_1$;	$[(S-A_2)\cdot(B_1-B_2)]$;	$[(A_2-S')\cdot(B_2-A_1)]$;	$[(S'-B_1)\cdot(A_1-S)]$
	$B_2A_1B_1$;	$[(S-A_2)\cdot(B_2-A_1)]$;	$[(A_2-S')\cdot(A_1-B_1)]$;	$[(S'-B_2)\cdot(B_1-S)]$
	$B_2B_1A_1$;	$[(S-A_2)\cdot(B_2-B_1)]$;	$[(A_2-S')\cdot(B_1-A_1)]$;	$[(S'-B_2)\cdot(A_1-S)]$
III. SB_1S'	$A_1A_2B_2$;	$[(S-B_1)\cdot(A_1-A_2)]$;	$[(B_1-S')\cdot(A_2-B_2)]$;	$[(S'-A_1)\cdot(B_2-S)]$
	$A_1B_2A_2$;	$[(S-B_1)\cdot(A_1-B_2)]$;	$[(B_1-S')\cdot(B_2-A_2)]$;	$[(S'-A_1)\cdot(A_2-S)]$
	$A_2A_1B_2$;	$[(S-B_1)\cdot(A_2-A_1)]$;	$[(B_1-S')\cdot(A_1-B_2)]$;	$[(S'-A_2)\cdot(B_2-S)]$
	$A_2B_2A_1$;	$[(S-B_1)\cdot(A_2-B_2)]$;	$[(B_1-S').(B_2-A_1)]$;	$[(S'-A_2)\cdot(A_1-S)]$
	$B_2A_1A_2$;	$[(S-B_1)\cdot(B_2-A_1)]$;	$[(B_1-S')\cdot(A_1-A_2)]$;	$[(S'-B_2)\cdot(A_2-S)]$
	$B_2A_2A_1$;	$[(S-B_1)\cdot(B_2-A_2)]$;	$[(B_1-S')\cdot(A_2-A_1)[$;	$[(S'-B_2)\cdot(A_1-S)]$
IV. SB_2S'	$A_1A_2B_1$;	$[(S-B_2)\cdot(A_1-A_2)]$;	$[(B_2-S')\cdot(A_2-B_1)]$;	$[(S'-A_1)\cdot(B_1-S)]$;
	$A_1B_1A_2$;	$[(S-B_2)\cdot(A_1-B_1)]$;	$[(B_2-S')\cdot(B_1-A_2)]$;	$[(S'-A_1)\cdot(A_2-S)]$;
	$A_2A_1B_1$;	$[(S-B_2)\cdot(A_2-A_1)]$;	$[(B_2-S')\cdot(A_1-B_1)]$;	$[(S'-A_2)\cdot(B_1-S)]$;
	$A_2B_1A_1$;	$[(S-B_2)\cdot(A_2-B_1)]$;	$[(B_2-S')\cdot(B_1-A_1)]$;	$[(S'-A_2)\cdot(A_1-S)]$;
	$B_1A_1A_2$;	$[(S-B_2)\cdot(B_1-A_1)]$;	$[(B_2-S')\cdot(A_1-A_2)]$;	$[(S'-B_1)\cdot(A_2-S)]$;
	$B_1A_2A_1$;	$[(S-B_2)\cdot(B_1-A_2)]$;	$[(B_2-S')\cdot(A_2-A_1)]$;	$[(S'-B_1)\cdot(A_1-S)]$.

Obschon in § 5. des Kapitels II. mehrere Sätze über das vollständige Sechsseit und Sechseck bewiesen sind, so können wir doch aus ihnen noch keinen Schluß auf die Natur der gesuchten Curven machen. Wir sind daher genöthigt, diese Figuren nochmals einer, und zwar einer eingehenderen Untersuchung zu unterwerfen. Es seien also zwei conforme, projectivisch liegende Punktreihen $s, B_1A_1PA_2B_2T$ und $s', B'_1 A'_1P'A'_2B'_2T'$ nebst den Projectionsstrahlen gegeben, so bilden diese

sechs Geraden, nämlich die Richtungen s und s′ und die vier Projectionsstrahlen a_1, a_2, b_1, b_2, ein vollständiges Sechsseit (s. § 5. Erklärung 3). Es sei nun $sa_1s'a_2b_1b_2$ eines der einfachen, in dem vollständigen Sechsseit enthaltenen einfachen 60 Sechsseite (s. § 5. Erklärung 4. und Erklärung 5), und zwar eines von denen, (s. Tabelle t_1), in welchen s und s′ bezüglich die erste und dritte Seite ist, oder mit anderen Worten, es sei ein einfaches Sechsseit (oder, was bei einfachen Figuren dasselbe ist, ein einfaches Sechseck) $A_1A'_1A'_2$ $(a_2 \cdot b_1)$ $\Pi'B_2$ mit den Ecken $(s \cdot a_1)$; $(a_1 \cdot s')$; $(s' \cdot a_2)$; $(a_2 \cdot b_1)$; $(b_1 \cdot b_2)$; $(b_2 \cdot s)$ gegeben, Fig. 104a., die nach § 5. Erklärung 5. bezüglich als erste, zweite, dritte, vierte, fünfte, sechste bezeichnet werden sollen. Verbindet man nun die dritte und sechste Ecke durch eine Gerade $\mathfrak{w}_1$, zieht von der vierten Ecke $(a_2 \cdot b_1)$ nach der sechsten $(b_2 \cdot s)$ oder B_2, und von der fünften $(b_1 \cdot b_2)$ nach der dritten $(s' \cdot a_2)$ oder A'_2, und zieht dann von $(a_2 \cdot b_1)$ nach der ersten Ecke $(s \cdot a_1)$ oder A_1 eine Gerade $\mathfrak{p}_1$, welche die $\mathfrak{w}_1$ in $\mathfrak{A}_1$ trifft, und von $(b_1 \cdot b_2)$ die Gerade $\mathfrak{t}_1$ nach $(a_1 \cdot s')$, so bemerkt man, daß $\mathfrak{p}_1$ die in der ersten Zeile der obigen Tabelle t_1 durch $[(s \cdot a_1) - (a_2 \cdot b_1)]$, $\mathfrak{t}_1$ die durch $[(a_1 \cdot s') - (b_1 \cdot b_2)]$, $\mathfrak{w}_1$ die durch $[(s' \cdot a_2) - (b_2 \cdot s)]$ bezeichnete Gerade ist. Diese drei aber schneiden sich in einem und demselben Punkte. Da sich nun $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{w}_1$ in $\mathfrak{A}_1$ treffen, so muß also auch $\mathfrak{t}_1$ durch $\mathfrak{A}_1$ gehen. Es entsteht also auf $\mathfrak{w}_1$ eine Punktreihe $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1A'_2B_2$, die conform ist der Punktreihe $s, B_1A_1A_2B_2$ da beide perspectivisch liegen für einen Strahlbüschel mit dem Scheitel $(a_2 \cdot b_1)$ als Projectionscentrum. Zugleich aber ist dieselbe Punktreihe $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1A'_2B_2$ auch conform der Punktreihe $s', B'_1A'_1A'_2B'_2$, da beide für einen Strahlbüschel mit dem Scheitel $(b_1 \cdot b_2)$ perspectivisch liegen (vergl. § 5. Lehrsatz 2). Und zwar fallen die conformen Punktreihen $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1A'_2B_2$ und $s, B_1A_1A_2B_2$ mit den entsprechenden Punkten B_2, also mit dem sechsten des einfachen Sechsseits, die conformen Punktreihen $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1A'_2B_2$ und $s', B'_1A'_1A'_2B'_2$ mit den entsprechenden Punkten A'_2, also dem dritten des einfachen Sechsseits zusammen. Projicirt man nun also von $(a_2 \cdot b_1)$ aus irgend einen Punkt der Reihe s, z. B. den Punkt P auf $\mathfrak{w}_1$, dessen Projection nach $\mathfrak{P}_1$ fällt, so ist also Punktreihe $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1A'_2B_2 \overline{\wedge}\, s, B_1 A_1PA_2B_2$; projicirt man von $(b_1 \cdot b_2)$ den dem Punkt P der Punktreihe s entsprechenden Punkt P′ der Reihe s′ auf $\mathfrak{w}_1$, so muß offenbar die Projection von P′ ebenfalls nach $\mathfrak{P}_1$ fallen. Denn, bezeichnen wir seinen, noch als unbekannt angesehenen Ort, vorläufig durch $\mathfrak{P}'$, so ist, da die Punktreihen s′ und $\mathfrak{w}_1$ für $(b_1 \cdot b_2)$ als Projectionscentrum perspectivisch liegen, Punktreihe $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}'A'_2B_2 \overline{\wedge}\, s', B'_1A'_1P'$ $A'_2B'_2$, und zugleich war $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1A'_2B_2 \overline{\wedge}\, s, B_1A_1PA_2B_2$. Da nun $s', B'_1A'_1P'A'_2B'_2 \overline{\wedge}\, s, B_1A_1PA_2B_2$ ist, so muß auch $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}'A'_2B_2 \overline{\wedge}\, \mathfrak{w}_1, \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}_1A'_2B_2$ sein. Es müssen also nach § 4. Lehrsatz 1., da die auf $\mathfrak{w}_1$ vereinigten conformen Punktreihen mit vier entsprechenden Punkten $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_1$, A'_2, B_2, zusammenfallen, auch

jede zwei entsprechenden Punkte zusammenfallen, folglich muß $\mathfrak{P}'$ nach $\mathfrak{P}_1$ fallen. Projicirt man ebenso von $(a_2 \cdot b_1)$ aus den Punkt T auf $\mathfrak{m}_1$ nach $\mathfrak{T}_1$, so muß demnach auch der Punkt, den man auf $\mathfrak{m}_1$ erhält, wenn man von $(b_1 \cdot b_2)$ den Punkt T' auf diese Gerade projicirt, mit $\mathfrak{T}_1$ zusammenfallen, u. s. f. Zugleich sieht man, daß dieß Verhalten ein nothwendiges ist, da es durch die conforme Theilung der Geraden s und s' und den hieraus entspringenden Umstand hervorgerufen ist, daß sich $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{m}_1$ in einem und demselben Punkt schneiden. Es gilt also ein Gleiches von jedem der übrigen 23 einfachen Sechsseite. Es sei ferner, Fig. 104 b., $SA_1S'A_2B_1B_2$ eines der 60 durch die conformen Strahlbüschel $S,b_1a_1pa_2b_2t$ und $S',b'_1a'_1p'a'_2b'_2t'$ bestimmten einfachen Sechsecke, und zwar eines derjenigen oben (Tabelle T_1) angeführten 24, in denen S und S' bezüglich die erste und dritte Ecke ist. Es ist also nach § 5. Erklärung 5. $SA_1S'A_2B_1B_2$ ein einfaches Sechseck, in welchem $(S - A_1)$, $(A_1 - S')$, $(S' - A_2)$, $(A_2 - B_1)$, $(B_1 - B_2)$, $(B_2 - S)$ bezüglich die erste, zweite, dritte, vierte, fünfte, sechste Seite ist. Sucht man nun den Durchschnitt $\mathcal{M}_1$ der dritten und sechsten Seite, dann den Durchschnitt der vierten Seite $(A_2 - B_1)$ mit der sechsten $(B_2 - S)$ oder b_2, und den der fünften $(B_1 - B_2)$ mit der dritten $(S' - A_2)$ oder a'_2, und bestimmt den Durchschnittspunkt $\mathfrak{P}_1$ von $(A_2 - B_1)$ mit der ersten Seite $(S - A_1)$ oder a_1, und den Durchschnittspunkt $\mathfrak{K}_1$ von $(B_1 - B_2)$ mit $(A_1 - S')$, so sieht man, daß $\mathfrak{P}_1$ der in der obigen Tabelle T_1 durch $[(S - A_1) \cdot (A_2 - B_1)]$, $\mathfrak{K}_1$ der durch $[(A_1 - S') \cdot (B_1 - B_2)]$, $\mathcal{M}_1$ der durch $[(S' - A_2) \cdot (B_2 - S)]$ bezeichnete Punkt ist. Diese drei aber liegen auf derselben Geraden. Es liegen also $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathcal{M}_1$ auf einer und derselben Geraden α_1. Es entsteht also an $\mathcal{M}_1$ als Scheitel ein Strahlbüschel $\mathcal{M}_1,\mathfrak{b}_1\alpha_1a'_2b_2 \overline{\wedge} S,b_1a_1a_2b_2$, da beide perspectivisch liegen für die Gerade $(A_2 - B_1)$ als Axe. Zugleich aber liegt auch $\mathcal{M}_1,\mathfrak{b}_1\alpha_1a'_2b_2$ mit $S',b'_1a'_1a'_2b'_2$ perspectivisch für die Gerade $(B_1 - B_2)$ als Axe, es ist also auch $\mathcal{M}_1,\mathfrak{b}_1\alpha_1a'_2b_2 \overline{\wedge} S',b'_1a'_1a'_2b'_2$; und, wie man sieht, fallen die conformen Strahlbüschel $\mathcal{M}_1,\mathfrak{b}_1\alpha_1a'_2b_2$ und $S,b_1a_1a_2b_2$ mit den entsprechenden Strahlen b_2, also der sechsten Seite des einfachen Sechsecks, die conformen Strahlbüschel $\mathcal{M}_1,\mathfrak{b}_1\alpha_1a'_2b_2$ und $S',b'_1a'_1a'_2b'_2$ mit den entsprechenden Strahlen a'_2, also der dritten Seite des einfachen Sechsecks zusammen. Sucht man nun den Durchschnittspunkt, z. B. des Strahls p mit $(A_2 - B_1)$, und zieht hierhin von $\mathcal{M}_1$ eine Gerade $\mathfrak{p}_1$, so ist sie der dem Strahl p entsprechende Strahl $\mathfrak{p}_1$ am Strahlbüschel $\mathcal{M}_1$, da $\mathcal{M}_1$ und S für $(A_2 - B_1)$ als Axe perspectivisch liegen. Sucht man nun den Durchschnittspunkt von p' mit $(B_1 - B_2)$ und zieht hierhin den, vorläufig als unbekannt gedachten Strahl $\mathfrak{p}'$ von $\mathcal{M}_1$ aus, so ist $\mathfrak{p}'$ der dem Strahl p' entsprechende an $\mathcal{M}_1$, da der Strahlbüschel $\mathcal{M}_1$ und S' für $(B_1 - B_2)$ als Axe perspectivisch liegen. Es ist also Strahlbüschel $\mathcal{M}_1,\mathfrak{b}_1\alpha_1\mathfrak{p}'a'_2b_2 \overline{\wedge} S',b'_1a'_1p'a'_2b'_2$; und zugleich $\mathcal{M}_1,\mathfrak{b}_1\alpha_1\mathfrak{p}_1a'_2b_2 \overline{\wedge} S,b_1a_1pa_2b_2$. Da nun $S',b'_1a'_1p'a'_2b'_2 \overline{\wedge} S,b_1a_1pa_2b_2$ ist, so

muß auch $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{b}_1 \alpha_1 \mathfrak{p}' a'_2 b_2 \,\overline{\wedge}\, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{b}_1 \alpha_1 \mathfrak{p}_1 a'_2 b_2$ sein, es muß also nach § 4. Lehrsatz 1. $\mathfrak{p}'$ mit $\mathfrak{p}_1$ zusammenfallen; und ebenso muß auch der dem Strahl t entsprechende $\mathfrak{t}_1$ zugleich dem Strahl t′ entsprechen. Auch hier sieht man, wie diese Verhältnisse nothwendige, und durch die Conformität der Strahlbüschel S und S′ bedingte sind. Es gilt also dieses Gesetz auch für die übrigen 23 einfachen Sechsecke. Man hat also den

8. Lehrsatz. Unter den 60 einfachen Sechsseiten, welche ein vollständiges Sechsseit enthält, in welchem die Durchschnittspunkte von zwei Seiten, s und s′ mit den übrigen vier Seiten a_1, a_2, b_1, b_2, conforme Punktreihen $s,B_1A_1PA_2B_2T$ und $s',B'_1A'_1 P'A'_2B'_2T'$ bilden, giebt es 24 einfache Sechsseite, in welchen die Richtungen s und s′ bezüglich als erste und dritte Seite angesehen werden können.

9. Lehrsatz. Für jedes dieser 24 einfachen Sechsseite gilt das Gesetz: „Verbindet man die dritte und sechste Ecke durch eine Gerade, und bestimmt auf dieser die Punktreihe, die mit der Punktreihe $s,B_1A_1PA_2B_2T$ auf der ersten Seite s für die vierte Ecke als Projectionscentrum perspectivisch liegt, so liegt dieselbe Punktreihe zugleich mit der Punktreihe $s',B'_1A'_1P'A'_2B'_2T'$ auf der dritten Seite s′ für die fünfte Ecke als Projectionscentrum perspectivisch; und umgekehrt".

Unter der: ersten, zweiten, dritten, ... sechsten Ecke ist dabei bezüglich der Durchschnittspunkt der ersten und zweiten, zweiten und dritten,

8. Lehrsatz. Unter den 60 einfachen Sechsecken, welche ein vollständiges Sechseck enthält, in welchem die Verbindungsgeraden von zwei Ecken S und S′ mit den übrigen vier Ecken A_1, A_2, B_1, B_2, conforme Strahlbüschel $S,b_1a_1pa_2b_2t$ und $S',b'_1a'_1p'a'_2 b'_2t'$ bilden, giebt es 24 einfache Sechsecke, in welchen die Punkte S und S′ bezüglich als erste und dritte Ecke angesehen werden können.

9. Lehrsatz. Für jedes dieser 24 einfachen Sechsecke gilt das Gesetz: „Sucht man den Durchschnittspunkt der dritten und sechsten Seite, und bestimmt an diesem als Scheitel den Strahlbüschel, der mit dem Strahlbüschel $S,b_1a_1pa_2b_1t$ an der ersten Ecke S für die vierte Seite als Projectionsaxe perspectivisch liegt, so liegt derselbe Strahlbüschel zugleich mit dem Strahlbüschel $S',b'_1a'_1 p'a'_2b'_2t'$ an der dritten Ecke S′ für die fünfte Seite als Projectionsaxe perspectivisch; und umgekehrt".

Unter der: ersten, zweiten, dritten, ... sechsten Seite ist dabei bezüglich die Verbindungsgerade der ersten und zweiten, zweiten

dritten und vierten, ... sechsten und ersten Seite zu verstehen. Fig. 104a.

und dritten, dritten und vierten, ... sechsten und ersten Ecke zu verstehen. Fig. 104b.

Wir bezeichnen nun der Uebersicht wegen, in den sechs, die erste Gruppe, also die Gruppe I. in Tabelle t_1 bildenden einfachen Sechsseiten durchgehends die jedesmalige erste der oben angeführten Geraden, die durch einen und denselben Punkt gehen, durch $\mathfrak{p}$, die zweite durch $\mathfrak{v}$, die dritte durch $\mathfrak{m}$, mit angehängten Marken 1., 2., 3., 4., 5., 6., so daß $\mathfrak{p}_1$ die erste der drei oben genannten Geraden im 1sten Sechsseit, $\mathfrak{p}_2$ die erste der drei Geraden im 2ten,.... etc., $\mathfrak{v}_1$ die zweite der drei Geraden im 1sten Sechsseit, $\mathfrak{v}_2$ die im 2ten,.... etc., $\mathfrak{m}_1$ die dritte der drei durch denselben Punkt gehenden Geraden im 1sten, $\mathfrak{m}_2$ die im 2ten.... etc. bedeutet, oder also $\mathfrak{p}_1$ statt $[(s \cdot a_1) - (a_2 \cdot b_1)]$, $\mathfrak{p}_2$ statt $[(s \cdot a_1) - (a_2 \cdot b_2)]$, ..., $\mathfrak{v}_1$ statt $[(a_1 \cdot s') - (b_1 \cdot b_2)]$, $\mathfrak{v}_2$ statt $[(a_1 \cdot s') - (b_2 \cdot b_1)]$, ..., $\mathfrak{m}_1$ statt $[(s' \cdot a_2) - (b_2 \cdot s)]$, $\mathfrak{m}_2$ statt $[(s' \cdot a_2) - (b_1 \cdot s)]$,.... gesetzt wird. Wir wenden ferner für die Sechsseite der zweiten Gruppe, also der Gruppe II. Tabelle t_1 die Buchstaben $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{n}$; für die der dritten: p, r, m; für die der vierten Gruppe w, v, n, bezüglich statt $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{m}$ an. Bei den durch conforme Strahlbüschel erzeugten Sechsecken (siehe Tabelle T_1) gebrauchen wir die analoge Bezeichnung, nur mit großen Buchstaben, für die drei, je auf derselben Geraden liegenden Punkte. Nach dem Bisherigen können wir also für die 24 Sechsseite der ersten Tabelle die Tafel aufstellen: Es ist die

t_2

			Punktreihe auf	perspectivisch mit	für Centrum	und perspectivisch mit	für Centrum
I.	$\mathfrak{m}_1$	d. h.	$[(s' \cdot a_2) - (b_2 \cdot s)]$	s	$(a_2 \cdot b_1)$;	s'	$(b_1 \cdot b_2)$;
	$\mathfrak{m}_2$	"	$[(s' \cdot a_2) - (b_1 \cdot s)]$	s	$(a_2 \cdot b_2)$;	s'	$(b_2 \cdot b_1)$;
	$\mathfrak{m}_3$	"	$[(s' \cdot b_1) - (b_2 \cdot s)]$	s	$(b_1 \cdot a_2)$;	s'	$(a_2 \cdot b_2)$;
	$\mathfrak{m}_4$	"	$[(s' \cdot b_1) - (a_2 \cdot s)]$	s	$(b_1 \cdot b_2)$;	s'	$(b_2 \cdot a_2)$;
	$\mathfrak{m}_5$	"	$[(s' \cdot b_2) - (b_1 \cdot s)]$	s	$(b_2 \cdot a_2)$;	s'	$(a_2 \cdot b_1)$;
	$\mathfrak{m}_6$	"	$[(s' \cdot b_2) - (a_2 \cdot s)]$	s	$(b_2 \cdot b_1)$;	s'	$(b_1 \cdot a_2)$;
II.	$\mathfrak{n}_1$	"	$[(s' \cdot a_1) - (b_2 \cdot s)]$	s	$(a_1 \cdot b_1)$;	s'	$(b_1 \cdot b_2)$;
	$\mathfrak{n}_2$	"	$[(s' \cdot a_1) - (b_1 \cdot s)]$	s	$(a_1 \cdot b_2)$;	s'	$(b_2 \cdot b_1)$;
	$\mathfrak{n}_3$	"	$[(s' \cdot b_1) - (b_2 \cdot s)]$	s	$(b_1 \cdot a_1)$;	s'	$(a_1 \cdot b_2)$;
	$\mathfrak{n}_4$	"	$[(s' \cdot b_1) - (a_1 \cdot s)]$	s	$(b_1 \cdot b_2)$;	s'	$(b_2 \cdot a_1)$;
	$\mathfrak{n}_5$	"	$[(s' \cdot b_2) - (b_1 \cdot s)]$	s	$(b_2 \cdot a_1)$;	s'	$(a_1 \cdot b_1)$;
	$\mathfrak{n}_6$	"	$[(s' \cdot b_2) - (a_1 \cdot s)]$	s	$(b_2 \cdot b_1)$;	s'	$(b_1 \cdot a_1)$;

			Punktreihe auf	perspectivisch mit	für Centrum	und perspectivisch mit	für Centrum
III.	m_1	d. h.	$[(s' \cdot a_1) - (b_2 \cdot s)]$	s	$(a_1 \cdot a_2)$;	s'	$(a_2 \cdot b_2)$;
	m_2	„	$[(s' \cdot a_1) - (a_2 \cdot s)]$	s	$(a_1 \cdot b_2)$;	s'	$(b_2 \cdot a_2)$;
	m_3	„	$[(s' \cdot a_2) - (b_2 \cdot s)]$	s	$(a_2 \cdot a_1)$;	s'	$(a_1 \cdot b_2)$;
	m_4	„	$[(s' \cdot a_2) - (a_1 \cdot s)]$	s	$(a_2 \cdot b_2)$;	s'	$(b_2 \cdot a_1)$;
	m_5	„	$[(s' \cdot b_2) - (a_2 \cdot s)]$	s	$(b_2 \cdot a_1)$;	s'	$(a_1 \cdot a_2)$;
	m_6	„	$[(s' \cdot b_2) - (a_1 \cdot s)]$	s	$(b_2 \cdot a_2)$;	s'	$(a_2 \cdot a_1)$;
IV.	n_1	„	$[(s' \cdot a_1) - (b_1 \cdot s)]$	s	$(a_1 \cdot a_2)$;	s'	$(a_2 \cdot b_1)$;
	n_2	„	$[(s' \cdot a_1) - (a_2 \cdot s)]$	s	$(a_1 \cdot b_1)$;	s'	$(b_1 \cdot a_2)$;
	n_3	„	$[(s' \cdot a_2) - (b_1 \cdot s)]$	s	$(a_2 \cdot a_1)$;	s'	$(a_1 \cdot b_1)$;
	n_4	„	$[(s' \cdot a_2) - (a_1 \cdot s)]$	s	$(a_2 \cdot b_1)$;	s'	$(b_1 \cdot a_1)$;
	n_5	„	$[(s' . b_1) - (a_2 \cdot s)]$	s	$(b_1 \cdot a_1)$;	s'	$(a_1 \cdot a_2)$;
	n_6	„	$[(s' \cdot b_1) - (a_1 \cdot s)]$	s	$(b_1 \cdot a_2)$;	s'	$(a_2 \cdot a_1)$;

Ebenso können wir für die 24 Sechsecke der zweiten Tabelle die Tafel aufstellen: Es ist der

T_2

			Strahlbüschel an	perspectivisch mit	für Axe	und perspectivisch mit	für Axe
I.	$\mathfrak{M}_1$	d. h.	$[(S'-A_2) \cdot (B_2-S)]$	S	(A_2-B_1);	S'	(B_1-B_2);
	$\mathfrak{M}_2$	„	$[(S'-A_2) \cdot (B_1-S)]$	S	(A_2-B_2);	S'	(B_2-B_1);
	$\mathfrak{M}_3$	„	$[(S'-B_1) \cdot (B_2-S)]$	S	(B_1-A_2);	S'	(A_2-B_2);
	$\mathfrak{M}_4$	„	$[(S'-B_1) \cdot (A_2-S)]$	S	(B_1-B_2);	S'	(B_2-A_2);
	$\mathfrak{M}_5$	„	$[(S'-B_2) \cdot (B_1-S)]$	S	(B_2-A_2);	S'	(A_2-B_1);
	$\mathfrak{M}_6$	„	$[(S'-B_2) \cdot (A_2-S)]$	S	(B_2-B_1);	S'	(B_1-A_2);
II.	$\mathfrak{N}_1$	„	$[(S'-A_1) \cdot (B_2-S)]$	S	(A_1-B_1);	S'	(B_1-B_2);
	$\mathfrak{N}_2$	„	$[(S'-A_1) \cdot (B_1-S)]$	S	(A_1-B_2);	S'	(B_2-B_1);
	$\mathfrak{N}_3$	„	$[(S'-B_1) \cdot (B_2-S)]$	S	(B_1-A_1);	S'	(A_1-B_2);
	$\mathfrak{N}_4$	„	$[(S'-B_1) \cdot (A_1-S)]$	S	(B_1-B_2);	S'	(B_2-A_1);
	$\mathfrak{N}_5$	„	$[(S'-B_2) \cdot (B_1-S)]$	S	(B_2-A_1);	S'	(A_1-B_1);
	$\mathfrak{N}_6$	„	$[(S'-B_2) \cdot (A_1-S)]$	S	(B_2-B_1);	S'	(B_1-A_1);
III.	M_1	„	$[(S'-A_1) \cdot (B_2-S)]$	S	(A_1-A_2);	S'	(A_2-B_2);
	M_2	„	$[(S'-A_1) \cdot (A_2-S)]$	S	(A_1-B_2);	S'	(B_2-A_2);
	M_3	„	$[(S'-A_2) \cdot (B_2-S)]$	S	(A_2-A_1);	S'	(A_1-B_2);
	M_4	„	$[(S'-A_2) \cdot (A_1-S)]$	S	(A_2-B_2);	S'	(B_2-A_1);
	M_5	„	$[(S'-B_2) \cdot (A_2-S)]$	S	(B_2-A_1);	S'	(A_1-A_2);
	M_6	„	$[(S'-B_2) \cdot (A_1-S)]$	S	(B_2-A_2);	S'	(A_2-A_1);

		Strahlbüschel an	perspectivisch mit	für Axe	und perspectivisch mit	für Axe
IV. N_1	d. h.	$[(S'-A_1)\cdot(B_1-S)]$	S	(A_1-A_2);	S'	(A_2-B_1);
N_2	„	$[(S'-A_1)\cdot(A_2-S)]$	S	(A_1-B_1);	S'	(B_1-A_2);
N_3	„	$[(S'-A_2)\cdot(B_1-S)]$	S	(A_2-A_1);	S'	(A_1-B_1);
N_4	„	$[(S'-A_2)\cdot(A_1-S)]$	S	(A_2-B_1);	S'	(B_1-A_1);
N_5	„	$[(S'-B_1)\cdot(A_2-S)]$	S	(B_1-A_1);	S'	(A_1-A_2);
N_6	„	$[(S'-B_1)\cdot(A_1-S)]$	S	(B_1-A_2);	S'	(A_2-A_1).

Vergleichen wir jetzt die Richtungen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, m, n, auf denen Punktreihen sich befinden, die für jede der beiden, die Curve K'_1 erzeugenden, Punktreihen s und s′ perspectivisch liegen, und ebenso die Punkte $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, M, N, von denen Strahlbüschel ausgehen, die mit jedem der beiden, die Curve k_1 erzeugenden Strahlbüschel perspectivisch liegen, so sehen wir mit Hülfe der hinter jedes $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, m, n; $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, M, N, gesetzten Parenthese, daß je zwei identisch sind, z. B. $\mathfrak{m}_1$ ist die Gerade $[(s'\cdot a_2)-(b_2\cdot s)]$ und m_3 ist ebenfalls die Gerade $[(s'\cdot a_2)-(b_2\cdot s)]$; u. s. w. Kurz, man überzeugt sich, daß identisch sind:

die Geraden:	die Punkte:
$\mathfrak{m}_1$ und m_3; $\mathfrak{m}_5$ und $\mathfrak{n}_5$; $\mathfrak{n}_4$ und n_6;	$\mathfrak{M}_1$ und M_3; $\mathfrak{M}_5$ und $\mathfrak{N}_5$; $\mathfrak{N}_4$ und N_6;
$\mathfrak{m}_2$ n_3; $\mathfrak{m}_6$ m_5; $\mathfrak{n}_6$ m_6;	$\mathfrak{M}_2$ N_3; $\mathfrak{M}_6$ M_5; $\mathfrak{N}_6$ M_6;
$\mathfrak{m}_3$ $\mathfrak{n}_3$; $\mathfrak{n}_1$ m_1; m_2 n_2;	$\mathfrak{M}_3$ $\mathfrak{N}_3$; $\mathfrak{N}_1$ M_1; M_2 N_2;
$\mathfrak{m}_4$ n_5; $\mathfrak{n}_2$ n_1; m_4 n_4;	$\mathfrak{M}_4$ N_5; $\mathfrak{N}_2$ N_1; M_4 N_4.

Diese 12 Geraden und Punkte theilen wir in drei Quaternionen. Dieselben sind bei den

Geraden:		Punkten:	
I.	$\mathfrak{m}_6$ $\mathfrak{n}_4$ m_3 n_1	I.	$\mathfrak{M}_6$ $\mathfrak{N}_4$ M_3 N_1
oder:	m_5 n_4 $\mathfrak{m}_1$ $\mathfrak{n}_2$		M_5 N_6 $\mathfrak{M}_1$ $\mathfrak{N}_2$.
II.	$\mathfrak{m}_4$ $\mathfrak{n}_6$ m_1 n_3	II.	$\mathfrak{M}_4$ $\mathfrak{N}_6$ M_1 N_3
oder:	n_5 m_6 $\mathfrak{n}_1$ $\mathfrak{m}_2$		N_5 M_6 $\mathfrak{N}_1$ $\mathfrak{M}_2$.
III.	$\mathfrak{m}_5$ $\mathfrak{m}_3$ m_2 m_4	III.	$\mathfrak{M}_5$ $\mathfrak{M}_3$ M_2 M_4
oder:	$\mathfrak{n}_5$ $\mathfrak{n}_3$ n_2 n_4		$\mathfrak{N}_5$ $\mathfrak{N}_3$ N_2 N_4.

Betrachten wir nun zunächst die Geraden der ersten Quaternion, $\mathfrak{m}_6$, $\mathfrak{n}_4$, m_3, n_1. Zunächst sehen wir, daß der Durchschnittspunkt $(n_1\cdot m_3)$ auf $(P'-T)$ oder τ liegt. Denn nach Lehrsatz 6. ist, Fig. 105 a., Strahlbüschel $(b_1\cdot b_2)$, $\beta' b_1 \tau b_2$ und $(a_1\cdot a_2)$, $\alpha' a_1 \tau a_2$, also auch die Punktreihen $s, PB_1 TB_2$ und $s', T'A'_1 P'A'_2$ harmonisch. Sie sind also conform, und da das Doppelverhältniß $\frac{PB_1}{TB_1}:\frac{PB_2}{TB_2}=1$ und $\frac{T'A'_1}{P'A'_1}:\frac{T'A'_2}{P'A'_2}=1$ ist, können wir P und T′, B_1 und A'_1, T und P′, B_2

und A'_2 als entsprechende Punkte betrachten. Nun fallen die Punktreihen mit den entsprechenden Punkten P und T′ zusammen; sie liegen also nach § 3. Lehrsatz 2. ß. perspectivisch; es müssen sich also $(B_1 - A'_1)$, $(T - P')$, $(B_2 - A'_2)$ in einem und demselben Punkte schneiden. Aber $(B_1 - A'_1)$ ist nichts anderes, als die oben in der Tabelle t_1 durch $[(s' \cdot a_1) - (b_1 \cdot s)]$ bezeichnete Gerade, oder n_1, $(T - P')$ ist τ, $(B_2 - A'_2)$ ist die oben durch $[(s' \cdot a_2) - (b_2 \cdot s)]$ bezeichnete Gerade, oder m_3. Es schneiden sich also n_1, τ, m_3 in einem und demselben Punkt, oder der Punkt $(n_1 \cdot m_3)$ oder $\mathfrak{T}$ liegt auf τ. Nach der zweiten der oben für die die Curve K'_1 erzeugenden Punktreihen aufgestellten Tabelle t_2 ist nun im ersten Sechsseit der vierten Gruppe, also im Sechsseit $sb_2s'a_1a_2b_1$, n_1 die dritte der drei durch denselben Punkt $\mathfrak{B}_1$ gehenden Geraden w_1, v_1, n_1; (vergl. Tabelle t_1). Projiciren wir nun der Tabelle t_2 zufolge von der Ecke $(a_1 \cdot a_2)$ aus die Punktreihe $s,B_1A_1PA_2B_2T$ auf n_1, so daß wir daselbst die Punktreihe $n_1,B_1A'_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{T}$ erhalten, so liegt nach Lehrsatz 9. dieselbe auch perspectivisch mit $s',B'_1A'_1P'A'_2B'_2T'$ für $(a_2 \cdot b_1)$ als Projectionscentrum. Nach der Tabelle t_1 ist nun im dritten Sechsseit der dritten Gruppe, also im Sechsseit $sb_1s'a_2a_1b_2$, m_3 die dritte der drei durch denselben Punkt $\mathfrak{B}_3$ gehenden Geraden p_3, r_3, m_3. Projiciren wir nun der Tabelle t_2 zufolge von der Ecke $(a_1 \cdot a_2)$ aus die Punktreihe $s,B_1A_1PA_2B_2T$ auf m_3, so daß wir auf m_3 die Punktreihe $m_3,\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{P}_3A'_2B_2\mathfrak{T}$ erhalten, so liegt nach Lehrsatz 9. dieselbe auch perspectivisch mit $s',B'_1A'_1P'A'_2B'_2T'$ für den Punkt $(a_1 \cdot b_2)$ als Projectionscentrum. Es liegen nun offenbar die Strahlbüschel $(a_2 \cdot b_1)$, $B_1A'_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{T}$ und $(a_1 \cdot b_2)$, $\mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{P}_3A'_2B_2\mathfrak{T}$*) perspectivisch für die Gerade s′, denn projicirt man die Punktreihe $s',B'_1A'_1P'A'_2B'_2T'$ von $(a_2 \cdot b_1)$ auf n_1, so schneiden die Strahlen die n_1 in B_1, A'_1, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{T}$, projicirt man $s',B'_1A'_1P'A'_2B'_2T'$ von $(a_1 \cdot b_2)$ auf m_3, so treffen die Strahlen die m_3 in $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{P}_3$, A'_2, B_2, $\mathfrak{T}$. Es schneiden sich also je zwei entsprechende Strahlen der Strahlbüschel an $(a_2 \cdot b_1)$ und $(a_1 \cdot b_2)$ in den Punkten B'_1, A'_1, P′, A'_2, B'_2, T′ der Geraden s′. Folglich liegen beide Strahlbüschel perspectivisch für s′ als Projectionsaxe. Es fallen daher in der Verbindungsgeraden ihrer Scheitel $(a_2 \cdot b_1)$ und $(a_1 \cdot b_2)$ ein Paar entsprechende Strahlen zusammen. Es ist nun leicht, die Verbindungsgerade ihrer Scheitel näher zu bestimmen. Zieht man nämlich von $(a_2 \cdot b_1)$ den Strahl nach T′, so geht derselbe durch den Punkt $\mathfrak{T}$ der Geraden n_1, nämlich im Durchschnittspunkt von n_1 mit τ, weil Punktreihe n_1 mit s′ für das Projectionscentrum $(a_2 \cdot b_1)$ perspectivisch liegt. Zieht man von

*) Ein Strahlbüschel wird hier, und im Folgenden noch mehrmals der Kürze wegen so bezeichnet, daß hinter seinem Scheitel Punkte genannt werden, durch die seine Strahlen gehen. So bedeutet z. B. $(a_2 \cdot b_1)$, $B_1A'_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{T}$ einen Strahlbüschel, dessen Scheitel $(a_2 \cdot b_1)$ ist und dessen Strahlen die Verbindungsgeraden von $(a_2 \cdot b_1)$ mit den Punkten B_1, A'_1, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{T}$ sind u. s. f.

$(a_1 \cdot b_2)$ den diesem Strahl entsprechenden, so geht er zunächst ebenfalls durch T', sodann schneidet er die m_3 im Durchschnittspunkte $\mathfrak{T}$ mit τ, weil Punktreihe m_3 mit s' für $(a_1 . b_2)$ als Centrum perspectivisch liegt. Es haben also beide entsprechende Strahlen zwei Punkte, T' und $\mathfrak{T}$ gemein, und folglich fallen sie in eine Gerade zusammen. Oder mit anderen Worten: die Gerade $[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$, die durch γ' bezeichnet werden soll, geht durch T' oder $(s \cdot s')$ und durch $\mathfrak{T}$ oder $(n_1 \cdot m_3)$, welcher letztere Punkt auf τ liegt. — Was nun die beiden anderen Geraden $\mathfrak{u}_4$, $\mathfrak{w}_6$ der ersten Quaternion angeht, so ist ebenfalls leicht zu sehen, daß sie sich auf τ schneiden müssen. Denn nach Lehrsatz 6. sind die Strahlbüschel $(a_1 \cdot a_2)$, $\alpha' a_1 \tau a_2$ und $(b_1 \cdot b_2)$, $\tau b_1 \beta' b_2$ harmonisch, also conform, folglich auch die Punktreihen $s, PA_1 TA_2$ und $s', T'B'_1 P'B'_2$ harmonisch, also conform. Da sie aber mit einem Paar entsprechender Punkte P und T' zusammenfallen, liegen sie perspectivisch, es schneiden sich also $(A_1 - B'_1)$, $(T - P')$, $(A_2 - B'_2)$, oder $[(s' \cdot b_1) - (a_1 \cdot s)]$, $(P - T')$, $[(s' \cdot b_2) - (a_2 \cdot s)]$, d. h. $\mathfrak{u}_4$, τ, $\mathfrak{w}_6$ in einem und demselben Punkte, oder, der Durchschnittspunkt $(\mathfrak{u}_4 \cdot \mathfrak{w}_6)$, der $\mathfrak{T}'$ heißen mag, liegt auf τ. Nach der zweiten der für die die Curve K'_1 erzeugenden Punktreihen aufgestellten Tabelle t_2 ist nun im vierten Sechsseit der zweiten Gruppe, also im Sechsseit $sa_2 s'b_1 b_2 a_1$, $\mathfrak{u}_4$ die dritte der drei durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{A}_4$ gehenden Geraden $\mathfrak{x}_4$, $\mathfrak{v}_4$, $\mathfrak{u}_4$, und im sechsten Sechsseit der ersten Gruppe, also im Sechsseit $sa_1 s'b_2 b_1 a_2$ ist $\mathfrak{w}_6$ die dritte der drei durch denselben Punkt $\mathfrak{A}_6$ gehenden Geraden $\mathfrak{p}_6$, $\mathfrak{v}_6$, $\mathfrak{w}_6$. Projiciren wir nun dieser Tabelle t_2 zufolge von $(b_1 \cdot b_2)$ aus die Punktreihe $s, B_1 A_1 P A_2 B_2 T$ auf $\mathfrak{u}_4$, so liegt die so erhaltene Punktreihe $\mathfrak{u}_4, B'_1 A_1 \mathfrak{P}_4 \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_4 \mathfrak{T}'$ auch perspectivisch mit $s', B'_1 A'_1 P' A'_2 B'_2 T'$ für den Punkt $(b_2 \cdot a_1)$ als Projectionscentrum, und projiciren wir der Tabelle t_2 zufolge die Punktreihe $s, B_1 A_1 P A_2 B_2 T$ von $(b_1 \cdot b_2)$ aus auf $\mathfrak{w}_6$, so liegt die so erhaltene Punktreihe $\mathfrak{w}_6, \mathfrak{B}_6 \mathfrak{A}_6 \mathfrak{P}_6 A_2 B'_2 \mathfrak{T}'$ auch perspectivisch mit $s', B'_1 A'_1 P' A'_2 B'_2 T'$ für den Punkt $(b_1 \cdot a_2)$ als Projectionscentrum. Auch hier liegen offenbar die Strahlbüschel $(b_2 \cdot a_1)$, $B'_1 A_1 \mathfrak{P}_4 \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_4 \mathfrak{T}'$ und $(b_1 \cdot a_2)$, $\mathfrak{B}_6 \mathfrak{A}_6 \mathfrak{P}_6 A_2 B'_2 \mathfrak{T}'$ für die Gerade s' als Projectionsaxe perspectivisch. Es sind also in der Verbindungsgeraden ihrer Scheitel ein Paar entsprechende Strahlen vereinigt. Zieht man nun von $(b_2 \cdot a_1)$ nach T', so geht dieser Strahl auch durch $\mathfrak{T}'$, weil Punktreihe $\mathfrak{u}_4$ mit s' für $(b_2 \cdot a_1)$ perspectivisch liegt; und sucht man den ihm entsprechenden Strahl des Büschels an $(b_1 \cdot a_2)$ so muß derselbe sowohl durch T' als durch $\mathfrak{T}'$ gehen, da Punktreihe $\mathfrak{w}_6$ mit s' für $(b_1 \cdot a_2)$ perspectivisch liegt. Es haben also beide Strahlen zwei Punkte, T' und $\mathfrak{T}'$ gemein und fallen daher zusammen. Sie sind daher die Verbindungsgeraden der Scheitel der beiden perspectivisch liegenden Strahlbüschel, oder es geht $[(b_1 \cdot a_2) - (b_2 \cdot a_1)]$ durch T' und durch $\mathfrak{T}'$, welches letztere auf τ in $(\mathfrak{u}_4 \cdot \mathfrak{w}_6)$ liegt. Es ist aber $[(b_1 \cdot a_2) - (b_2 \cdot a_1)]$ γ', dieses aber schneidet τ in $\mathfrak{T}$; es muß also, da $\mathfrak{T}'$ auch auf γ' und auf τ liegen muß, $\mathfrak{T}'$ mit $\mathfrak{T}$ zusammen-

fallen. Es ist also der Punkt $\mathfrak{T}$ der Geraden τ sowohl der Durchschnittspunkt $(n_1 \cdot m_3)$ von n_1 und m_3, als der Durchschnittspunkt $(\mathfrak{n}_4 \cdot \mathfrak{m}_6)$ von $\mathfrak{n}_4$ und $\mathfrak{m}_6$, oder es gehen die vier Geraden der ersten Quaternion $\mathfrak{m}_6$, $\mathfrak{n}_4$ m_3, n_1 durch $\mathfrak{T}$, d. h. durch $(\gamma' \cdot \tau)$. Ebenso überzeugt man sich, daß die Geraden $\mathfrak{m}_4$, $\mathfrak{n}_6$, m_1, n_3 der zweiten Quaternion durch einen und denselben Punkt auf τ gehen, nämlich durch den Punkt, in welchem die Gerade $[(a_1 \cdot b_1) - (a_2 \cdot b_2)]$, die durch γ bezeichnet werden mag, die τ schneidet; es geht also $\mathfrak{m}_4$, $\mathfrak{n}_6$, m_1, n_3 durch $(\tau \cdot \gamma)$. Wir stellen dieß Gesetz vor der Hand kurz dar, indem wir sagen: es ist

$$(\mathfrak{m}_6 \cdot \mathfrak{n}_4) = (\mathfrak{m}_6 \cdot m_3) = (\mathfrak{m}_6 \cdot n_1) = (\mathfrak{n}_4 \cdot m_3) = (\mathfrak{n}_4 \cdot n_1) = (m_3 \cdot n_1) = (\tau \cdot \gamma')$$
$$(\mathfrak{m}_4 \cdot \mathfrak{n}_6) = (\mathfrak{m}_4 \cdot m_1) = (\mathfrak{m}_4 \cdot n_3) = (\mathfrak{n}_6 \cdot m_1) = (\mathfrak{n}_6 \cdot n_3) = (m_1 \cdot n_3) = (\tau \cdot \gamma);$$
$\gamma' = [(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$; $\gamma = [(a_1 \cdot b_1) - (a_2 \cdot b_2)]$; γ' und γ gehen durch $(s \cdot s')$.

Da ferner die Punkte $(\mathfrak{n}_4 \cdot s)$, $(\mathfrak{n}_4 \cdot s')$, $(n_1 \cdot s')$, $(n_1 \cdot s)$ ein vollständiges Viereck $A_1 B'_1 A'_1 B_1$ bilden, in welchem also die Diagonale γ' in $(a_1 \cdot b_2)$, $(s \cdot s')$, $(a_2 . b_1)$, $(\tau \cdot \gamma')$ harmonisch getheilt wird, nach § 3. Lehrsatz 17., so wird auch die mit ihr für den Strahlbüschel $(a_1 \cdot b_1)$ perspectivisch liegende Gerade n_1 in A'_1; $(n_1 \cdot \gamma)$; B_1; $(n_1 \cdot \gamma')$ harmonisch getheilt, folglich ist der durch diese Punkte gehende Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $s' \gamma s \gamma'$ oder der

Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $s \gamma s' \gamma'$ harmonisch.

Betrachten wir jetzt die analogen Verhältnisse bei den die Curve k_1 erzeugenden Strahlbüscheln, indem wir die erste Quaternion, nämlich die Punkte $\mathfrak{M}_6$, $\mathfrak{N}_4$, M_3, N_1 in Rücksicht auf ihre Lage untersuchen. Nach Lehrsatz 6. ist, Fig. 105 b., Punktreihe: $(B_1 - B_2)$, $B' B_1 T B_2$ und $(A_1 - A_2)$, $A' A_1 T A_2$, also auch Strahlbüschel $S, p b_1 t b_2$ und $S', t' a'_1 p' a'_2$ harmonisch; sie sind also conform, und da p und t' zusammenfallen, liegen sie perspectivisch, es liegen also $(b_1 \cdot a'_1)$, $(t \cdot p')$, $(b_2 \cdot a'_2)$, d. h. der obigen Tabelle T_1 nach, N_1, T, M_3 auf einer und derselben Geraden. Es geht also $(M_3 - N_1)$ oder $\mathfrak{t}$ durch T. Nun liegen im ersten Sechseck der vierten Gruppe, also im Sechseck $S B_2 S' A_1 A_2 B_1$ die drei Punkte W_1, V_1, N_1 auf derselben Geraden $\mathfrak{b}_1$. Projiciren wir nun der zweiten für die Strahlbüschel aufgestellten Tabelle T_2 zufolge den Strahlbüschel $S, b_1 a_1 p a_2 b_2 t$ auf die Gerade $(A_1 - A_2)$ und construiren den ihm perspectivisch liegenden Strahlbüschel mit dem Scheitel N_1, wodurch man den Strahlbüschel $N_1, b_1 a'_1 \mathfrak{p}_1 \alpha_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{t}$ erhält, so liegt derselbe nach Lehrsatz 9. auch mit dem Strahlbüschel $S', b'_1 a'_1 p' a'_2 b'_2 t'$ für die Axe $(A_2 - B_1)$ perspectivisch. Nach der Tabelle T_1 liegen im dritten Sechsseit $S B_1 S' A_2 A_1 B_2$ der dritten Gruppe die drei Punkte P_3, R_3, M_3 auf derselben Geraden $\mathfrak{b}_3$. Construirt man nun von M_3 als Scheitel aus einen Strahlbüschel $M_3, \mathfrak{b}_3 \alpha_3 \mathfrak{p}_3 a'_2 b_2 \mathfrak{t}$, so liegt derselbe nach Lehrsatz 9. auch mit dem Strahlbüschel $S', b'_1 a'_1 p' a'_2 b'_2 t'$ für $(A_1 - B_2)$ als Axe perspectivisch. Nun liegen offenbar

die Punktreihen $(A_2 - B_1)$, $b_1 a'_1 \mathfrak{p}_1 \alpha_1 \beta_1 \mathfrak{t}$ und $(A_1 - B_2)$, $\beta_3 \alpha_3 \mathfrak{p}_3 a'_2 b_2 \mathfrak{t}$*) für den Strahlbüschel S' perspectivisch. Es fallen also in ihrem Durchschnittspunkte ein Paar entsprechende Punkte zusammen. Es ist nun leicht diesen Durchschnittspunkt genauer anzugeben. Denn die Punkte der Punktreihe auf $(A_2 - B_1)$ sind die Durchschnittspunkte der Strahlen der Strahlbüschel S', $b'_1 a'_1 p' a'_2 b'_2 t'$ und N_1, $b_1 a'_1 \mathfrak{p}_1 \alpha_1 \beta_1 \mathfrak{t}$, die Punkte der Punktreihe auf $(A_1 - B_2)$ sind die Durchschnittspunkte der Strahlen der Strahlbüschel S', $b'_1 a'_1 p' a'_2 b'_2 t'$ und M_3, $\beta_3 \alpha_3 \mathfrak{p}_3 a'_2 b_2 \mathfrak{t}$. Bestimmt man nun den Durchschnittspunkt von $(A_2 - B_1)$ mit dem Strahl t', so muß dieser Durchschnittspunkt auch auf dem Strahl $\mathfrak{t}$ des Strahlbüschels N_1 liegen, da S' und N_1 für $(A_2 - B_1)$ perspectivisch sind. Bestimmt man den ihm homologen Punkt auf $(A_1 - B_2)$, so muß derselbe ebenfalls auf t' liegen, da die Punktreihen $(A_2 - B_1)$ und $(A_1 - B_2)$ für S' perspectivisch liegen, und zugleich auf $\mathfrak{t}$, da S' und M_3 für $(A_1 - B_2)$ perspectivisch liegen, und der Strahl $\mathfrak{t}$ in N_1 und M_3 ein selbst entsprechender ist. Es muß also der dem auf $(A_2 - B_1)$ liegenden Punkte entsprechende auf $(A_1 - B_2)$ liegende sowohl auf t' als auf $\mathfrak{t}$ mit demselben liegen. Es müssen daher $(A_2 - B_1)$ und $(A_1 - B_2)$ den Punkt $(t' \cdot \mathfrak{t})$ gemein haben, oder sich in dem Punkte $(t' \cdot \mathfrak{t})$ schneiden. Es ist aber t' die Verbindungsgerade $(S - S')$, und $\mathfrak{t}$ die Verbindungsgerade $(N_1 - M_3)$. Bezeichnen wir nun den Durchschnittspunkt $[(A_1 - B_2) \cdot (A_2 - B_1)]$ durch Γ', so muß also Γ' auf t' oder $(S - S')$ und auf $\mathfrak{t}$ oder $(N_1 - M_3)$, welche letztere durch T geht, liegen. Man sieht, daß dieser Beweis den bei Punktreihen geführten ganz analog ist, indem man dort nur statt „Punktreihe": „Strahlbüschel" und umgekehrt, statt „Durchschnittspunkt": „Verbindungerade" und umgekehrt, statt „durch denselben Punkt gehen": „auf derselben Geraden liegen" und umgekehrt, statt der kleinen Buchstaben große und umgekehrt, zu setzen hat. Es zeigt sich nun ebenso wie bei N_1 und M_3, und analog dem bei Punktreihen geführten Beweise, daß auch $(\mathfrak{N}_4 - \mathfrak{M}_6)$ oder $\mathfrak{t}'$ durch T gehen und daß der Durchschnittspunkt von $(B_1 - A_2)$ und $(B_2 - A_1)$ in $(t' \cdot \mathfrak{t}')$ liegen muß. Es ist aber der Durchschnittspunkt von $(B_1 - A_2)$ und $(B_2 - A_1)$ identisch mit dem Durchschnittspunkt von $(A_1 - B_2)$ und $(A_2 - B_1)$ oder mit Γ'. Es muß also Γ' in $(t' \cdot \mathfrak{t}')$ liegen, oder $\mathfrak{t}'$ muß durch Γ' gehen; es muß aber auch $\mathfrak{t}'$ durch T gehen, und also mit $\mathfrak{t}$, welche ebenfalls durch Γ' und T ging, zusammenfallen. Es müssen also N_1, M_3, $\mathfrak{N}_4$, $\mathfrak{M}_6$ auf derselben Geraden $\mathfrak{t}$ oder $(T - \Gamma')$ liegen. — Ebenso überzeugt man sich, daß die Punkte $\mathfrak{M}_4$, $\mathfrak{N}_6$, M_1, N_3 der zweiten Quaternion auf $(T - \Gamma)$ liegen müssen, wenn man mit Γ den Durchschnittspunkt von $(A_1 - B_1)$ mit $(A_2 - B_2)$ bezeichnet. Wir sagen daher vor der Hand kurz: Es ist:

*) Eine Punktreihe wird hier und im Folgenden noch mehrmals der Kürze wegen so bezeichnet, daß hinter der Bezeichnung ihrer Richtung, Gerade genannt werden, auf denen ihre Punkte liegen. So bedeutet z. B. $(A_1 - B_1)$, $b_1 a_1 \mathfrak{p}_1 \alpha_1 \beta_1 \mathfrak{t}$ die Punktreihe, die auf der Geraden $(A_2 - B_1)$ liegt, und deren Punkte die Durchschnittspunkte von $(A_2 - B_1)$ mit den Geraden b_1, a_1, $\mathfrak{p}_1$, α_1, β_1, $\mathfrak{t}$ sind u. s. f.

$$(\mathfrak{M}_6 - \mathfrak{N}_4) = (\mathfrak{M}_6 - M_3) = (\mathfrak{M}_6 - N_1) = (\mathfrak{N}_4 - M_3) = (\mathfrak{N}_4 - N_1)$$
$$= (M_3 - N_1) = (T - \Gamma')$$
$$(\mathfrak{M}_4 - \mathfrak{N}_6) = (\mathfrak{M}_4 - M_1) = (\mathfrak{M}_4 - N_3) = (\mathfrak{N}_6 - M_1) = (\mathfrak{N}_6 - N_3)$$
$$= (M_1 - N_3) = (T - \Gamma);$$

$\Gamma' = [(A_1 - B_2) \cdot (A_2 - B_1)]$; $\Gamma = [(A_1 - B_1) \cdot (A_2 - B_2)]$; Γ und Γ' liegen auf $(S - S')$.

Da ferner die Geraden $(\mathfrak{N}_4 - S)$, $(\mathfrak{N}_4 - S')$, $(N_1 - S)$, $(N_1 - S')$ ein vollständiges Vierseit $a_1 b'_1 a'_1 b_1$ bilden, in welchem Γ' der Scheitel eines harmonischen Strahlbüschels mit den Strahlen $(A_1 - B_2)$, $(S - S')$, $(A_2 - B_1)$, $(T - \Gamma')$ ist, so ist der mit ihm für die Gerade $(A_1 - B_1)$ perspectivisch liegende Strahlbüschel mit dem Scheitel N_1 und den Strahlen a'_1, $(N_1 - \Gamma)$, b_1, $(N_1 - \Gamma')$ harmonisch, folglich die durch ihn bestimmte Punktreihe $(S - S')$, $S'\Gamma S \Gamma'$ oder die

Punktreihe $(S - S')$, $S\Gamma S'\Gamma'$ harmonisch.

Es bleibt nun noch die dritte Quaternion, nämlich $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{m}_5$, m_2, m_4, oder $\mathfrak{n}_3$, $\mathfrak{n}_5$, n_2, n_4 zu betrachten übrig. Nach der obigen für Punktreihen geltenden Tabelle t_2 schneiden sich im fünften Sechsseit der ersten Gruppe die drei Geraden $\mathfrak{p}_5$, $\mathfrak{r}_5$, $\mathfrak{m}_5$ in demselben Punkte $\mathfrak{A}_5$, Fig. 106a, und wenn man die Punktreihe $s, B_1 A_1 P A_2 B_2 T$ von $(a_2 \cdot b_2)$ aus auf $\mathfrak{m}_5$ projicirt, ist die so erhaltene Punktreihe $\mathfrak{m}_5, B_1 \mathfrak{A}_5 \mathfrak{P}_5 \mathfrak{A}'_5 B'_2 \mathfrak{T}_5$ zugleich conform und perspectivisch für $(a_2 \cdot b_1)$ als Projectionscentrum mit der Punktreihe $s', B'_1 A'_1 P' A'_2 B'_2 T'$, nach Lehrsatz 9. Ebenso schneiden sich im vierten Sechsseit der dritten Gruppe die Geraden p_4, r_4, m_4 (p_4 und r_4 sind in der Figur nicht gezogen) in demselben Punkt $\mathfrak{B}_4$, und, wenn man die Punktreihe $s, B_1 A_1 P A_2 B_2 T$ von $(a_2 \cdot b_2)$ auf m_4 projicirt, so ist nach Lehrsatz 9. die erhaltene Punktreihe $m_4, \mathfrak{B}_4 A_1 \mathfrak{P}_4 A'_2 \mathfrak{B}'_4 \mathfrak{T}_4$ conform und für $(a_1 \cdot b_2)$ als Projectionscentrum perspectivisch mit $s', B'_1 A'_1 P' A'_2 B'_2 T'$. Da also die Punktreihe $m_5, B_1 \mathfrak{A}_5 \mathfrak{P}_5 \mathfrak{A}'_5 B_2 \mathfrak{T}_5$ für $(a_2 \cdot b_1)$ als Centrum mit $s', B'_1 A'_1 P' A'_2 B'_2 T'$ perspectivisch liegt, so muß der Punkt $\mathfrak{T}_5$ auf dem von $(a_2 \cdot b_1)$ nach T' oder $(s \cdot s')$ gehenden Strahl liegen. Es geht aber, wie wir oben sahen, dieser Strahl zugleich durch $(a_1 \cdot b_2)$, und ist nichts anderes als die Gerade γ'. Es liegt also $\mathfrak{T}_5$ auf γ'. Da ferner die Punktreihe $m_4, \mathfrak{B}_4 A_1 \mathfrak{P}_4 A'_2 \mathfrak{B}'_4 \mathfrak{T}_4$ für $(a_1 \cdot b_2)$ als Projectionscentrum mit $s', B'_1 A'_1 P' A'_2 B'_2 T'$ perspectivisch liegt, so muß $\mathfrak{T}_4$ auf der von $(a_1 \cdot b_2)$ nach T' gezogenen Geraden, d. h. ebenfalls auf γ' liegen. Da aber die Punktreihen $\mathfrak{m}_5, B_1 \mathfrak{A}_5 \mathfrak{P}_5 \mathfrak{A}'_5 B'_2 \mathfrak{T}_5$ und $m_4, \mathfrak{B}_4 A_1 \mathfrak{P}_4 A'_2 \mathfrak{B}'_4 \mathfrak{T}_4$ für $(a_2 \cdot b_2)$ als Centrum perspectivisch liegen, müssen $\mathfrak{T}_5$ und $\mathfrak{T}_4$ auch auf dem von $(a_2 \cdot b_2)$ nach T gezogenen Strahl liegen; sie müssen daher beide im Durchschnittspunkte dieses Strahls mit γ' sich befinden; oder es müssen $\mathfrak{T}_5$ und $\mathfrak{T}_4$ in den Durchschnittspunkt des von $(a_2 \cdot b_2)$ nach T gezogenen Strahls mit γ' zusammenfallen. Es müssen sich also $\mathfrak{m}_5$ und m_4 auf γ' schneiden. Ferner gehen nun im zweiten Sechsseit der dritten Gruppe die Geraden p_2, r_2, m_2 durch denselben

Punkt $\mathfrak{B}_2$, und wenn man die Reihe $s, B_1 A_1 P A_2 B_2 T$ von $(a_1 \cdot b_2)$ aus auf m_2 projicirt, liegt nach Lehrsatz 9. die so erhaltene Punktreihe $m_2, \mathfrak{B}_2 A'_1 \mathfrak{P}_2 A_2 \mathfrak{B}'_2 \mathfrak{T}_2$ zugleich mit $s', B'_1 A'_1 P' A'_2 B'_2 T'$ für den Punkt $(b_2 \cdot a_2)$ als Projectionscentrum perspectivisch. Es liegt also $\mathfrak{T}_2$ auf dem von $(b_2 . a_2)$ nach T' gezogenen Strahl. Dieser geht aber auch, wie wir oben sahen, durch $(a_1 \cdot b_1)$ und ist nichts anderes als die Gerade γ; es muß also $\mathfrak{T}_2$ auf γ sich befinden. Da ferner die Punktreihe $m_2, \mathfrak{B}_2 A'_1 \mathfrak{P}_2 A_2 \mathfrak{B}'_2 \mathfrak{T}_2$ mit $s, B_1 A_1 P A_2 B_2 T$ für $(a_1 \cdot b_2)$ perspectivisch liegt, muß $\mathfrak{P}_2$ sich auf dem von $(a_1 \cdot b_2)$ nach P gezogenen Strahl, also auf γ' befinden. Nach Lehrsatz 6. ist nun der Strahlbüschel $(a_1 \cdot a_2)$, $a_1 \alpha' a_2 \tau$ harmonisch (vgl. Fig. 103a. oder Fig. 107a.), also auch Punktreihe $s', A'_1 T' A'_2 P'$ und daher auch $s', A'_1 P' A'_2 T'$ harmonisch, also auch Punktreihe $m_2, A'_1 \mathfrak{P}_2 A_2 \mathfrak{T}_2$, (da dieß die Projection der Punktreihe $s', A'_1 P' A'_2 T'$ auf m_2 von $(a_2 \cdot b_2)$ aus ist), also auch Strahlbüschel $(a_2 \cdot b_1)$, $A'_1 \mathfrak{P}_2 A_2 \mathfrak{T}_2$ harmonisch. Ferner ist aber auch, weil $(a_1 \cdot a_2)$, $a_1 \alpha' a_2 \tau$ harmonisch ist, Punktreihe $s, A_1 P A_2 T$, also auch $\mathfrak{m}_5, \mathcal{A}_5 \mathfrak{P}_5 \mathcal{A}'_5 \mathfrak{T}_5$ (da sie die Projection von $s, A_1 P A_2 T$ auf $\mathfrak{m}_5$ von $(a_2 . b_2)$ aus ist), folglich auch Strahlbüschel $(a_2 \cdot b_1)$, $\mathcal{A}_5 \mathfrak{P}_5 \mathcal{A}'_5 \mathfrak{T}_5$ und Strahlbüschel $(a_2 \cdot b_1)$, $\mathcal{A}_5 \mathfrak{T}_5 \mathcal{A}'_5 \mathfrak{P}_5$ harmonisch. Die beiden harmonischen Strahlbüschel $(a_2 \cdot b_1)$, $A'_1 \mathfrak{P}_2 A_2 \mathfrak{T}_2$ und $(a_2 \cdot b_1)$, $\mathcal{A}_5 \mathfrak{T}_5 \mathcal{A}'_5 \mathfrak{P}_5$ fallen mit den drei ersten Strahlen zusammen. Denn der Strahl von $(a_2 \cdot b_1)$ nach A'_1 ist die Gerade $\mathfrak{t}_5$ im fünften Sechsseit der ersten Gruppe, die mit $\mathfrak{p}_5$ und $\mathfrak{m}_5$ sich in $\mathcal{A}_5$ schneidet, oder A'_1 und $\mathcal{A}_5$ liegen auf dem Strahl $\mathfrak{t}_5$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{T}_5$ liegen auf γ', wie wir oben sahen, A_2 und $\mathcal{A}'_5$ liegen ebenfalls auf einem und demselben Strahl, da man $\mathcal{A}'_5$ erhält, wenn man A_2 von $(a_2 \cdot b_1)$ aus auf $\mathfrak{m}_5$ projicirt. Es müssen also auch $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{P}_5$ auf demselben von $(a_2 \cdot b_1)$ ausgehenden Strahl liegen. Es liegt aber $\mathfrak{P}_5$ zugleich auf γ, da es die Projection des Punkts P von $(a_2 \cdot b_2)$ auf $\mathfrak{m}_5$ war. Folglich liegen, da, wie wir oben sahen, $\mathfrak{T}_2$ sich auf γ befindet, $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{P}_5$ zugleich auf γ und auf demselben von $(a_2 \cdot b_1)$ ausgehenden Strahl; sie fallen also zusammen; also schneiden sich $\mathfrak{m}_5$ und m_2 im Punkt $\mathfrak{P}_5$ der γ. Auf ganz analoge Weise ergiebt sich mit Hülfe der mehr erwähnten Tabelle, daß $\mathfrak{m}_3$ und m_2 die beide mit s' für $(a_2 \cdot b_2)$ als Centrum perspectivisch liegen, sich auf γ' schneiden, und daß sich $\mathfrak{m}_3$ und m_4 auf γ schneiden; oder mit anderen Worten, die Gerade γ' ist die Verbindungsgerade von $(\mathfrak{m}_5 \cdot m_4)$ und $(\mathfrak{m}_3 \cdot m_2)$, und γ ist die Verbindungsgerade von $(\mathfrak{m}_5 \cdot m_2)$ und $(\mathfrak{m}_3 \cdot m_4)$. Wir drücken dieß kurz aus durch die Formeln:

$$[(\mathfrak{m}_5 \cdot m_4) - (\mathfrak{m}_3 \cdot m_2)] = \gamma'; \; [(\mathfrak{m}_5 \cdot m_2) - (\mathfrak{m}_3 \cdot m_2)] = \gamma.$$

Analog dieser Betrachtung liegen nach der zweiten für die Strahlbüschel aufgestellten Tabelle T_2 im fünften Sechseck der ersten Gruppe die drei Punkte $\mathfrak{P}_5$, $\mathcal{R}_5$, $\mathcal{M}_5$, Fig. 106b., auf derselben Geraden α_5, und wenn man einen Strahlbüschel construirt, der $\mathcal{M}_5$ zum Scheitel hat und mit $S, b_1 a_1 p a_2 b_2 t$ für $(A_2 - B_2)$ als Axe perspectivisch liegt,

so liegt nach Lehrsatz 9. dieser Strahlbüschel $\mathfrak{M}_5, b_1 \alpha_5 \mathfrak{p}_5 \alpha'_5 b'_2 \mathfrak{t}_5$ auch perspectivisch mit $S', b'_1 a'_1 p' a'_2 b'_2 t'$ für $(A_2 - B_1)$ als Axe. Ebenso liegen im vierten Sechseck der dritten Gruppe die Punkte P_4, R_4, M_4 auf derselben Geraden $\mathfrak{b}_4$, und nach Lehrsatz 9. ist der Strahlbüschel $M_4, \mathfrak{b}_4 a_1 \mathfrak{p}_4 a'_2 \mathfrak{b}'_4 \mathfrak{t}_4$, der mit $S, b_1 a_1 p a_2 b_2 t$ für die Axe $(A_2 - B_2)$ perspectivisch liegt, auch mit $S', b'_1 a'_1 p' a'_2 b'_2 t'$ für die Axe $(A_1 - B_2)$ perspectivisch. Da also $\mathfrak{M}_5, b_1 \alpha_5 \mathfrak{p}_5 \alpha'_5 b'_2 \mathfrak{t}_5$ mit $S', b'_1 a'_1 p' a'_2 b'_2 t'$ für die Axe $(A_2 - B_1)$ perspectivisch liegt, muß $\mathfrak{t}_5$ durch den Durchschnitt von t' mit $(A_2 - B_1)$, d. h. durch Γ' gehen, da, wie wir oben sahen, der Durchschnittspunkt von $(A_2 - B_1)$ mit $(S - S')$ zugleich der von $(A_1 - B_2)$ mit $(S - S')$, oder Γ' ist. Da ferner $M_4, \mathfrak{b}_4 a_1 \mathfrak{p}_4 a'_2 \mathfrak{b}'_4 \mathfrak{t}_4$ mit $S', b'_1 a'_1 p' a'_2 b'_2 t'$ für $(A_1 - B_2)$ perspectivisch ist, muß auch $\mathfrak{t}_4$ durch den Durchschnittspunkt von t' mit $(A_1 - B_2)$, d. h. durch Γ' gehn. Da ferner $\mathfrak{M}_5, b_1 \alpha_5 \mathfrak{p}_5 \alpha'_5 b'_2 \mathfrak{t}_5$ und $M_4, \mathfrak{b}_4 a_1 \mathfrak{p}_4 a'_2 \mathfrak{b}'_4 \mathfrak{t}_4$ für die Axe $(A_2 - B_2)$ perspectivisch liegen, so müssen $\mathfrak{t}_5$ und $\mathfrak{t}_4$ auch durch denselben Punkt der $(A_2 - B_2)$, nämlich durch den Durchschnittspunkt von t mit $(A_2 - B_2)$ gehen; es haben also $\mathfrak{t}_5$ und $\mathfrak{t}_4$ zwei Punkte gemein, diesen letztgenannten Durchschnittspunkt von t mit $(A_2 - B_2)$ und den Punkt Γ'; sie fallen daher ganz zusammen; es liegen also $\mathfrak{M}_5$ und M_4 auf einer durch den Punkt Γ' gehenden Geraden $\mathfrak{t}_5$. Ferner liegen im zweiten Sechseck der dritten Gruppe die Punkte P_2, R_2, M_2 auf derselben Geraden $\mathfrak{b}_2$, und wenn man den Strahlbüschel $M_2, \mathfrak{b}_2 a'_1 \mathfrak{p}_2 a_2 \mathfrak{b}'_2 \mathfrak{t}_2$, der mit $S, b_1 a_1 p a_2 b_2 t$ für die Axe $(A_1 - B_2)$ perspectivisch liegt, construirt, so liegt derselbe nach Lehrsatz 9. auch mit $S', b'_1 a'_1 p' a'_2 b'_2 t'$ für $(A_2 - B_2)$ als Axe perspectivisch. Es geht also $\mathfrak{t}_2$ durch den Durchschnittspunkt von t' mit $(A_2 - B_2)$, d. h. durch Γ. Da ferner der Strahlbüschel $M_2, \mathfrak{b}_2 a'_1 \mathfrak{p}_2 a_2 \mathfrak{b}'_2 \mathfrak{t}_2$ mit $S, b_1 a_1 p a_2 b_2 t$ für $(A_1 - B_2)$ perspectivisch liegt, so muß $\mathfrak{p}_2$ durch den Durchschnittspunkt von p mit $(A_1 - B_2)$, d. h. durch Γ' gehen. Nach Lehrsatz 6. ist nun Punktreihe $(A_1 - A_2)$, $A_1 A' A_2 T$ harmonisch, (vgl. Fig. 103b. und Fig. 107b.), also auch Strahlbüschel $S', a'_1 t' a'_2 p'$ und also auch $S', a'_1 p' a'_2 t'$ harmonisch, also auch Strahlbüschel $M_2, a'_1 \mathfrak{p}_2 a_2 \mathfrak{t}_2$ (da dieser mit $S', a'_1 t' a'_2 p'$ für $(A_2 - B_2)$ als Axe perspectivisch liegt), also auch Punktreihe $(A_2 - B_1)$, $a'_1 \mathfrak{p}_2 a_2 \mathfrak{t}_2$ harmonisch. Ferner ist auch, weil $(A_1 - A_2)$, $A_1 A' A_2 T$ harmonisch ist, Strahlbüschel $S, a_1 p a_2 t$ also auch $\mathfrak{M}_5, \alpha_5 \mathfrak{p}_5 \alpha'_5 \mathfrak{t}_5$ (da er mit $S, a_1 p a_2 t$ für $(A_2 - B_2)$ perspectivisch liegt), also auch Punktreihe $(A_2 - B_1)$, $\alpha_5 \mathfrak{p}_5 \alpha'_5 \mathfrak{t}_5$ und Punktreihe $(A_2 - B_1)$, $\alpha_5 \mathfrak{t}_5 \alpha'_5 \mathfrak{p}_5$ harmonisch. Die beiden harmonischen Punktreihen $(A_2 - B_1)$, $a'_1 \mathfrak{p}_2 a_2 \mathfrak{t}_2$ und $(A_2 - B_1)$, $\alpha_5 \mathfrak{t}_5 \alpha'_5 \mathfrak{p}_5$ fallen aber mit den drei ersten Punkten zusammen. Denn der Durchschnitt von $(A_2 - B_1)$ mit a'_1 ist der Punkt $\mathfrak{R}_5$ im fünften Sechseck der ersten Gruppe, der mit $\mathfrak{P}_5$ und $\mathfrak{M}_5$ auf α_5 liegt, oder a'_1 und α_5 gehen durch den Punkt $\mathfrak{R}_5$, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{t}_5$ gehen durch Γ' wie oben gezeigt wurde, a_2 und α'_5 gehen ebenfalls durch denselben Punkt der $(A_2 - B_1)$, da man α'_5 erhält, wenn man von $\mathfrak{M}_5$ aus eine Gerade nach dem Durchschnittspunkt von a_2 mit $(A_2 - B_1)$ zieht. Es müssen sich also auch $\mathfrak{t}_2$ und $\mathfrak{p}_5$ in demselben Punkt auf $(A_2 - B_1)$

schneiden. Es geht aber $\mathfrak{p}_5$ zugleich durch Γ, da diese Gerade erhalten wurde, indem man von $\mathfrak{M}_5$ aus nach dem Durchschnittspunkt von p mit $(A_2 - B_2)$, d. h. nach Γ, zog. Es gehen also, da, wie wir oben sahen, $\mathfrak{t}_2$ durch Γ geht, $\mathfrak{t}_2$ und $\mathfrak{p}_5$ zugleich durch Γ und durch denselben Punkt der $(A_2 - B_1)$; sie fallen mithin ganz zusammen; es geht also die Verbindungsgerade von $\mathfrak{M}_5$ und M_2 durch Γ. Auf ganz analoge Weise ergiebt sich, daß $\mathfrak{M}_3$ und M_2, da diese beiden Strahlbüschel mit S′ für $(A_2 - B_2)$ perspectivisch liegen, auf einer durch Γ', und daß $\mathfrak{M}_3$ und M_4 auf einer durch Γ gehenden Geraden liegen. Oder mit anderen Worten der Punkt Γ' ist der Durchschnittspunkt von $(\mathfrak{M}_5 - M_4)$ und $(\mathfrak{M}_3 - M_2)$, und Γ ist der Durchschnittspunkt von $(\mathfrak{M}_5 - M_2)$ und $(\mathfrak{M}_3 - M_4)$; oder kurz, es ist:

$$[(\mathfrak{M}_5 - M_4) \cdot (\mathfrak{M}_3 - M_2)] = \Gamma'; \; [(\mathfrak{M}_5 - M_2) \cdot (\mathfrak{M}_3 - M_4)] = \Gamma.$$

Was nun endlich die Durchschnittspunkte $(\mathfrak{m}_5 \cdot \mathfrak{m}_3)$ und $(\mathfrak{m}_4 \cdot \mathfrak{m}_2)$ der dritten Quaternion betrifft, so verschafft man sich folgendermaßen über sie Auskunft: Betrachtet man das von s′, a_1, s, a_2 gebildete vollständige Vierseit, so sieht man, Fig. 107 a., daß in dem von ihm erzeugten einfachen Viereck $(s' \cdot a_1)(a_1 \cdot s)(s \cdot a_2)(a_2 \cdot s')$, in welchem, wie man sich erinnert $[(s' \cdot a_1) - (s \cdot a_2)]$ das obige m_2 und $[(s \cdot a_1) - (s' \cdot a_2)]$ das obige m_4 ist, der von den Strahlen a_1, α', a_2, $[(a_1 \cdot a_2) - (m_2 \cdot m_4)]$ gebildete Strahlbüschel mit dem Scheitel $(a_1 \cdot a_2)$ harmonisch sein muß, nach § 3. Lehrsatz 17. Nach Lehrsatz 6. aber ist Strahlbüschel $(a_1 \cdot a_2)$, $a_1 \alpha' a_2 \tau$ harmonisch. Es muß also $[(a_1 \cdot a_2) - (m_2 \cdot m_4)]$ mit τ zusammenfallen, also $(m_2 \cdot m_4)$ auf τ liegen. Ebenso überzeugt man sich mit Hülfe des Vierecks $(s' \cdot b_1)(b_1 \cdot s)(s \cdot b_2)(b_2 \cdot s')$ und da nach Lehrsatz 6. $(b_1 \cdot b_2)$, $b_1 \beta' b_2 \tau$ harmonisch ist, daß auch der Durchschnittspunkt von $[(s' \cdot b_1) - (s \cdot b_2)]$ und $[(s \cdot b_1) - (s' \cdot b_2)]$ oder also $(\mathfrak{m}_3 \cdot \mathfrak{m}_5)$ auf τ liegt. Es ist also kurz:

$$[(\mathfrak{m}_3 \cdot \mathfrak{m}_5) - (m_2 \cdot m_4)] = \tau.$$

Betrachtet man in der für die Strahlbüschel geltenden Fig. 107 b. das vollständige Viereck $S'A_1SA_2$ und das von ihm erzeugte einfache Vierseit $(S' - A_1)(A_1 - S)(S - A_2)(A_2 - S')$, und bedenkt daß $[(S' - A_1) \cdot (S - A_2)]$ das obige M_2, $[(S - A_1) \cdot (S' - A_2)]$ das obige M_4 ist, und daß die von den Punkten A_1, A', A_2, $[(A_1 - A_2) \cdot (M_2 - M_4)]$ auf $(A_1 - A_2)$ gebildete Punktreihe harmonisch sein muß, daß aber auch nach Lehrsatz 6. $(A_1 - A_2)$, $A_1 A' A_2 T$ harmonisch ist, so folgt, daß $[(A_1 - A_2) \cdot (M_2 - M_4)]$ mit T zusammenfallen muß, daß also $(M_2 - M_4)]$ durch T geht. Ebenso überzeugt man sich mit Hülfe des Vierseits $(S' - B_1)(B_1 - S)(S - B_2)(B_2 - S')$, und da nach Lehrsatz 6. $(B_1 - B_2)$, $B_1 B' B_2 T$ harmonisch ist, daß auch die Verbindungsgerade von $[(S' - B_1) \cdot (S - B_2)]$ und $[(S - B_1) \cdot (S' - B_2)]$ d. h. $(\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_5)$ durch T geht. Es ist also kurz:

$$[(\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_5) \cdot (M_2 - M_4)] = T.$$

Fassen wir nun die Resultate der bisherigen Untersuchung zusammen, so können wir sagen:

10. Lehrsatz. In der Curve K'_1 geht sowohl die Verbindungsgerade $[(a_1 \cdot b_2)-(a_2 \cdot b_1)]$ oder γ', als auch die Verbindungsgerade $[(a_1 \cdot b_1)-(a_2 \cdot b_2)]$ oder γ durch den Punkt $(s \cdot s')$.

11. Lehrsatz. In der Curve K'_1 ist der Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $s\gamma s'\gamma'$ harmonisch.

12. Lehrsatz. In der Curve K'_1 liegen die Durchschnittspunkte jeder zwei der die erste Quaternion bildenden Geraden $\mathfrak{m}_6$, $\mathfrak{n}_4$, m_3, n_1, (oder m_5, n_6, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_2$) in demselben Punkt $(\tau \cdot \gamma')$, die Durchschnittspunkte jeder zwei der die zweite Quaternion bildenden Geraden $\mathfrak{m}_4$, $\mathfrak{n}_6$, m_1, n_3 (oder n_5, m_6, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}_2$) liegen in demselben Punkt $(\tau \cdot \gamma)$; bei den die dritte Quaternion bildenden Geraden $\mathfrak{m}_5$, $\mathfrak{m}_3$, m_2, m_4 (oder $\mathfrak{n}_5$, $\mathfrak{n}_3$, n_2, n_4) liegen die Durchschnittspunkte $(\mathfrak{m}_5 \cdot m_4)$ und $(\mathfrak{m}_3 \cdot m_2)$ auf γ', die Durchschnittspunkte $(\mathfrak{m}_5 \cdot m_2)$ und $(\mathfrak{m}_3 \cdot m_4)$ auf γ, die Durchschnittspunkte $(\mathfrak{m}_3 \cdot \mathfrak{m}_5)$ und $(m_2 \cdot m_4)$ auf τ. Diese Gesetze gelten jedoch nur für solche Projectionsstrahlen a_1, a_2, b_1, b_2, die so liegen, daß $(a_1 \cdot a_2)$ und $(b_1 \cdot b_2)$ auf τ oder $(T-P')$ liegen.

10. Lehrsatz. In der Curve k_1 liegt sowohl der Durchschnittspunkt $[(A_1-B_2) \cdot (A_2-B_1)]$ oder Γ', als auch der Durchschnittspunkt $[(A_1-B_1) \cdot (A_2-B_2)]$ oder Γ auf der Geraden $(S-S')$.

11. Lehrsatz. In der Curve k_1 ist die Punktreihe $(S-S')$, $S\Gamma S'\Gamma'$ harmonisch.

12. Lehrsatz. In der Curve k_1 liegen die Verbindungsgeraden jeder zwei die erste Quaternion bildenden Punkte $\mathfrak{M}_6$, $\mathfrak{N}_4$, M_3, N_1 (oder M_5, N_6, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_2$) auf derselben Geraden $(T-\Gamma')$, die Verbindungsgeraden jeder zwei die zweite Quaternion bildenden Punkte $\mathfrak{M}_4$, $\mathfrak{N}_6$, M_1, N_3 (oder N_5, M_6, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{M}_2$) liegen auf derselben Geraden $(T-\Gamma)$; bei den die dritte Quaternion bildenden Punkten $\mathfrak{M}_5$, $\mathfrak{M}_3$, M_2, M_4, (oder $\mathfrak{N}_5$, $\mathfrak{N}_3$, N_2, N_4) gehen die Verbindungsgeraden $(\mathfrak{M}_5-M_4)$ und $(\mathfrak{M}_3-M_4)$ durch Γ', die Verbindungsgeraden $(\mathfrak{M}_5-M_2)$ und $(\mathfrak{M}_3-M_2)$ durch Γ, die Verbindungsgeraden $(\mathfrak{M}_3-\mathfrak{M}_5)$ und (M_2-M_4) durch T. Diese Gesetze gelten jedoch nur für solche Projectionspunkte A_1, A_2, B_1, B_2, die so liegen, daß (A_1-A_2) und (B_1-B_2) durch T oder $(t \cdot p')$ gehen.

Das Gesetz, daß sich m_2 und m_4, $\mathfrak{m}_3$ und $\mathfrak{m}_5$ allemal auf τ schneiden, läßt sich noch anders aussprechen: Es sind nämlich Fig. 107 a. m_2 und m_4 in dem von den Geraden s, a_1, s', a_2 gebildeten vollständigeu Vierseit $sa_1s'a_2$ Diagonalen, von denen keine durch $(s \cdot s')$

geht; ebenso sind $\mathfrak{m}_3$ und $\mathfrak{m}_5$ in dem von den Geraden s, b_1, s', b_2 gebildeten vollständigen Vierseit $sb_1s'b_2$ die Diagonalen, von denen keine durch $(s \cdot s')$ geht. Wären nun C_1 und C_2 noch ein Paar Punkte der Reihe s, und C'_1 und C'_2 die entsprechenden der Reihe s', und lägen diese Punkte so, daß $(C_1 - C'_1)$ oder c_1 und $(C_2 - C'_2)$ oder c_2 sich auch in einem Punkte der Geraden τ schnitten, so würde sich ebenso, wie bisher, indem man nur im Bisherigen überall statt b_1 und b_2, c_1 und c_2 setzte, beweisen lassen, daß auch die zwei Diagonalen des vollständigen Vierseits $sc_1s'c_2$, von denen keine durch $(s \cdot s')$ geht, sich auf τ schneiden. Ebenso sind M_2 und M_4 Fig. 107b. in dem von den Punkten S, A_1, S', A_2 gebildeten vollständigen Viereck $SA_1S'A_2$ die Durchschnittspunkte der Gegenseiten, von denen keiner auf $(S - S')$ liegt, und $\mathfrak{M}_3$ und $\mathfrak{M}_5$ in dem von S, B_1, S', B_2 gebildeten vollständigen Viereck $SB_1S'B_2$ die Durchschnittspunkte der Gegenseiten, von denen keiner auf $(S - S')$ liegt. Wären nun C_1, C_2 noch ein Paar solcher Punkte, daß $(C_1 - C_2)$ durch T ginge, so würde sich ebenso, wie bisher, zeigen lassen, daß auch die Durchschnittspunkte der Gegenseiten, von denen keiner auf $(S - S')$ liegt, in dem vollständigen Viereck $SC_1S'C_2$ auf einer durch T gehenden Geraden liegen. Man kann also sagen:

13. Lehrsatz. In jedem vollständigen Vierseit $sa_1s'a_2$, $sb_1s'b_2$, $sc_1s'c_2$, ..., dessen eines Paar Seiten s und s' die Richtungen der die Curve K'_1 erzeugenden Punktreihen, dessen anderes Paar Seiten zwei sich auf der Geraden $(T - P')$ oder τ schneidende Tangenten a_1 und a_2, oder b_1 und b_2, oder c_1 und c_2, ... sind, liegt der Durchschnittspunkt $(m_2 \cdot m_4)$, $(\mathfrak{m}_3 \cdot \mathfrak{m}_5)$ .... derjenigen beiden Diagonalen, von denen keine durch $(s \cdot s')$ geht, auf der Geraden τ.

13. Lehrsatz. In jedem vollständigen Viereck $SA_1S'A_2$ $SB_1S'B_2$, $SC_1S'C_2$ ...., dessen eines Paar Ecken, S und S' die Scheitel der die Curve k_1 erzeugenden Strahlbüschel, dessen anderes Paar Ecken zwei Punkte A_1 und A_2 oder B_1 und B_2, oder C_1 und C_2, ... sind, deren Verbindungsgerade durch den Punkt $(t \cdot p')$ oder T geht, geht die Verbindungsgerade $(M_2 - M_4)$, $(\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_5)$ .... derjenigen beiden Durchschnittspunkte der Gegenseiten, von denen keiner auf $(S - S')$ liegt, durch den Punkt T.

Ebenso sieht man, daß n_1, $\mathfrak{n}_4$ die Diagonalen des vollständigen Vierseits $sa_1s'b_1$, Fig. 105a., sind, die nicht durch $(s \cdot s')$ gehen, und sich in $(\tau \cdot \gamma')$ schneiden; deßgleichen sind m_3, $\mathfrak{m}_6$ die Diagonalen des vollständigen Vierseits $sa_2s'b_2$, die nicht durch $(s \cdot s')$ gehen, und auch sie schneiden sich in $(\tau \cdot \gamma')$; es sind ferner m_1 und $\mathfrak{n}_6$, Fig 107a., die Diagonalen im vollständigen Vierseit $sa_1s'b_2$, und n_3 und $\mathfrak{m}_4$ die Diagonalen im vollständigen Vierseit $sa_2s'b_1$; und sowohl der

Durchschnittspunkt $(m_1 \cdot \mathfrak{n}_6)$ als $(n_3 . \mathfrak{m}_4)$ liegt in $(\tau \cdot \gamma)$. Analoges zeigt sich bei der Curve k_1, so daß man sagen kann:

14. Lehrsatz. Die Durchschnittspunkte $(n_1 \cdot \mathfrak{n}_4)$ und $(m_3 \cdot \mathfrak{m}_6)$ von je zwei Diagonalen in zwei solchen vollständigen Vierseiten $sa_1s'b_1$ und $sa_2s'b_1$, in deren jedem s und s′ ein Paar Seiten sind, und in denen die anderen so beschaffen sind, daß je eine Seite, $(a_1; b_1)$ des einen mit je einer Seite $(a_2; b_2)$ des anderen Vierseits sich auf τ schneidet, fallen in denselben Punkt $(\tau \cdot \gamma')$ zusammen. Die Durchschnittspunkte $(m_1 \cdot \mathfrak{n}_6)$ und $(n_3 \cdot \mathfrak{m}_4)$ von je zwei Diagonalen in zwei solchen vollständigen Vierseiten $sa_1s'b_2$ und $sa_2s'b_1$, in deren jedem s und s′ ein Paar Seiten sind, und in denen die anderen so beschaffen sind, daß je eine Seite $(a_1; b_2)$ des einen mit je einer Seite $(a_2; b_1)$ des anderen sich auf τ schneidet, fallen in denselben Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ zusammen.

Es darf jedoch unter diesen Diagonalen keine diejenige sein, die durch $(s \cdot s')$ geht.

14. Lehrsatz. Die Verbindungsgeraden $(N_1 - \mathfrak{N}_4)$ und $(M_3 - \mathfrak{M}_6)$ von je zwei Durchschnittspunkten der Gegenseiten in zwei solchen vollständigen Vierecken $SA_1S'B_1$ und $SA_2S'B_1$, in deren jedem S und S′ ein Paar Ecken sind, und in denen die anderen so beschaffen sind, daß je eine Ecke $(A_1; B_1)$ des einen mit je einer Ecke $(A_2; B_2)$ des anderen Vierecks auf einer durch T gehenden Geraden liegt, fallen in dieselbe Gerade $(T - \Gamma')$ zusammen. Die Verbindungsgeraden $(M_1 - \mathfrak{N}_6)$ und $(N_3 - \mathfrak{M}_4)$ von je zwei Durchschnittspunkten der Gegenseiten in zwei solchen vollständigen Vierecken $SA_1S'B_2$ und $SA_2S'B_1$, in deren jedem S und S′ ein Paar Ecken sind, und in denen die anderen so beschaffen sind, daß je eine Ecke $(A_1; B_2)$ des einen mit je einer Ecke $(A_2; B_1)$ des anderen auf einer durch T gehenden Geraden liegt, fallen in dieselbe Gerade $(T - \Gamma)$ zusammen.

Es darf jedoch unter diesen Durchschnittspunkten der Gegenseiten keiner derjenige sein, der auf $(S - S')$ liegt.

Nach § 3. Lehrsatz 17. ist nun im vollständigen Viereck $A_1A'_1A'_2A_2$ Fig. 107a. Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $s\alpha s'\alpha'$, im vollständigen Viereck $B_1B'_1B'_2B_2$ ist Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $s\beta s'\gamma'$ harmonisch und nach Lehrsatz 11. ist auch Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $s\gamma s'\gamma'$ harmonisch. Alle drei Strahlbüschel haben also die Strahlen s und s′ gemein; nach § 4. Lehrsatz 17. ist also Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $s\beta\gamma\alpha s'\alpha'\gamma'\beta'$ entgegengesetzt involutorisch mit den Hauptstrahlen s und s′. Deßgleichen

sind nach § 3. Lehrsatz 17. im vollständigen Vierseit $a_1 a'_1 a'_2 a_2$ Fig. 107b. Punktreihe $(S-S')$, $SAS'A'$, im vollständigen Vierseit $b_1 b'_1 b'_2 b_2$ Punktreihe $(S-S')$, $SBS'B'$ harmonisch, und da nach Lehrsatz 11. auch Punktreihe $(S-S')$, $S\Gamma S'\Gamma'$ harmonisch ist, so folgt aus § 4. Lehrsatz 17., daß die Punktreihe $(S-S')$, $SB\Gamma AS'A'\Gamma'B'$ entgegengesetzt involutorisch mit den Hauptstrahlen S und S' ist. Man sieht also:

15. **Lehrsatz.** In der Curve K'_1 ist der Strahlbüschel $(s\cdot s')$, $s\beta\gamma\alpha s'\alpha'\gamma'\beta'$ entgegengesetzt involutorisch; α und α', β und β', γ und γ' sind entsprechende Strahlen; s und s' die Hauptstrahlen.

15. **Lehrsatz.** In der Curve k_1 ist die Punktreihe $(S-S')$, $SB\Gamma AS'A'\Gamma'B'$ entgegengesetzt involutorisch; A und A', B und B', Γ und Γ' sind entsprechende Punkte, S und S' die Hauptpunkte.

Nennt man den Durchschnittspunkt von α, Fig. 107a., mit a_1 und a_2 bezüglich $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$; den von β mit b_1 und b_2 bezüglich $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$; die Verbindungsgerade von A Fig. 107b. mit A_1 und A_2 bezüglich α_1 und α_2, die von B mit B_1 und B_2 bezüglich $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$, so folgt weil der oben genannte Strahlbüschel $(s\cdot s')$ Fig. 107a. involutorisch, also Strahlbüschel $(s\cdot s')$, $s\gamma\alpha s'\alpha'\gamma' \;\overline{\wedge}\; (s\cdot s')$, $s'\gamma'\alpha' s'\alpha\gamma$ ist,

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punktreihe } a_1, A_1(a_1\cdot b_1)\mathfrak{A}_1 A'_1(a_1\cdot a_2)(a_1\cdot b_2) \;\overline{\wedge} \\ \text{Punktreihe } a_2, A_2(a_2\cdot b_1)(a_2\cdot a_1)A'_2\mathfrak{A}_2(a_2\cdot b_2)\end{array}\right\} \text{1. a)}$$

und da wegen der Involution auch Strahlbüschel $(s\cdot s')$, $s\beta\gamma s'\gamma'\beta' \;\overline{\wedge}\; (s\cdot s')$, $s\beta'\gamma' s'\gamma\beta$, ist, ist auch

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punktreihe } b_1, B_1\mathfrak{B}_1(b_1\cdot a_1)B'_1(b_1\cdot a_2)(b_1\cdot b_2) \;\overline{\wedge} \\ \text{Punktreihe } b_2, B_2(b_2\cdot b_1)(b_2\cdot a_1)B'_2(b_2\cdot a_2)\mathfrak{B}_2\end{array}\right\} \text{1. b).}$$

Ebenso ist in Fig. 107b., da Punktreihe $(S-S')$, $S\Gamma AS'A'\Gamma' \;\overline{\wedge}\; (S-S')$, $S\Gamma'A'S'A\Gamma$ und $(S-S')$, $SB\Gamma S'\Gamma'B' \;\overline{\wedge}\; (S-S')$, $SB'\Gamma'S'\Gamma B$ ist,

$$\left.\begin{array}{l}\text{Strahlbüschel } A_1, a_1(A_1-B_1)\alpha_1 a'_1(A_1-A_2)(A_1-B_2) \;\overline{\wedge} \\ \text{Strahlbüschel } A_2, (A_2-B_1)(A_2-A_1)a'_2\alpha_2(A_2-B_2)\end{array}\right\} \text{1. a')}$$

und

$$\left.\begin{array}{l}\text{Strahlbüschel } B_1, b_1\mathfrak{b}_1(B_1-A_1)b'_1(B_1-A_2)(B_1-B_2) \;\overline{\wedge} \\ \text{Strahlbüschel } B_2, b_2(B_2-B_1)(B_2-A_1)b'_2(B_2-A_2)\mathfrak{b}_2\end{array}\right\} \text{1. b').}$$

Da A_1 identisch ist mit $(a_1\cdot s)$, A'_1 mit $(a_1\cdot s')$, A'_2 mit $(a_2\cdot s')$, so sieht man also, daß Fig. 107a. auf a_1 und a_2 die Punkte, welche die Geraden s und s', b_1 und b_2 durch ihren Durchschnitt mit a_1 und a_2 auf diesen Geraden erzeugen, eine conforme Punktreihe $a_1, A_1(a_1\cdot b_1)A'_1(a_1\cdot b_2) \;\overline{\wedge}\; a_2, A_2(a_2\cdot b_1)A'_2(a_2\cdot b_2)$ bilden und daß der Durchschnittspunkt von s auf a_1 dem Durchschnittspunkt von s auf a_2, der Durchschnittspunkt von s' auf a_1 dem Durchschnittspunkt von s' auf a_2, der von b_1 auf a_1 (nämlich $(a_1\cdot b_1)$), dem von b_1 auf a_2 (nämlich $(a_2\cdot b_1)$), der von b_2 auf a_1 (nämlich

$(a_1 \cdot b_2)$) dem von b_2 auf a_2 (nämlich $(a_2 \cdot b_2)$) entspricht. Dasselbe gilt von den Punktreihen, die von s, a_1, s′, a_2 auf b_1 und b_2 gebildet werden, und Analoges von den Strahlbüscheln an A_1 und A_2, B_1 und B_2 in Fig. 107 b. Man sieht also, da, was von a_1 und a_2, b_1 und b_2 gilt, auch von jedem anderen Paar Projectionsstrahlen c_1 und c_2, die auf τ sich schneiden, ebenso, wie bisher gezeigt werden kann, und ebenso dasselbe, wie von A_1 und A_2, B_1 und B_2 auch von jedem anderen Paar Projectionspunkte C_1 und C_2, deren Verbindungsgerade durch T geht, bewiesen werden kann:

16. Lehrsatz. Jede zwei Projectionsstrahlen a_1 und a_2; b_1 und b_2, ..., deren Durchschnittspunkt auf τ liegt, werden von s und s′ und jedem anderen Paar Projectionsstrahlen, b_1 und b_2; a_1 und a_2, ..., deren Durchschnittspunkt ebenfalls auf τ liegt, in vier Punkten geschnitten, die conforme Punktreihen $a_1, A_1 (a_1 \cdot b_1) A'_1 (a_1 \cdot b_2) \overline{\wedge}\ a_2, A_2 (a_2 \cdot b_1) A'_2 (a_2 \cdot b_2)$; $b_1, B_1 (b_1 \cdot a_1) B'_1 (b_1 \cdot a_2) \overline{\wedge}\ b_2, B_2 (b_2 \cdot a_1) B'_2 (b_2 \cdot a_2)$, ... bilden. In denselben sind jede zwei von demselben Projectionsstrahl gebildeten Durchschnittspunkte entsprechend.

16. Lehrsatz. Jede zwei Projectionspunkte A_1 und A_2, B_1 und B_2, ..., deren Verbindungsgerade durch T geht, werden, wenn man sie mit S und S′ und jedem anderen Paar Projectionspunkte, B_1 und B_2; A_1 und A_2, ..., deren Verbindungsgerade ebenfalls durch T geht, geradlinig verbindet, die Scheitel conformer, vier Strahlen enthaltender Strahlbüschel $A_1, a_1 (A_1 - B_1) a'_1 (A_1 - B_2) \overline{\wedge}\ A_2, a_2 (A_2 - B_1) a'_2 (A_2 - B_2)$; $B_1, b_1 (B_1 - A_1) b'_1 (B_1 - A_2) \overline{\wedge}\ B_2, b_2 (B_2 - A_1) b'_2 (B_2 - A_2)$, ... In denselben sind jede zwei nach demselben Projectionspunkt gezogenen Strahlen entsprechend.

Nach Lehrsatz 6. war nun, Fig. 107 a., Strahlbüschel $(a_1 \cdot a_2)$, $a_1 \alpha' a_2 \tau$ und $(b_1 \cdot b_2)$, $b_1 \beta' b_2 \tau$ harmonisch, also ist auch Punktreihe $\alpha, \mathcal{A}_1 (s \cdot s') \mathcal{A}_2 (\tau \cdot \alpha)$ und $\beta, \mathcal{B}_1 (s \cdot s') \mathcal{B}_2 (\tau \cdot \beta)$ harmonisch. Beide sind daher conform und da sie mit einem Paar entsprechender Punkte $(s \cdot s')$ und $(s \cdot s')$ auf einander fallen, liegen sie perspectivisch. Es schneiden sich also $(\mathcal{A}_1 - \mathcal{B}_1)$, $(\mathcal{A}_2 - \mathcal{B}_2)$, $[(a \cdot \tau) - (\beta \cdot \tau)]$ in einem und demselben Punkt, oder $(\mathcal{A}_1 - \mathcal{B}_1)$ und $(\mathcal{A}_2 - \mathcal{B}_2)$ schneiden sich auf τ. Da aber die Punktreihen harmonisch sind, schneiden sich nach § 3. Lehrsatz 14. auch $(\mathcal{A}_1 - \mathcal{B}_2)$, $(\mathcal{A}_2 - \mathcal{B}_1)$, $[(\alpha \cdot \tau) - (\beta \cdot \tau)]$ in demselben Punkt oder, es schneiden sich auch $(\mathcal{A}_1 - \mathcal{B}_2)$ und $(\mathcal{A}_2 - \mathcal{B}_1)$ auf τ. Ebenso folgt in Fig. 107 b., aus der Harmonie der Punktreihen $(A_1 - A_2)$, $A_1 A' A_2 T$ und $(B_1 - B_2)$, $B_1 B' B_2 T$, daß auch Strahlbüschel $A, \alpha_1 (S - S') \alpha_2 (A - T)$ und $B, \beta_1 (S - S') \beta_2 (B - T)$ harmonisch sind, und da sie perspectivisch liegen, weil sie mit einem Paar entsprechender Strahlen, $(S - S')$ und $(S - S')$ zusammenfallen, daß $(\alpha_1 \cdot \beta_1)$ und $(\alpha_2 \cdot \beta_2)$ und

auch, daß $(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_2)$ und $(\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}_1)$ je auf einer durch T gehenden Geraden liegen. Wir suchen nun in Fig. 107 a. den Durchschnittspunkt der Geraden $(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1)$, $(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2)$, die bezüglich t_1 und t_2, sowie den Durchschnitt von $(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_2)$ und $(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_1)$, die bezüglich $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ heißen sollen (sie sind in der Figur nicht gezeichnet), zu bestimmen. Zunächst schneiden sich in dem einfachen Sechseck $\mathfrak{A}_2 (a_2 \cdot b_1) \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) \mathfrak{B}_2$ die Gegenseiten auf einer und derselben Geraden, nämlich auf τ, da wir wissen, daß $(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1)$ und $(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2)$ sich auf τ schneiden; es ist also nach § 5. Lehrsatz 8. Strahlbüschel $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) (a_2 \cdot b_1) \mathfrak{B}_2 \barwedge$ Strahlbüschel $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) (a_2 \cdot b_1) \mathfrak{B}_2$. Es ist aber Strahlbüschel $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) (a_2 \cdot b_1) \mathfrak{B}_2$ für die Axe b_2 perspectivisch dem Strahlbüschel $(s \cdot s'), \alpha\gamma'\gamma\beta$. Wegen der Involution des Strahlbüschels $(s \cdot s')$ $s\beta\gamma\alpha s'\alpha'\gamma'\beta'$ ist aber $(s \cdot s'), \alpha\gamma'\gamma\beta \barwedge (s \cdot s'), \alpha'\gamma\gamma'\beta'$; also ist Strahlbüschel $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) (a_2 \cdot b_1) \mathfrak{B}_2 \barwedge (s \cdot s'), \alpha'\gamma\gamma'\beta'$, und nach § 1. Lehrsatz 14. auch Strahlbüschel $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) \mathfrak{B}_2 (a_2 \cdot b_1) \barwedge (s \cdot s'), \alpha'\gamma\beta'\gamma'$. Da aber $(a_1 \cdot b_1) (a_1 \cdot b_2) (a_2 \cdot b_2) (a_2 \cdot b_1)$ ein vollständiges Viereck ist, ist nach § 3. Lehrsatz 17. Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\alpha'\gamma\beta'\gamma'$, also auch Strahlbüschel $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) \mathfrak{B}_2 (a_2 \cdot b_1)$ harmonisch, und da Strahlbüschel $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) (a_2 \cdot b_1) \mathfrak{B}_2 \barwedge \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) (a_2 \cdot b_1) \mathfrak{B}_2$, also auch nach § 1. Lehrsatz 14. Strahlbüschel $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) \mathfrak{B}_2 (a_2 \cdot b_1) \barwedge \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) \mathfrak{B}_2 (a_2 \cdot b_1)$ ist, muß auch Strahlbüschel $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) \mathfrak{B}_2 (a_2 \cdot b_1)$ also auch $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 (a_1 \cdot b_2) \mathfrak{A}_1 (a_2 \cdot b_1)$ harmonisch sein. Es muß also auch sowohl die von $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2) \mathfrak{B}_2 (a_2 \cdot b_1)$ als von $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 (a_1 \cdot b_2) \mathfrak{A}_1 (a_2 \cdot b_1)$ auf γ' hervorgebrachte Punktreihe harmonisch sein. Da nun $(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1)$ oder α die γ' in $(s \cdot s')$ und $(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2)$ oder β die γ' ebenfalls in $(s \cdot s')$ trifft, so muß der Durchschnittspunkt von $(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1)$ und $(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2)$, oder $(t_1 \cdot t_2)$, von dem wir oben bewiesen hatten, daß er auf γ' liege, der vierte harmonische sein in der Punktreihe γ', $(s \cdot s') (a_1 \cdot b_2) (t_1 \cdot t_2) (a_2 \cdot b_1)$. Es ist nun γ' eine Diagonale im vollständigen Vierseit $a_1 a_2 b_1 b_2$, sie wird daher nach Lehrsatz 10. und § 3. Lehrsatz 17. in $(s \cdot s')$, $(a_1 \cdot b_2)$, $(\tau \cdot \gamma')$, $(a_2 \cdot b_1)$ harmonisch getheilt; folglich muß $(t_1 \cdot t_2)$ in $(\tau \cdot \gamma')$ liegen. Um nun den Durchschnittspunkt $(\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2)$ von $(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_2)$ und $(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_1)$ zu finden, bedenken wir: Da in dem vollständigen Viereck $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$ $(t_1 \cdot t_2)$, $(\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2)$ und $(s \cdot s')$ Durchschnittspunkte von Gegenseiten sind, so ist, nach § 3. Lehrsatz 17. Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $(t_1 \cdot t_2) \alpha (\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2) \beta$ harmonisch, oder da $(t_1 \cdot t_2)$ mit $(\tau \cdot \gamma')$ also der Strahl $[(s \cdot s') - (t_1 \cdot t_2)]$ mit γ' zusammenfällt, Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\gamma' \alpha (\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2) \beta$ harmonisch. Nun sahen wir im Verlaufe dieses Beweises, daß Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\alpha'\gamma\beta'\gamma'$ harmonisch war. Aus der Involution des Strahlbüschels $(s \cdot s')$, $s\beta\gamma\alpha s'\alpha'\gamma'\beta'$ folgt aber, daß $(s \cdot s')$, $\alpha'\gamma\beta'\gamma' \barwedge (s \cdot s')$, $\alpha\gamma'\beta\gamma$, daß also auch Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\alpha\gamma'\beta\gamma$ und also auch $(s \cdot s')$, $\gamma'\alpha\gamma\beta$ harmonisch ist. Es muß also $[(s \cdot s') - (\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2)]$ mit γ zusammenfallen, und da $(\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2)$, wie wir oben sahen, auch auf τ liegt, so muß $(\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2)$ nach $(\tau \cdot \gamma)$ fallen. Suchen wir nun in Fig. 107 b. die Verbindungsgeraden der Punkte

$(\alpha_1 \cdot \beta_1)$, $(\alpha_2 \cdot \beta_2)$, die bezüglich T_1 und T_2, sowie die Verbindungsgeraden der Punkte $(\alpha_1 \cdot \beta_2)$, $(\alpha_2 \cdot \beta_1)$, die bezüglich $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ heißen sollen, (sie sind in der Figur nicht gezeichnet), zu bestimmen. In dem einfachen Sechsseit $\alpha_2(A_2-B_1)\beta_1\alpha_1(A_1-B_2)\beta_2$ gehen die Diagonalen der gegenüberliegenden Ecken durch denselben Punkt T, da wir wissen, daß $(\alpha_1 \cdot \beta_1)$ und $(\alpha_2 \cdot \beta_2)$ durch T gehen. Es ist also nach § 5. Lehrsatz 8. Punktreihe $\alpha_2, \alpha_1(A_1-B_2)(A_2-B_1)\beta_2 \;\overline{\wedge}\;$ Punktreihe $\beta_1, \alpha_1 (A_1-B_2)(A_2-B_1)\beta_2$; erstere liegt nun für das Centrum B_2 perspectivisch mit der Punktreihe $(S-S')$, $A\Gamma'TB$. Wegen der Involution der Punktreihe $(S-S')$, $SB\Gamma AS'A'T'B'$ ist aber $(S-S')$, $A\Gamma'TB \;\overline{\wedge}\; (S-S')$, $A'T\Gamma'B'$, also auch mit Berücksichtigung von § 1. Lehrsatz 14. Punktreihe $\alpha_2, \alpha_1(A_1-B_2)\beta_2(A_2-B_1) \;\overline{\wedge}\; (S-S')$, $A'TB'T'$. Im vollständigen Vierseit $(A_1-B_1)(A_1-B_2)(A_2-B_2)(A_2-B_1)$ ist nun nach § 3. Lehrsatz 17. Punktreihe $(S-S')$, $A'TB'T'$, also auch $\alpha_2, \alpha_1 (A_1-B_2)\beta_2(A_2-B_1)$, folglich auch $\beta_1, \alpha_1(A_1-B_2)\beta_2(A_2-B_1)$ und $\beta_1, \beta_2(A_1-B_2)\alpha_1(A_2-B_1)$ harmonisch. Verbindet man die Punkte dieser Punktreihen auf α_2 und β_1 mit Γ', so muß, da die Verbindungsgerade des Punkts $(\alpha_2 \cdot \alpha_1)$ oder A mit Γ' zugleich durch $(\beta_2 \cdot \beta_1)$ oder B geht, indem $(S-S')$ diese Verbindungsgerade ist, und da (A_1-B_2) und (A_2-B_1) durch Γ' gehen, und da wir oben sahen, daß auch (T_1-T_2) durch Γ' gehen, der Strahlbüschel Γ', $(S-S')(A_1-B_2)(T_1-T_2)(A_2-B_1)$ harmonisch sein. Es ist aber Γ' ein Durchschnittspunkt der Gegenseiten im vollständigen Viereck $A_1A_2B_1B_2$ also ist nach Lehrsatz 10. und § 3. Lehrsatz 17. Γ', $(S-S')(A_1-B_2)(\Gamma'-T)A_2-B_1)$ harmonisch, folglich fällt (T_1-T_2) mit $(\Gamma'-T)$ zusammen. Da im vollständigen Vierseit $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2$ (T_1-T_2), $(\mathfrak{T}_1-\mathfrak{T}_2)$ und $(S-S')$ die Diagonalen sind, so ist Punktreihe $(S-S')$, $(T_1-T_2)A(\mathfrak{T}_1-\mathfrak{T}_2)B$ harmonisch, oder, da $[(S-S')\cdot(T_1-T_2)]$ der Punkt Γ' ist, es ist $(S-S')$, $\Gamma'A(\mathfrak{T}_1-\mathfrak{T}_2)B$ harmonisch. Nun war $(S-S')$, $A'TB'T'$, also wegen der Involution auf $(S-S')$ auch $(S-S')$, $A\Gamma'B\Gamma$ und $(S-S')$, $\Gamma'A\Gamma B$ harmonisch. Es muß also $[(S-S')\cdot(\mathfrak{T}_1-\mathfrak{T}_2)]$ nach Γ fallen, und da $(\mathfrak{T}_1-\mathfrak{T}_2)$, wie wir oben sahen, auch durch Γ geht, so muß er mit $(T-\Gamma)$ zusammenfallen. Man sieht also:

17. Lehrsatz. Der Durchschnittspunkt $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{B}_1)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{B}_2)]$ fällt mit $(\tau\cdot\gamma')$, der Durchschnittspunkt $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{B}_2)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{B}_1)]$ mit $(\tau\cdot\gamma)$ zusammen.

17. Lehrsatz. Die Verbindungsgerade $[(\alpha_1\cdot\beta_1)-(\alpha_1\cdot\beta_2)]$ fällt mit $(T-\Gamma')$, die Verbindungsgerade $[(\alpha_1\cdot\beta_2)-(\alpha_2\cdot\beta_1)]$ mit $(T-\Gamma)$ zusammen.

Es seien nun π_1, π_2, Fig. 108a., ein Paar im Punkte $(\tau\cdot\gamma')$ der Geraden τ convergirende Projectionsstrahlen, wenn nämlich γ' eine Gerade ist, welche die τ auf derjenigen Strecke trifft, auf welcher nach Lehrsatz 3. in jedem Punkte ein Paar solcher Projectionsstrahlen sich schneiden müssen. Da nun nach Lehrsatz 11. Strahlbüschel $(s\cdot s')$, $s\gamma s'\gamma'$ harmonisch, und γ und γ' zugeordnete harmonische Punkte sind,

so muß immer, wenn der eine die Gerade τ auf der endlichen Strecke TP' schneidet, der andere die τ auf der unendlichen Strecke $T\infty P'$ schneiden. Es müssen also stets, entweder in $(\tau \cdot \gamma')$ oder in $(\tau \cdot \gamma)$ sich ein Paar Projectionsstrahlen schneiden. Wir haben nun den die τ in $T\infty P'$ schneidenden Strahl mit γ' bezeichnet, und nach Lehrsatz 3. schneiden sich also in $(\tau \cdot \gamma')$ jedenfalls zwei Projectionsstrahlen, die π_1, π_2 heißen. Schneiden sich in einem Punkte der Strecke $P'\infty T$ der τ ein Paar Projectionsstrahlen, so muß nun allemal einer von ihnen die s auf der Strecke PT und s' auf der Strecke P'T', der andere s auf der Strecke $P\infty T$, s' auf $P'\infty T'$ schneiden. Denn gingen (Fig. 103a.) durch einen Punkt Π der τ auf der Strecke $P'\infty T$ zwei Strahlen a_1, a_3, die beide s auf $P\infty T$ und s' auf $P'\infty T'$ träfen, so wäre also Punktreihe $s, PA_1A_3T \barwedge s', P'A'_3A'_1T'$, was nicht möglich ist, da die Aufeinanderfolge der entsprechenden Punkte auf beiden Geraden s, s' nicht dieselbe ist. Schnitten sich aber in Π zwei Projectionsstrahlen a_2, a_4, welche beide die s in PT, s' in P'T' träfen, so müßte Punktreihe $s, PA_2A_4T \barwedge s', P'A'_4A'_2T'$ sein, was ebenfalls aus denselben Gründen unmöglich ist. Es muß also von zwei solchen Projectionsstrahlen allemal der eine s und s' auf PT, P'T', der andere auf $P\infty T$, $P'\infty T'$ schneiden, wobei es gleichgültig ist, ob letzteres links von $(s \cdot s')$ oder rechts von $(s \cdot \tau)$ oder $(s' \cdot \tau)$ geschieht. Der erstgenannte Strahl soll mit π_2 bezeichnet werden, der andere, der also s auf der Strecke $P\infty T$ und s' auf der Strecke $T'\infty P'$ trifft, mit π_1; ebenso wie es bei a und b geschehen war. Ebenso, wie nun bei den zwei paarweise auf τ sich schneidenden Projectionsstrahlen sich die Geraden $[(s' \cdot a_1) - (a_2 \cdot s)]$ und $[(s' \cdot a_2) - (a_1 \cdot s)]$ oder m_2 und m_4, und auch die Geraden $[(s' \cdot b_1) - (b_2 \cdot s)]$ und $[(s' \cdot b_2) - (b_1 \cdot s)]$ oder $\mathfrak{w}_3$ und $\mathfrak{w}_5$ auf τ schneiden, so schneiden sich auch $[(s' \cdot \pi_1) - (\pi_2 \cdot s)]$ und $[(s' \cdot \pi_2) - (\pi_1 \cdot s)]$ auf τ; und zwar müssen sich diese beiden Geraden $[(s' \cdot \pi_1) - (\pi_2 \cdot s)]$ und $[(s' \cdot \pi_2) - (\pi_1 \cdot s)]$ in $(\tau \cdot \gamma)$ treffen. Denn wir sahen, indem wir von den Projectionsstrahlen a_1, a_2; b_1, b_2 ausgingen, daß der Strahlbüschel $(s \cdot s')$ $s\beta\gamma\alpha s'\alpha'\gamma'\beta'$ involutorisch nach Lehrsatz 15., also, da α und α' entsprechende Strahlen sind, nach § 4. Lehrsatz 15. Strahlbüschel $(s \cdot s')$ $s\alpha s'\alpha'$ harmonisch ist; daß man also den Strahl α, d. h. die von $(s \cdot s')$ nach dem Durchschnittspunkt von $[(s' \cdot a_1) - (a_2 \cdot s)]$ und $[(s' \cdot a_2) - (a_1 \cdot s)]$ gezogene Gerade erhält, wenn man denjenigen Strahl sucht, der in einem Strahlbüschel mit dem Scheitel $(s \cdot s')$ und den Strahlen s, s' und dem nach dem Durchschnittspunkt $(a_1 \cdot a_2)$ gezogenen α', der dem letzteren zugeordnete harmonische ist. Wären wir nun statt von den Strahlenpaaren a_1, a_2; b_1, b_2 ausgegangen von den Strahlen π_1, π_2; b_1, b_2, so wäre überall π_1, π_2 an die Stelle von a_1, a_2 getreten, und wir hätten, um den von $(s \cdot s')$ nach dem Durchschnittspunkte von $[(s' \cdot \pi_1) - (\pi_2 \cdot s)]$ und $[(s' \cdot \pi_2) - (\pi_1 \cdot s)]$ gezogenen Strahl zu finden, nur denjenigen Strahl zu suchen, der so liegt, daß der Strahlbüschel mit dem Scheitel $(s \cdot s')$, und den Strahlen: s, dem gesuchten Strahl, s', dem von $(s \cdot s')$ nach

dem Durchschnittspunkte $(\pi_1 \cdot \pi_2)$ gezogenen Strahl, harmonisch ist. Nun liegt aber nach der Annahme $(\pi_1 \cdot \pi_2)$ in $(\tau \cdot \gamma')$; es ist also γ' der von $(s \cdot s')$ nach $(\pi_1 \cdot \pi_2)$ gezogene Strahl und der von $(s \cdot s')$ nach dem Durchschnittspunkte von $[(s' \cdot \pi_1) - (\pi_2 \cdot s)]$ und $[(s' \cdot \pi_2) - (\pi_1 \cdot s)]$ gezogene muß also so liegen, daß er in dem Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $ss'\gamma'$ der dem γ' zugeordnete harmonische ist. Nach Lehrsatz 11. ist aber $(s \cdot s')$, $s\gamma s'\gamma'$ harmonisch; folglich muß γ der Strahl sein, der von $(s \cdot s')$ nach dem Durchschnittspunkt von $[(s' \cdot \pi_1) - (\pi_2 \cdot s)]$ und $[(s' \cdot \pi_2) - (\pi_1 \cdot s)]$ führt; d. h. dieser Durchschnittspunkt, muß, da er auch auf τ sich befindet, in $(\tau \cdot \gamma)$ liegen.

Es bilden ferner die Strahlen π_1, π_2 sowohl mit a_1, a_2, als mit b_1, b_2 eben solche vollständige Vierecke, wie das von a_1, a_2 mit b_1, b_2 gebildete $(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot b_2)(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot b_1)$ eins war. Diese Vierecke sind $(a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot \pi_2)(a_2 \cdot \pi_2)(a_2 \cdot \pi_1)$ und $(b_1 \cdot \pi_1)(b_1 \cdot \pi_2)$ $(b_2 \cdot \pi_2)(b_2 \cdot \pi_1)$. Sowie nun nach Lehrsatz 10. $[(a_1 \cdot b_1) - (a_2 \cdot b_2)]$ und $[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$ durch $(s \cdot s')$ gehen, so müssen jetzt $[(a_1 \cdot \pi_1) - (a_2 \cdot \pi_2)]$ und $[(a_1 \cdot \pi_2) - (a_2 \cdot \pi_1)]$ und ebenso $[(b_1 \cdot \pi_1) - (b_2 \cdot \pi_2)]$ und $[(b_1 \cdot \pi_2) - (b_2 \cdot \pi_1)]$ durch $(s \cdot s')$ gehen. Es haben also jetzt diese Geraden dieselbe Bedeutung wie γ und γ'. Nach Lehrsatz 12. war nun der Durchschnittspunkt der Geraden τ und γ' zugleich der Durchschnittspunkt von $(A_2 - B'_2)$, $(B_2 - A'_2)$, $(A_1 - B'_1)$, $(B_1 - A'_1)$ nämlich von w_6, w_4, n_1, m_3 oder von $[(a_2 \cdot s) - (b_2 \cdot s')]$, $[(b_2 \cdot s) - (a_2 \cdot s')]$, $[(a_1 \cdot s) - (b_1 \cdot s')]$, $[(b_1 \cdot s) - (a_1 \cdot s')]$. Der Durchschnittspunkt dieser Geraden ist also zugleich der von τ mit γ' oder von τ mit $[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$. Da nun $(A_2 - B'_2)$, $(B_2 - A'_2)$, $(A_1 - B'_1)$, $(B_1 - A'_1)$, sich nicht auf der endlichen Strecke TP' treffen können, so muß $[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$ die τ auf der Strecke $T \infty P'$ schneiden. Denken wir uns π_1, π_2 an die Stelle von b_1 und b_2 gesetzt, so muß ebenso $[(a_1 \cdot \pi_2) - (a_2 \cdot \pi_1)]$ die τ im Durchschnittspunkt von $[(a_2 \cdot s) - (\pi_2 \cdot s')]$ und $[(\pi_2 \cdot s) - (a_2 \cdot s')]$ schneiden, also ebenso wie γ' auf der Strecke $P' \infty T$; denken wir uns π_1, π_2 an die Stelle von a_1, a_2 gesetzt, so muß ebenso $[(b_1 \cdot \pi_2) - (b_2 \cdot \pi_1)]$ die τ auf $P' \infty T$ schneiden. Bezeichnen wir nun $[(a_1 \cdot \pi_1) - (a_2 \cdot \pi_2)]$ mit δ; $[(a_1 \cdot \pi_2) - (a_2 \cdot \pi_1)]$ mit δ', $[(b_1 \cdot \pi_1) - (b_2 \cdot \pi_2)]$ mit ε, $[(b_1 \cdot \pi_2) - (b_2 \cdot \pi_1)]$ mit ε', so geht wie früher γ und γ', so jetzt δ und δ', ε und ε' durch $(s \cdot s')$. Stellen wir uns also vor, wir hätten im Bisherigen nicht mit den Projectionsstrahlen a_1, a_2; b_1, b_2; sondern mit a_1, a_2; π_1, π_2 zu thun gehabt, so hätten wir auf dieselbe Weise wie bisher den Lehrsatz 15. erhalten. In diesem aber würde δ und δ' die Stelle von γ und γ' vertreten. Da ferner dort β' der Strahl $[(s \cdot s') - (b_1 \cdot b_2)]$ war, so tritt an seine Stelle jetzt $[(s \cdot s') - (\pi_1 \cdot \pi_2)]$, d. h. da $(\pi_1 \cdot \pi_2)$ in $(\tau \cdot \gamma')$ liegt, γ', und also an die Stelle von β tritt γ, da $(s \cdot s')$ $s\beta's\beta'$ harmonisch sein, und also jetzt für β ein Strahl eintreten muß, der im Strahlbüschel $(s \cdot s')$ $ss'\gamma'$ der dem γ' zugeordnete harmonische sein muß. Dieß ist aber nach Lehrsatz 11. der Strahl γ; es tritt also γ an die Stelle von β; und es ist Strahlbüschel $(s \cdot s)$, $s\gamma\delta\alpha\, s'\alpha'\delta'\gamma'$ involutorisch. Ebenso

ergiebt sich, wenn man sich vorstellt, daß im Bisherigen nicht die Projectionsstrahlen a_1, a_2; b_1, b_2, sondern π_1, π_2; b_1, b_2 betrachtet worden wären, indem ε und ε' an die Stelle von γ und γ'; γ und γ' an die Stelle von α und α' treten, daß auch Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $s\beta\varepsilon\gamma s'\gamma'\varepsilon'\beta'$ involutorisch ist. In dem ersteren Strahlbüschel sind nun s, s' Hauptstrahlen, γ, γ'; α, α' entsprechende. Es hat also derselbe mit dem im Lehrsatz 15. genannten involutorischen Büschel drei Paar Strahlen als entsprechende, und die Hauptstrahlen gemein. Wenn auch nur ersteres der Fall wäre, so würde man doch schon aus § 4. Lehrsatz 14. schließen, daß auch δ, δ' entsprechende Strahlen des involutorischen Büschels in Lehrsatz 15. sein; um so mehr also, da beide Strahlbüschel auch die Hauptstrahlen gemein haben. Ebenso ergiebt sich, daß auch ε und ε' entsprechende Strahlen des involutorischen Büschels in Lehrsatz 15. sind. Es ist also Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $s\beta\varepsilon\gamma\delta\alpha$ $s'\alpha'\delta'\gamma'\varepsilon'\beta'$ involutorisch.

Sowie nun, wenn wir vom Viereck $(a_1 \cdot b_1)\,(a_1 \cdot b_2)\,(a_2 \cdot b_2)\,(a_2 \cdot b_1)$ ausgingen, der Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\alpha\gamma'\beta\gamma$ harmonisch war, in welchem unter α der dem Strahl α' oder $[(s \cdot s') - (a_1 \cdot a_2)]$ zugeordnete harmonische verstanden war, und in welchem β der dem Strahl β' oder $[(s \cdot s') - (b_1 \cdot b_2)]$ zugeordnete harmonische ist, so muß jetzt, wenn wir vom Viereck $(a_1 \cdot \pi_1)\,(a_1 \cdot \pi_2)\,(a_2 \cdot \pi_2)\,(a_2 \cdot \pi_1)$ ausgehen, Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\alpha\delta'\gamma\delta$ harmonisch sein, da jetzt δ und δ' für γ und γ', und γ für β eintritt; gehen wir vom Viereck $(b_1 \cdot \pi_1)\,(b_1 \cdot \pi_2)\,(b_2 \cdot \pi_2)\,(b_2 \cdot \pi_1)$ aus, so tritt ε, ε', γ ein für γ, γ', α, und es ist also auch Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\gamma\varepsilon'\beta\varepsilon$ harmonisch, also auch $(s \cdot s')$, $\beta\varepsilon'\gamma\varepsilon$ harmonisch. Wir sehen also, es ist:

Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\alpha\delta'\gamma\delta$ und Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\beta\varepsilon'\gamma\varepsilon$ harmonisch.

Fig. 108 a. Bezeichnet man nun die Geraden $[(\pi_1 \cdot \pi_2) - (a_1 \cdot b_1)]$, $[(\pi_1 \cdot \pi_2) - (a_2 \cdot b_2)]$ bezüglich mit d_1, d_2, so ergiebt sich, da Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\alpha\delta'\gamma\delta$, also auch Punktreihe a_1, $\mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_2)\,(a_1 \cdot b_1)\,(a_1 \cdot \pi_1)$ harmonisch ist, daß auch Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_1\pi_2 d_1\pi_1$ und daher auch $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $d_1\pi_2 t_1\pi_1$, also auch Punktreihe b_1, $(b_1 \cdot a_1)$ $(b_1 \cdot \pi_2)\mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot \pi_1)$ harmonisch ist. Es ist also Punktreihe a_1, $\mathfrak{A}_1$ $(a_1 \cdot \pi_2)\,(a_1 \cdot b_1)\,(a_1 \cdot \pi_1) \;\overline{\wedge}\; b_1$, $(b_1 \cdot a_1)\,(b_1 \cdot \pi_2)\mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot \pi_1)$. Ebenso folgt aus der Harmonie des Strahlbüschels $(s \cdot s')$, $\alpha\delta'\gamma\delta$, daß auch Punktreihe a_2, $\mathfrak{A}_2 (a_2 \cdot \pi_1)\,(a_2 \cdot b_2)\,(a_2 \cdot \pi_2)$ und auch Punktreihe a_2, $\mathfrak{A}_2 (a_2 \cdot \pi_2)\,(a_2 \cdot b_2)\,(a_2 \cdot \pi_1)$ harmonisch ist. Hieraus ergiebt sich weiter, daß auch Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_2\pi_2 d_2\pi_1$ oder $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $d_2\pi_2 t_2\pi_1$, also auch Punktreihe b_2, $(b_2 \cdot a_2)\,(b_2 \cdot \pi_2)\mathfrak{B}_2 (b_2 \cdot \pi_1)$ harmonisch ist. Es ist also auch Punktreihe a_2, $\mathfrak{A}_2 (a_2 \cdot \pi_2)\,(a_2 \cdot b_2)$ $(a_2 \cdot \pi_1) \;\overline{\wedge}\; b_2$, $(b_2 \cdot a_2)\,(b_2 \cdot \pi_2)\mathfrak{B}_2 (b_2 \cdot \pi_1)$. Man hat also

Punktreihe a_1, $\mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_2)\,(a_1 \cdot b_1)\,(a_1 \cdot \pi_1) \;\overline{\wedge}$
Punktreihe b_1, $(b_1 \cdot a_1)\,(b_1 \cdot \pi_2)\mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot \pi_1)$; } I. a)

Punktreihe a_2, $\mathfrak{A}_2 (a_2 \cdot \pi_2)\,(a_2 \cdot b_2)\,(a_2 \cdot \pi_1) \;\overline{\wedge}$
Punktreihe b_2, $(b_2 \cdot a_2)\,(b_2 \cdot \pi_2)\mathfrak{B}_2 (b_2 \cdot \pi_1)$; } I. b)

Doch es folgt auch noch mehr. Es war also Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_1\pi_2 d_1\pi_1$ oder $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_1\pi_1 d_1\pi_2$, und ebenso Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_2\pi_2 d_2\pi_1$ oder $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_2\pi_1 d_2\pi_2$ harmonisch. Nach Lehrsatz 6. ist nämlich auch Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\pi_1\gamma'\pi_2\tau$ oder $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\gamma'\pi_1\tau\pi_2$ harmonisch. Es wird also $\angle \pi_1\pi_2$ von t_1 und d_1; t_2 und d_2; γ' und τ harmonisch getheilt; folglich ist nach § 4. Lehrsatz 17. Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_1\pi_1 d_1\gamma' d_2\pi_2 t_2\tau$ entgegengesetzt involutorisch mit den Hauptstrahlen π_1 und π_2; oder es ist Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_1\pi_1 d_1\gamma' d_2\pi_2 t_2\tau \overline{\wedge}$ Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $d_1\pi_1 t_1\tau t_2\pi_2 d_2\gamma'$ und den Strahlen

$$\left.\begin{array}{ll} & t_1;\ t_2;\ \tau;\ \pi_1;\ \pi_2; \\ \text{entsprechen} & d_1;\ d_2;\ \gamma';\ \pi_1;\ \pi_2; \end{array}\right\} \quad \text{A)}$$

indem je zwei entsprechende Strahlen der Involution unter einander gesetzt sind.

Ferner ist in dem vollständigen Viereck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ (s. auch Fig. 107 a.) nach § 3. Lehrsatz 17. Strahlbüschel $(\tau \cdot \gamma')$, $t_1\gamma' t_2\tau$, oder also hier, da $(\tau \cdot \gamma')$ mit $(\pi_1 \cdot \pi_2)$ zusammenfällt, Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_1\gamma' t_2\tau$ harmonisch. Ebenso ist in dem vollständigen Vierseit $a_1 b_1 a_2 b_2$ Fig. 108 a. Punktreihe γ, $(a_1 \cdot b_1)$ $(s \cdot s')$ $(a_2 \cdot b_2)$ $(\tau \cdot \gamma)$ harmonisch, also deßgleichen auch Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $d_1\gamma' d_2\tau$; und nach Lehrsatz 6. ist auch $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\pi_1\gamma'\pi_2\tau$ harmonisch. Es wird also auch $\angle \gamma'\tau$ durch t_1 und t_2, d_1 und d_2, π_1 und π_2 harmonisch getheilt; folglich ist auch nach § 4. Lehrsatz 17. Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_1\pi_1 d_1\gamma' d_2\pi_2 t_2\tau$ entgegengesetzt involutorisch mit den Hauptstrahlen γ' und τ; oder es ist Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_1\pi_1 d_1\gamma' d_2\pi_2 t_2\tau \overline{\wedge} (\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_2\pi_2 d_2\gamma' d_1\pi_1 t_1\tau$, indem die Strahlen

$$\left.\begin{array}{ll} & t_1;\ d_1;\ \pi_1;\ \tau;\ \gamma'; \\ \text{und} & t_2;\ d_2;\ \pi_2;\ \tau;\ \gamma'; \end{array}\right\} \quad \text{B)}$$

entsprechende sind, nämlich so, daß je zwei unter einander stehende sich entsprechen. Es können also die sechs in $(\pi_1 \cdot \pi_2)$ sich schneidenden Strahlen auf doppelte Weise als Strahlen eines involutorischen Strahlbüschels angesehen werden, einmal, nach A), als Strahlen eines solchen, in dem π_1 und π_2, sodann, nach B), als Strahlen eines solchen, in dem γ' und τ Hauptstrahlen sind.

Nach A) ist nun

	Strahlbüschel		Strahlbüschel	
	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_2\pi_2 d_2\tau$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $d_2\pi_2 t_2\gamma'$;	
nach B) aber	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_2\pi_2 d_2\tau$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_1\pi_1 d_1\tau$;	
also ist	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_1\pi_1 d_1\tau$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $d_2\pi_2 t_2\gamma'$.	
Nach B) aber ist	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $d_2\pi_2 t_2\gamma'$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $d_1\pi_1 t_1\gamma'$	*)
also ist	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $t_1\pi_1 d_1\tau$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $d_1\pi_1 t_1\gamma'$;	†)

also Punktreihe a_1, $\mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_1)$ $(a_1 \cdot b_1)$ $(a_1 \cdot a_2)$ $\overline{\wedge}$ b_1, $(b_1 \cdot a_1)$ $(b_1 \cdot \pi_1)$ $\mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot a_2)$. Diese Punktreihen haben aber mit den in I. a) erwähnten

drei Punkte, nämlich auf a_1 die Punkte: $\mathfrak{A}_1$; $(a_1 \cdot b_1)$; $(a_1 \cdot \pi_1)$, auf b_1 die Punkte $(b_1 \cdot a_1)$; $\mathfrak{B}_1$; $(b_1 \cdot \pi_1)$ gemein; es sind also auch $(a_1 \cdot a_2)$ und $(b_1 \cdot a_2)$ ein Paar entsprechender Punkte der Reihen in I. a). nach § 2. Lehrsatz 10. Es ist also auch

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punktreihe } a_1, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot \pi_2)(a_1 \cdot a_2) \barwedge \\ \text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot \pi_2)(b_1 \cdot a_2);\end{array}\right\} \quad C)$$

Da ferner nach †)

$$\text{Strahlbüschel } (\pi_1 \cdot \pi_2),\ t_1 \pi_1 d_1 \tau \barwedge \text{Strahlbüschel } (\pi_1 \cdot \pi_2),\ d_1 \pi_1 t_1 \gamma'$$

war, ist auch

$$\begin{array}{l}\text{Punktreihe } b_1, \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot \pi_1)(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot b_2) \barwedge \\ \text{Punktreihe } a_1, (a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot \pi_1) \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_2);\end{array}$$

oder

$$\begin{array}{l}\text{Punktreihe } a_1, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot b_2) \barwedge \\ \text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot b_2).\end{array}$$

Diese Punktreihen haben wieder mit den in C) erwähnten drei Punkte gemein; es ist also auch:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punktreihe } a_1, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot b_2)(a_1 \cdot \pi_2)(a_1 \cdot a_2) \barwedge \\ \text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2)(b_1 \cdot a_2);\end{array}\right\} D)$$

Da ferner nach *)

$$\text{Strahlbüschel } (\pi_1 \cdot \pi_2),\ t_1 \pi_1 d_1 \tau \barwedge (\pi_1 \cdot \pi_2),\ d_1 \pi_1 t_1 \gamma'$$

war, ist auch

$$\begin{array}{l}\text{Punktreihe } a_1, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot a_2) \barwedge \\ \text{Punktreihe } b_1, (b_1 . a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot a_2)\end{array}$$

folglich auch

$$\begin{array}{l}\text{Strahlbüschel } (s \cdot s'),\ \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot a_2) \barwedge \\ \text{Strahlbüschel } (s \cdot s'),\ (b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot a_2).\end{array}$$

Nun ist aber, wie wir oben sahen, Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\beta \varepsilon' \gamma \varepsilon$ und $(s \cdot s')$, $\alpha \delta' \gamma \delta$ harmonisch, also Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\alpha \delta' \gamma \delta \barwedge (s \cdot s')$, $\beta \varepsilon' \gamma \varepsilon$ und auch $(s \cdot s')$, $\alpha \delta' \gamma \delta \barwedge (s \cdot s')$, $\gamma \varepsilon' \beta \varepsilon$ oder mit anderer Bezeichnung Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $\mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_2)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot \pi_1) \barwedge (s \cdot s')$, $(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_2) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot \pi_1)$. In letzterer Form sieht man, daß sie mit den beiden conformen Strahlbüscheln $(s \cdot s')$, $\mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot a_2)$ und $(s \cdot s')$, $(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot a_2)$ drei Strahlen als entsprechende gemein haben. Es ist also auch

$$\begin{array}{l}\text{Strahlbüschel } (s \cdot s'),\ \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot \pi_2) \barwedge \\ \text{Strahlbüschel } (s \cdot s'),\ (b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot \pi_2)\end{array}$$

oder $(s \cdot s')$, $\alpha \delta \gamma \alpha' \delta' \barwedge (s \cdot s')$, $\gamma \varepsilon \beta \gamma' \varepsilon'$ A')

folglich $(s \cdot s')$, $\gamma \delta \alpha' \delta' \barwedge (s \cdot s')$, $\beta \varepsilon \gamma' \varepsilon'$.

Wegen der Involution des Strahlbüschels $(s \cdot s')$, $s \beta \varepsilon \gamma \delta \alpha s' \alpha' \delta' \gamma' \varepsilon' \beta'$ ist aber $(s \cdot s')$, $\gamma \delta \alpha' \delta' \barwedge (s \cdot s')$, $\gamma' \delta' \alpha \delta$, also ist auch

$$\text{Strahlbüschel } (s \cdot s'),\ \gamma' \delta' \alpha \delta \barwedge (s \cdot s'),\ \beta \varepsilon \gamma' \varepsilon';$$

und daher Punktreihe:

$a_2, (a_2 \cdot b_1)(a_2 \cdot \pi_1)\mathfrak{A}_2(a_2 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}\, b_1, \mathfrak{B}_1(b_1 \cdot \pi_1)(b_1 \cdot a_2)(b_1 . \pi_2)$. B′)
Nach A′) war aber $(s \cdot s'), \alpha\gamma\alpha'\delta' \overline{\wedge} (s \cdot s'), \gamma\beta\gamma'\varepsilon'$, und da wegen der Involution des Strahlbüschels $(s \cdot s')$ auch $(s \cdot s'), \alpha\gamma\alpha'\delta' \overline{\wedge} (s \cdot s'), \alpha'\gamma'\alpha\delta$ ist, so ist auch $(s \cdot s'), \alpha'\gamma'\alpha\delta \overline{\wedge} (s \cdot s'), \gamma\beta\gamma'\varepsilon'$, und daher

Punktreihe $a_2, (a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot b_1)\mathfrak{A}_2(a_2 \cdot \pi_1) \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot a_1)\mathfrak{B}_1(b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot \pi_1)$.

Da diese Punktreihen mit den in B′) aufgestellten je drei Punkte als entsprechend gemein haben, so ist also auch:

Punktreihe $a_2, (a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot b_1)\mathfrak{A}_2(a_2 \cdot \pi_1)(a_2 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot a_1)\mathfrak{B}_1(b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot \pi_1)(b_1 \cdot \pi_2)$;
oder Punktreihe $a_2, \mathfrak{A}_2(a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot \pi_1)(a_2 \cdot b_1)(a_2 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}$ C′)
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1)\mathfrak{B}_1(b_1 \cdot \pi_2)$;

Ferner war nach A′) Strahlbüschel $(s \cdot s'), \alpha\gamma\alpha'\delta' \overline{\wedge} (s \cdot s'), \gamma\beta\gamma'\varepsilon'$, und da wegen der Involution des Strahlbüschels $(s \cdot s')$ auch $(s \cdot s'), \gamma\beta\gamma'\varepsilon' \overline{\wedge} (s \cdot s'), \gamma'\beta'\gamma\varepsilon$ ist, so ist auch $(s \cdot s'), \alpha\gamma\alpha'\delta' \overline{\wedge} (s \cdot s'), \gamma'\beta'\gamma\varepsilon$, daher auch

Punktreihe $a_2, \mathfrak{A}_2(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot \pi_1) \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1)$.

Da diese Punktreihen mit den in C′) aufgestellten je drei Punkte gemein haben, so ist also auch

Punktreihe $a_2, \mathfrak{A}_2(a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot \pi_1)(a_2 \cdot b_1)(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}$ D′)
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1)\mathfrak{B}_1(b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2)$.

Fassen wir die bisherigen Resultate D und D′ noch einmal zusammen, so sehen wir also: Es ist

Punktreihe $a_1, \mathfrak{A}_1(a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot b_2)(a_1 \cdot \pi_2)(a_1 \cdot a_2) \overline{\wedge}$ II. a)
Punktreihe $b_1(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1)\mathfrak{B}_1(b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2)(b_1 \cdot a_2)$;

und

Punktreihe $a_2, \mathfrak{A}_2(a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot \pi_1)(a_2 \cdot b_1)(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}$ II. b)
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1)\mathfrak{B}_1(b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2)$.

Nach Lehrsatz 12. schneiden sich auch die Geraden n_1 und $\mathfrak{w}_4$ in $(\tau \cdot \gamma')$ oder in $(\pi_1 \cdot \pi_2)$. Da nun nach Lehrsatz 11. Strahlbüschel $(s \cdot s'), s\gamma s'\gamma'$ harmonisch ist, ist ein Gleiches auch mit der Punktreihe $a_1, A_1(a_1 \cdot b_1)A'_1(a_1 \cdot b_2)$, also auch mit dem Strahlbüschel $(\pi_1 . \pi_2), \mathfrak{w}_4 d_1 n_1 \gamma'$ der Fall. Da ferner Strahlbüschel $(s \cdot s'), s\delta s'\delta'$ ebenso wie früher $(s \cdot s'), s\gamma s'\gamma'$ harmonisch ist, ist auch Punktreihe $a_1, A_1(a_1 \cdot \pi_1) A'_1(a_1 \cdot \pi_2)$, also auch Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2), \mathfrak{w}_4 \pi_1 n_1 \pi_2$ harmonisch. Ferner ist, weil Strahlbüschel $(s \cdot s')$ $s\beta\varepsilon\gamma\delta\alpha s'\alpha'\delta'\gamma'\varepsilon'\beta'$ entgegengesetzt involutorisch ist mit den Hauptstrahlen s, s' nach § 4. Lehrsatz 15. Strahlbüschel $(s \cdot s'), s\alpha s'\alpha'$ harmonisch; folglich auch Punktreihe $a_1, A_1 \mathfrak{A}_1 A'_1 (a_1 \cdot a_2)$ und daher Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2), \mathfrak{w}_4 t_1 n_1 \tau$ harmonisch. Wir sehen also, es ist Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2), \mathfrak{w}_4 d_1 n_1 \gamma'$; $(\pi_1 \cdot \pi_2), \mathfrak{w}_4 \pi_1 n_1 \pi_2$; $(\pi_1 \cdot \pi_2), \mathfrak{w}_4 t_1 n_1 \tau$ harmonisch; es wird also

$\angle \omega_4 n_1$ von d_1 und γ', π_1 und π_2, t_1 und τ harmonisch getheilt. Folglich ist nach § 4. Lehrsatz 17. Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2), n_1 t_1 \pi_1 d_1 \omega_4 \gamma' \pi_2 \tau$ entgegengesetzt involutorisch mit den Hauptstrahlen n_1, ω_4; und es entsprechen den Strahlen

$$\left.\begin{array}{l} t_1;\ \pi_1;\ d_1;\ n_1;\ \omega_4 \\ \tau;\ \pi_2;\ \gamma';\ n_1;\ \omega_4 \end{array}\right\} \quad \mathfrak{A})$$

die Strahlen:

Es lassen sich also die an $(\pi_1 \cdot \pi_2)$ zusammenstoßenden Strahlen noch, außer den in A) und B) aufgestellten Arten, auf eine dritte Weise zu einem involutorischen Strahlbüschel anordnen. Da ferner Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2), \omega_4 \pi_1 n_1 \pi_2$ harmonisch war, so sind ω_4 und n_1 auch entsprechende Strahlen des in A) aufgestellten involutorischen Strahlbüschels mit den Hauptstrahlen π_1, π_2 nach § 4. Lehrsatz 18. β). Es ist also Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2), n_1 t_1 \pi_1 d_1 \omega_4 \gamma' d_2 \pi_2 t_2 \tau$ involutorisch, oder es ist Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2), n_1 t_1 \pi_1 d_1 \omega_4 \gamma' d_2 \pi_2 t_2 \tau \overline{\wedge} (\pi_1 \cdot \pi_2), \omega_4 d_1 \pi_1 t_1 n_1 \tau t_2 \pi_2 d_2 \gamma'$; und es entsprechen, um es nochmals zu erwähnen, den Strahlen

$$\left.\begin{array}{l} t_1;\ t_2;\ \tau;\ n_1;\ \pi_1;\ \pi_2; \\ d_1;\ d_2;\ \gamma';\ \omega_4;\ \pi_1;\ \pi_2. \end{array}\right\} \quad \mathfrak{B})$$

die Strahlen

Nach $\mathfrak{A}$) ist nun

	Strahlbüschel		Strahlbüschel
	$(\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 n_1 \tau \pi_2$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_2 n_1 t_1 \pi_1$;
nach $\mathfrak{B}$) aber	$(\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_2 n_1 t_1 \pi_1$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_2 \omega_4 d_1 \pi_1$;
und nach $\mathfrak{A}$)	$(\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_2 \omega_4 d_1 \pi_1$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 \omega_4 \gamma' \pi_2$;
also ist	$(\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 n_1 \tau \pi_2$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 \omega_4 \gamma' \pi_2$; ††)

also auch

Punktreihe $a_1, (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot n_1)(a_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot \pi_1)(b_1 \cdot \omega_4)(b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot \pi_2)$;

oder Punktreihe $a_1, (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot s')(a_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot \pi_1)(b_1 \cdot s')(b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot \pi_2)$,

da $(a_1 \cdot n_1)$ zugleich $(a_1 \cdot s')$ und $(b_1 \cdot \omega_4)$ zugleich $(b_1 \cdot s')$ ist. Beide Punktreihen haben mit den in II. a) aufgestellten drei Punkte als entsprechende gemein, es ist also auch

$$\left.\begin{array}{l} \text{Punktreihe } a_1, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot b_2)(a_1 \cdot \pi_2)(a_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot s') \overline{\wedge} \\ \text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2)(b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot s'); \end{array}\right\} \quad \mathfrak{C})$$

Es folgt aber auch aus $(\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 n_1 \tau \pi_2 \overline{\wedge} (\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 \omega_4 \gamma' \pi_2$ in ††) oder $(\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 \omega_4 \gamma' \pi_2 \overline{\wedge} (\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 n_1 \tau \pi_2$

Punktreihe $a_1, (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot \omega_4)(a_1 \cdot \gamma')(a_1 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot \pi_1)(b_1 \cdot n_1)(b_1 \cdot \tau)(b_1 \cdot \pi_2)$

oder, da $(a_1 \cdot \omega_4)$ mit $(a_1 \cdot s)$, $(b_1 \cdot n_1)$ mit $(b_1 \cdot s)$ zusammenfällt:

Punktreihe $a_1, (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot s)(a_1 \cdot b_2)(a_1 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot \pi_2)(b_1 \cdot s)(b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2)$.

Da diese Punktreihen mit den in II. a) oder in E) aufgestellten drei Paar Punkte als entsprechende gemein haben, so muß auch

$$\left.\begin{array}{l} \text{Punktreihe } a_1, \mathcal{A}_1 (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot s)(a_1 \cdot b_2)(a_1 \cdot \pi_2) \\ \qquad (a_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot s') \overline{\wedge} \\ \text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathcal{B}_1 (b_1 \cdot s)(b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2) \\ \qquad (b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot s') \end{array}\right\} \mathfrak{D})$$

sein. Es war ferner, wie wir oben sahen, Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $s\gamma s'\gamma'$; ferner $(s \cdot s')$, $s\delta s'\delta'$; ferner $(s \cdot s')$, $s\alpha s'\alpha'$ harmonisch; hieraus folgt zugleich, daß auch Punktreihe $a_2, A_2 (a_2 \cdot b_2) A'_2 (a_2 \cdot b_1)$; $a_2, A_2 (a_2 \cdot \pi_2) A'_2 (a_2 \cdot \pi_1)$; $a_2, A_2 \mathcal{A}_2 A'_2 (a_2 \cdot a_1)$ harmonisch ist, daß also auch Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\mathfrak{w}_6 d_2 m_3 \gamma'$; $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\mathfrak{w}_6 \pi_2 m_3 \pi_1$; $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\mathfrak{w}_6 t_2 m_3 \tau$ harmonisch ist. Es ist also nach § 4. Lehrsatz 15. Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\pi_1 \gamma' \mathfrak{w}_6 d_2 \pi_2 t_2 m_3 \tau$ involutorisch mit den Hauptstrahlen $\mathfrak{w}_6$, m_3; und den Strahlen

$$\left.\begin{array}{ll} & t_2;\ \pi_1;\ d_2;\ m_3;\ \mathfrak{w}_6 \\ \text{entsprechen} & \tau;\ \pi_2;\ \gamma';\ m_3;\ \mathfrak{w}_6. \end{array}\right\} \mathfrak{A}')$$

Da ferner, weil nach Lehrsatz 6. Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $a_1 \alpha' a_2 \tau$ harmonisch war, auch Punktreihe s', $A'_1 (s' \cdot s) A'_2 (s' \cdot \tau)$ harmonisch, so ist auch Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $n_1 \gamma' m_3 \tau$ harmonisch. Es sind also n_1 und m_3 ein Paar entsprechende Strahlen im involutorischen Büschel B). Es ist also Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $n_1 t_1 \pi_1 d_1 \gamma' d_2 \pi_2 t_2 m_3 \tau \overline{\wedge} (\pi_1 \cdot \pi_2)$, $m_3 t_2 \pi_2 d_2 \gamma' d_1 \pi_1 t_1 n_1 \tau$; und den Strahlen

$$\left.\begin{array}{ll} & t_1;\ d_1;\ \pi_1;\ n_1;\ \tau;\ \gamma'; \\ \text{entsprechen} & t_2;\ d_2;\ \pi_2;\ m_3;\ \tau;\ \gamma'. \end{array}\right\} \mathfrak{B}')$$

Nach $\mathfrak{A}'$) ist nun

	Strahlbüschel		Strahlbüschel
	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\pi_1 \tau m_3 \pi_2$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\pi_2 t_2 m_3 \pi_1$;
nach $\mathfrak{B}'$) aber	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\pi_2 t_2 m_3 \pi_1$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\pi_1 t_1 n_1 \pi_2$;
nach $\mathfrak{B}$) ist endlich	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\pi_1 t_1 n_1 \pi_2$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\pi_1 d_1 \mathfrak{w}_4 \pi_2$;
also auch	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\pi_1 \tau m_3 \pi_2$	$\overline{\wedge}$	$(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\pi_1 d_1 \mathfrak{w}_4 \pi_2$;

folglich Punktreihe $a_2, (a_2 \cdot \pi_1)(a_2 \cdot \tau)(a_2 \cdot m_3)(a_2 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot \pi_1)(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \mathfrak{w}_4)(b_1 \cdot \pi_2)$;

oder, da $(a_2 \cdot m_3)$ mit $(a_2 \cdot s')$, $(b_1 \cdot \mathfrak{w}_4)$ mit $(b_1 \cdot s')$ zusammenfällt:

Punktreihe $a_2, (a_2 \cdot \pi_1)(a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot s')(a_2 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot \pi_1)(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot s')(b_1 \cdot \pi_2)$.

Da in diesen Reihen drei Punkte, die schon in II. b) entsprechende waren, wieder entsprechend sind, so sind $(a_2 \cdot s')$ und $(b_1 \cdot s')$ entsprechende Punkte der Reihen II. b). Es ist also:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Punktreihe } a_2, \mathcal{A}_2 (a_2 \cdot s')(a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot \pi_1)(a_2 \cdot b_1)(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot \pi_2) \overline{\wedge} \\ \text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot s')(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathcal{B}_1 (b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2). \end{array}\right\} \mathfrak{E}')$$

Es war ferner nach 𝔄') Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 m_3 \pi_2 \mathfrak{w}_6$ harmonisch; es sind daher auch m_3 und $\mathfrak{w}_6$ entsprechende Punkte des involutorischen Strahlbüschels in A) oder in 𝔅), so daß also den Strahlen

$$\left.\begin{array}{ll} & t_1;\ t_2;\ \tau;\ m_3;\ n_1;\ \pi_1;\ \pi_2 \\ \text{entsprechen} & d_1;\ d_2;\ \gamma';\ \mathfrak{w}_6;\ \mathfrak{w}_4;\ \pi_1;\ \pi_2. \end{array}\right\} \quad \mathfrak{A}'')$$

Nun ist nach 𝔄'):

$$\begin{array}{lccc} & \text{Strahlbüschel} & & \text{Strahlbüschel} \\ & (\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 \tau \mathfrak{w}_6 \pi_2 & \overline{\wedge} & (\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_2 t_2 \mathfrak{w}_6 \pi_1; \\ \text{nach } \mathfrak{A}'') \text{ aber} & (\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_2 t_2 \mathfrak{w}_6 \pi_1 & \overline{\wedge} & (\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_2 d_2 m_3 \pi_1; \\ \text{und nach } \mathfrak{B}') & (\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_2 d_2 m_3 \pi_1 & \overline{\wedge} & (\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 d_1 n_1 \pi_2; \\ \text{also ist} & (\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 \tau \mathfrak{w}_6 \pi_2 & \overline{\wedge} & (\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 d_1 n_1 \pi_2; \end{array}$$

folglich Punktreihe $a_2, (a_2 \cdot \pi_1)(a_2 \cdot \tau)(a_2 \cdot \mathfrak{w}_6)(a_2 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot \pi_1)(b_1 \cdot d_1)(b_1 \cdot n_1)(b_1 \cdot \pi_2)$;

oder, da $(a_2 \cdot \mathfrak{w}_6)$ mit $(a_2 \cdot s)$, $(b_1 \cdot n_1)$ mit $(b_1 \cdot s)$ zusammenfällt, es ist: Punktreihe $a_2, (a_2 \cdot \pi_1)(a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot s)(a_2 \cdot \pi_2) \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot \pi_1)(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot s)(b_1 \cdot \pi_2)$.

Da diese mit den Punktreihen II. b) oder ℭ') drei Paar Punkte als entsprechende gemein haben, so sind auch $(a_2 \cdot s)$ und $(b_1 \cdot s)$ ein Paar entsprechende Punkte der Reihen in ℭ'); es ist also:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Punktreihe } a_2, \mathfrak{A}_2 (a_2 \cdot s')(a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot \pi_1)(a_2 \cdot b_1)(a_2 \cdot s) \\ \qquad (a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot \pi_2) \overline{\wedge} \\ \text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot s')(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot s) \\ \qquad (b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2). \end{array}\right\} \quad \mathfrak{D}')$$

Stellen wir also die Resultate 𝔇) und 𝔇') zusammen, so haben wir also gefunden: Es ist

$$\left.\begin{array}{l} \text{Punktreihe } a_1, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot s)(a_1 \cdot b_2)(a_1 \cdot \pi_2) \\ \qquad (a_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot s') \overline{\wedge} \\ \text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot s)(b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2) \\ \qquad (b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot s'); \end{array}\right\} \quad \text{III. a)}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \text{Punktreihe } a_2, \mathfrak{A}_2 (a_2 \cdot s')(a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot \pi_1)(a_2 \cdot b_1)(a_2 \cdot s) \\ \qquad (a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot \pi_2) \overline{\wedge} \\ \text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot s')(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot s) \\ \qquad (b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2). \end{array}\right\} \quad \text{III. b)}$$

Buchstäblich denselben Beweis kann man, indem man „Strahlbüschel" statt „Punktreihe", „Punktreihe" statt „Strahlbüschel", „Scheitel" statt „Richtung", „Richtung" statt „Scheitel", „Punkt" statt „Gerade", „Gerade" statt „Punkt" setzt, und die kleinen Buchstaben mit den großen, die großen mit den kleinen vertauscht, auf die die Curve k_1 erzeugenden einstimmig verlaufenden conformen Strahlbüschel anwenden,

(Fig. 108b), indem man sich auch hier sogleich überzeugt, daß die Punkte $\mathfrak{M}_6$, M_3, $\mathfrak{N}_4$, N_1 und also auch Γ' immer auf einer die Strecke SS' in dem endlichen Theile schneidenden Geraden liegen müssen, so lange die Strahlbüschel einstimmig verlaufen. Man findet dann: Es ist

$$\left.\begin{array}{l} \text{Strahlbüschel } A_1, \alpha_4 (A_1 - \Pi_1)(A_1 - B_1)(A_1 - S)(A_1 - B_2) \\ \qquad (A_1 - \Pi_2)(A_1 - A_2)(A_1 - S') \barwedge \\ \text{Strahlbüschel } B_1, (B_1 - A_1)(B_1 - \Pi_1)\, \beta_1 (B_1 - S)(B_1 - B_2) \\ \qquad (B_1 - \Pi_2)(B_1 - A_2)(B_1 - S); \end{array}\right\} \text{III. a')}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \text{Strahlbüschel } A_2, \alpha_2 (A_2 - S')(A_2 - A_1)(A_2 - \Pi_1)(A_2 - B_1) \\ \qquad (A_2 - S)(A_2 - B_2)(A_2 - \Pi_2) \barwedge \\ \text{Strahlbüschel } B_1, (B_1 - A_2)(B_1 - S') | (B_1 - A_1)(B_1 - \Pi_1)\, \beta_1 \\ \qquad (B_1 - S)(B_1 - B_2)(B_1 - \Pi_2). \end{array}\right\} \text{III. b')}$$

Suchen wir nun, wenn vier Projectionsstrahlen gegeben sind, a_1, a_2; b_1, b_2, einen fünften, c_1, um zu sehen, ob er auch mit seinem Durchschnitte auf a_1, b_1, a_2 u. s. w. einen Punkt der in III. a) und III. b) aufgestellten conformen Punktreihen bildet. Um zunächst einen fünften Strahl c_1 zu finden, nehmen wir auf s' einen Punkt C'_1 willkürlich an, Fig. 109a., und suchen den ihm entsprechenden auf s. Nach der Tabelle t_2 erhält man, wenn man vom Punkt $(a_2 \cdot b_1)$ als Projectionscentrum aus die Punktreihe $s', B'_1 A'_1 P' A'_2 B'_2 T'$ auf die Gerade n_1 oder $(B_1 - A'_1)$ projicirt, auf n_1 eine Punktreihe, die zugleich mit $s, B_1 A_1 P A_2 B_2 T$ für den Punkt $(a_1 \cdot a_2)$ als Projectionscentrum perspectivisch liegt. Ziehen wir also von $(a_2 \cdot b_1)$ aus eine Gerade x_1 durch C'_1, welche die n_1 in $\mathfrak{S}_1$ schneidet, so daß also $(n_1 \cdot x_1)$ oder $\mathfrak{S}_1$ die Projection von C'_1 auf n_1 ist, so haben wir, um C_1 auf s zu finden, nur den Punkt $\mathfrak{S}_1$ von $(a_1 \cdot a_2)$ aus auf s zu projiciren, mittelst einer von $(a_1 \cdot a_2)$ nach $\mathfrak{S}_1$ gezogenen Geraden y. Dann ist $(s \cdot y)$ der gesuchte Punkt C_1, und es ist $(C_1 - C'_1)$ ein fünfter Projectionsstrahl c_1. Da nun $(C_1 - C'_1)$, weil C'_1 zwischen A'_1 und B'_1 und also C_1 zwischen A_1 und B_1 liegt, die τ jedenfalls in dem zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(b_1 \cdot b_2)$ liegenden den unendlich entfernten Punkt enthaltenden Stück der τ trifft (denn der eine Fall, in dem es am möglichsten wäre, daß c_1 die τ auf P'T schnitte, wäre offenbar, wenn C'_1 nahe an A'_1 und C_1 nahe an A_1 läge; dann aber müßte immer noch c_1 die τ über $(a_1 \cdot a_2)$ hinaus schneiden; der andere Fall, der es am möglichsten erscheinen ließe, daß c_1 die τ auf der Strecke P'T schnitte, wäre der, wenn C'_1 nahe an B'_1 und C_1 nahe an B_1 sich befände; dann aber müßte immer noch c_1 die τ über $(b_1 \cdot b_2)$ hinaus treffen), da also c_1 die τ auf alle Fälle auf der Strecke $P'\infty T$ schneidet, so convergirt nach Lehrsatz 3. noch ein Strahl c_2 mit c_1 auf τ. Denkt man sich nun nicht a_1, a_2; b_1, b_2, sondern a_1, a_2; c_1, c_2 gegeben, so tritt an die Stelle von $[(s' \cdot a_1) - (b_1 \cdot s)]$ oder n_1

jetzt die Gerade $[(s' \cdot a_1) - (c_1 \cdot s)]$; sie heiße n'_1; denkt man sich nicht $a_1, a_2; b_1, b_2$, sondern $c_1, c_2; b_1, b_2$ gegeben, so tritt an die Stelle von $[(s' \cdot b_1) - (a_1 \cdot s)]$ oder $\mathfrak{n}_4$ jetzt $[(s' \cdot b_1) - (c_1 \cdot s)]$; sie heiße $\mathfrak{n}''_4$. Projicirt man nun die Punktreihe s von $(a_1 \cdot a_2)$ aus auf n'_1, so erhält man

$$\text{Punktreihe } n'_1, A'_1 C_1 \mathfrak{B}'_1 \mathfrak{T}'_1 \;\overline{\wedge}\; \text{Punktreihe } s, A_1 C_1 B_1 T.$$

Projicirt man die Punktreihe s von demselben Punkt $(a_1 \cdot a_2)$ aus auf n_1, so erhält man, weil nach Lehrsatz 12. n_1 die τ in $(\tau \cdot \gamma')$ oder $\mathfrak{T}_1$ schneidet:

$$\text{Punktreihe } n_1, A'_1 \mathfrak{C}_1 B'_1 \mathfrak{T}_1 \;\overline{\wedge}\; \text{Punktreihe } s, A_1 C_1 B_1 T.$$

Projicirt man ferner die Punktreihe s' vom Punkt $(b_2 \cdot c_1)$ auf $\mathfrak{n}''_4$, so erhält man:

$$\text{Punktreihe } \mathfrak{n}''_4, \mathfrak{A}''_4 C_1 B'_1 \mathfrak{T}''_4 \;\overline{\wedge}\; \text{Punktreihe } s', A'_1 C'_1 B'_1 T'.$$

Da nun Punktreihe $s, A_1 C_1 B_1 T \;\overline{\wedge}\;$ Punktreihe $s', A'_1 C'_1 B'_1 T'$ ist, ist also auch

$$\text{Punktreihe } n'_1, A'_1 C_1 \mathfrak{B}'_1 \mathfrak{T}'_1 \;\overline{\wedge}\; \text{Punktreihe } \mathfrak{n}''_4, \mathfrak{A}''_4 C_1 B'_1 \mathfrak{T}''_4.$$

Da diese beiden Reihen mit einem Paar entsprechender Punkte in C_1 zusammenfallen, so liegen sie perspectivisch. Nach der im Lehrsatz 10. enthaltenen Erklärung von γ' und nach Lehrsatz 12. muß nun $\mathfrak{n}''_4$ durch den Durchschnittspunkt von $[(c_1 \cdot b_2) - (c_2 \cdot b_1)]$ mit τ gehen. Nach Tabelle t_2 ferner liegt die Punktreihe $\mathfrak{n}''_4, \mathfrak{A}''_4 C_1 B'_1 \mathfrak{T}''_4$ auch mit $s, A_1 C_1 B_1 T$ für das Projectionscentrum $(c_1 \cdot c_2)$ perspectivisch. Es liegt also, da $(c_1 \cdot c_2)$ sich auf τ befindet, $\mathfrak{T}''_4$ im Durchschnittspunkt $(\mathfrak{n}''_4 \cdot \tau)$ von $\mathfrak{n}''_4$ mit τ, mithin jedenfalls auf τ. Demnach ist τ ein Projectionsstrahl der beiden perspectivisch liegenden Punktreihen $n'_1, A'_1 C_1 \mathfrak{B}'_1 \mathfrak{T}'_1$ und $\mathfrak{n}''_4, \mathfrak{A}''_4 C_1 B'_1 \mathfrak{T}''_4$. Nennen wir den Projectionsstrahl, der die Punkte A'_1 und $\mathfrak{A}''_4$ enthält, kurz α_1, den Projectionsstrahl, der durch $\mathfrak{B}'_1$ und B'_1 geht, kurz β_1, so müssen sich demnach α_1 und β_1 auf τ schneiden. Ferner aber liegt die Punktreihe $n'_1, A'_1 C_1 \mathfrak{B}'_1 \mathfrak{T}'_1$ nach Tabelle t_2 mit der Punktreihe $s', A'_1 C'_1 B'_1 T'$ für den Punkt $(a_2 \cdot c_2)$ perspectivisch (indem man in der Tabelle t_2 nur b_1 mit c_1 zu vertauschen hat). Es schneiden sich daher die Projectionsstrahlen $(C_1 - C'_1)$, $(\mathfrak{B}'_1 - B'_1)$, $(\mathfrak{T}'_1 - T')$ in dem Punkte $(a_2 \cdot c_1)$. Der Strahl $(\mathfrak{B}'_1 - B'_1)$ ist aber β_1; es geht also β_1 durch den Punkt $(a_2 \cdot c_1)$, oder der Punkt $(a_2 \cdot c_1)$ liegt auf β_1. Es liegen also in den Dreiseiten

$$c_1 s' \alpha_1 \text{ und } a_2 b_1 \tau$$

die Durchschnittspunkte $(c_1 \cdot a_2)$, $(s' \cdot b_1)$, $(\alpha_1 \cdot \tau)$ auf einer und derselben Geraden β_1. Folglich schneiden sich nach § 3. Lehrsatz 13. die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken, nämlich

$$[(c_1 \cdot s') - (a_2 \cdot b_1)]; \quad [(s' \cdot \alpha_1) - (b_1 \cdot \tau)]; \quad [(\alpha_1 \cdot c_1) - (\tau \cdot a_2)]$$

oder x_1; x_2; x_3;

in einem und demselben Punkte $[x_1 \cdot x_2 \cdot x_3]$ oder X.

Es ist leicht zu sehen, daß man einen ähnlichen Satz erhält, wenn man den Punkt C_1 auf andere Art bestimmt. Man nehme nämlich wieder, Fig. 109a'., einen beliebigen Punkt C'_1 auf s', z. B. zwischen B'_1 und A'_1 an. Nach Tabelle t_2 erhält man auch, wenn man vom Punkte $(a_1 \cdot b_1)$ aus die Punktreihe s' auf die Gerade n_3 oder $(B_1 - A'_2)$ projicirt, eine Punktreihe, die zugleich mit der Reihe s für das Centrum $(a_1 \cdot a_2)$ perspectivisch liegt. Ziehen wir also von $(a_1 \cdot b_1)$ einen Strahl x_1 durch C'_1, der die n_3 in $\mathfrak{S}_3$ trifft, so haben wir, um C_1 zu finden, nur den Punkt $\mathfrak{S}_3$ von $(a_1 \cdot a_2)$ aus mittelst des Strahls y auf s zu projiciren. Der so erhaltene Punkt $(s \cdot y)$ ist der dem C'_1 entsprechende Punkt C_1, und $(C_1 - C'_1)$ der Projectionsstrahl c_1. Auch hier können wir uns wieder den mit c_1 auf τ convergirenden Projectionsstrahl c_2 gezogen denken. Stellen wir uns vor, es seien statt $a_1, a_2; b_1, b_2$ die Strahlenpaare $a_1, a_2; c_1, c_2$ gegeben gewesen, so tritt an die Stelle von $[(s' \cdot a_2) - (b_1 \cdot s)]$ oder n_3 die Gerade $[(s' \cdot a_2) - (c_1 \cdot s)]$; sie heiße n'_3; stellen wir uns $c_1, c_2; b_1, b_2$ als gegeben vor, so tritt an die Stelle von $[(s' \cdot b_1) - (a_1 \cdot s)]$ oder $\mathfrak{n}_4$ die Gerade $[(s' \cdot b_1) - (c_1 \cdot s)]$; sie heiße $\mathfrak{n}''_4$. Projicirt man nun die Punktreihe s' von $(a_1 \cdot a_2)$ aus auf n'_3, so erhält man

Punktreihe $n'_3, A'_2 C_1 \mathfrak{B}'_3 \mathfrak{T}'_3 \;\overline{\wedge}\;$ Punktreihe $s, A_2 C_1 B_1 T$.

Projicirt man die Punktreihe s von demselben Punkte $(a_1 \cdot a_2)$ aus auf n_3, so erhält man, wenn man den Punkt $(\tau \cdot \gamma)$, in dem nach Lehrsatz 12. die n_3 die τ schneidet, durch $\mathfrak{T}_3$ bezeichnet:

Punktreihe $n_3, A'_2 \mathfrak{S}_3 B_1 \mathfrak{T}_3 \;\overline{\wedge}\;$ Punktreihe $s, A_2 C_1 B_1 T$.

Projicirt man ferner die Punktreihe s' von $(b_2 \cdot c_1)$ aus auf $\mathfrak{n}''_4$, so ergiebt sich

Punktreihe $\mathfrak{n}''_4, \mathfrak{A}''_4 C_1 B'_1 \mathfrak{T}''_4 \;\overline{\wedge}\;$ Punktreihe $s', A'_2 C'_1 B'_1 T'$.

Da nun Punktreihe $s, A_2 C_1 B_1 T \;\overline{\wedge}\;$ Punktreihe $s', A'_2 C'_1 B'_1 T'$ ist, so ist auch

Punktreihe $n'_3, A'_2 C_1 \mathfrak{B}'_3 \mathfrak{T}'_3 \;\overline{\wedge}\;$ Punktreihe $\mathfrak{n}''_4 \mathfrak{A}''_4 C_1 B'_1 \mathfrak{T}''_4$;

und beide liegen, da in C_1 ein Paar entsprechende Punkte zusammenfallen, perspectivisch. Nach Lehrsatz 12. muß nun $\mathfrak{n}''_4$ durch den Durchschnittspunkt von $[(c_1 \cdot b_2) - (c_2 \cdot b_1)]$ mit τ gehen. Ferner liegt nach Tabelle t_2 Punktreihe $\mathfrak{n}''_4, \mathfrak{A}''_4 C_1 B'_1 \mathfrak{T}''_4$ mit Punktreihe $s, A_2 C_1 B_1 T$ für Centrum $(c_1 \cdot c_2)$ perspectivisch. Es muß also $\mathfrak{T}''_4$ auf τ sich befinden. Folglich ist τ ein Projectionsstrahl der beiden perspectivisch liegenden Punktreihen $n'_3, A'_2 C_1 \mathfrak{B}'_3 \mathfrak{T}'_3$ und $\mathfrak{n}''_4, \mathfrak{A}''_4 C_1 B'_1 \mathfrak{T}''_4$. Es heiße nun wieder $(A'_2 - \mathfrak{A}''_4)$ und $(\mathfrak{B}'_3 - B'_1)$ bezüglich α_1, β_1; so schneiden sich also α_1 und β_1 auf τ. Nach Tabelle t_2 liegt ferner Punktreihe $n'_3, A'_2 C_1 \mathfrak{B}'_3 \mathfrak{T}'_3$ mit Punktreihe $s', A'_2 C'_1 B'_1 T'$ für das Centrum $(a_1 \cdot c_1)$ perspectivisch. Es schneiden sich daher die Projectionsstrahlen $(C_1 - C'_1)$, $(\mathfrak{B}'_3 - B'_1)$, $(\mathfrak{T}'_3 - T')$ in $(a_1 \cdot c_1)$; es geht also $(\mathfrak{B}'_3 - B'_1)$ oder β_1 durch $(a_1 \cdot c_1)$, oder $(a_1 \cdot c_1)$ liegt auf β_1. Es liegen also in den Dreiseiten

$$c_1 s' \alpha_1 \text{ und } a_1 b_1 \tau$$

die Durchschnittspunkte $(c_1 \cdot a_1)$, $(s' \cdot b_1)$, $(\alpha_1 \cdot \tau)$ auf einer und derselben Geraden $\mathfrak{b}_1$. Folglich schneiden sich nach § 3. Lehrsatz 13. die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken, nämlich:

$$[(c_1 \cdot s') - (a_1 \cdot b_1)]; \quad [(s' \cdot \alpha_1) - (b_1 \cdot \tau)]; \quad [(\alpha_1 \cdot c_1) - (\tau \cdot a_1)]$$

oder $\quad x_1; \quad\quad x_2; \quad\quad x_3;$

in einem und demselben Punkte $[x_1 \cdot x_2 \cdot x_3]$ oder X.

Ganz Analoges läßt sich von den die Curve k_1 erzeugenden Strahlbüscheln zeigen, indem wir noch einen Projectionspunkt suchen. Nehmen wir, Fig. 109. b. einen Strahl c'_1 an, und suchen den auf ihm liegenden Curvenpunkt C_1. Zu dem Zwecke haben wir nur den dem Strahl c'_1 entsprechenden Strahl c_1 zu suchen. Nach Tabelle T_2 erhält man, wenn man an N_1 als Scheitel einen Strahlbüschel construirt, der mit dem Strahlbüschel S' für $(A_2 - B_1)$ als Projectionsaxe perspectivisch liegt, einen Strahlbüschel N_1, der zugleich mit dem Strahlbüschel S für $(A_1 - A_2)$ als Axe perspectivisch liegt. Suchen wir also den Durchschnittspunkt von c'_1 mit $(A_2 - B_1)$, also X_1, und verbinden ihn mit N_1 durch die Gerade c_1, so haben wir, um c_1 an S zu finden, nur den Durchschnittspunkt Y von c_1 mit $(A_1 - A_2)$ zu suchen, und $(S - Y)$ zu ziehen, so ist dieß der Strahl c_1, und der Durchschnittspunkt $(c'_1 \cdot c_1)$ ist der gesuchte Curvenpunkt C_1. Da c'_1 zwischen a'_1 und b'_1 liegt, muß auch c_1 zwischen a_1 und b_1, also $(C_1 - T)$ jedenfalls zwischen $(A_1 - A_2)$ und $(B_1 - B_2)$ liegen. Es muß also auf $(C_1 - T)$ nach Lehrsatz 3. noch ein Curvenpunkt C_2 liegen. Denkt man sich als die ursprünglichen Curvenpunkte nicht A_1, A_2; B_1, B_2, sondern A_1, A_2; C_1, C_2; so tritt an die Stelle von $[(S' - A_1) \cdot (B_1 - S)]$ oder N_1 jetzt der Punkt $[(S' - A_1) \cdot (C_1 - S)]$; er heiße N'_1; denkt man sich C_1, C_2; B_1, B_2 gegeben, so tritt an die Stelle von $[(S' - B_1) \cdot (A_1 - S)]$ oder $\mathfrak{N}_4$ jetzt $[(S' - B_1) \cdot (C_1 - S)]$; er heiße $\mathfrak{N}''_4$. Sucht man den Strahlbüschel mit dem Scheitel N'_1, der mit S für die Axe $(A_1 - A_2)$ perspectivisch liegt, so erhält man:

$$\text{Strahlbüschel } N'_1, a'_1 c_1 \mathfrak{b}'_1 \mathfrak{t}'_1 \barwedge \text{ Strahlbüschel } S, a_1 c_1 b_1 t.$$

Sucht man den Strahlbüschel mit dem Scheitel N_1, der mit S für dieselbe Gerade $(A_1 - A_2)$ als Axe perspectivisch liegt, so ergiebt sich:

$$\text{Strahlbüschel } N_1, a'_1 c_1 b_1 \mathfrak{t}_1 \barwedge \text{ Strahlbüschel } S, a_1 c_1 b_1 t.$$

Sucht man ferner den Strahlbüschel $\mathfrak{N}''_4$, der mit S' für $(B_2 - C_1)$ perspectivisch liegt, so findet man:

$$\text{Strahlbüschel } \mathfrak{N}''_4, \alpha''_4 c_1 b'_1 \mathfrak{t}''_4 \barwedge \text{ Strahlbüschel } S', a'_1 c'_1 b'_1 t'.$$

Es ist also wegen der Conformität der Strahlbüschel S und S':

$$\text{Strahlbüschel } N'_1, a'_1 c_1 \mathfrak{b}'_1 \mathfrak{t}'_1 \barwedge \text{ Strahlbüschel } \mathfrak{N}''_4, \alpha''_4 c_1 b'_1 \mathfrak{t}''_4.$$

Da beide mit den entsprechenden Strahlen c_1 zusammenfallen, so liegen sie perspectivisch. Aus Lehrsatz 12. und der Erklärung von Γ' in Lehrsatz 10. folgt nun, daß $\mathfrak{N}''_4$ und $[(C_1 - B_2) \cdot (C_2 - B_1)]$ auf

einer durch T gehenden Geraden liegen. Nach Tabelle T_2 ferner liegt der Strahlbüschel $\mathfrak{N}''_4, \alpha''_4 c_1 b'_1 \mathfrak{t}''_4$ auch mit dem Strahlbüschel $S, a_1 c_1 b_1 t$ für $(C_1 - C_2)$ als Axe perspectivisch; es muß also $\mathfrak{t}''_4$ durch T gehen; folglich ist T ein Projectionspunkt der perspectivisch liegenden Strahlbüschel $N'_1, a'_1 c_1 \mathfrak{b}'_1 \mathfrak{t}'_1$ und $\mathfrak{N}''_4, \alpha''_4 c_1 b'_1 \mathfrak{t}''_4$. Bezeichnen wir nun den Projectionspunkt $(a'_1 \cdot \alpha''_4)$ durch $\mathfrak{A}_1$, den Projectionspunkt $(\mathfrak{b}'_1 \cdot b'_1)$ durch $\mathfrak{B}_1$, so muß also $(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1)$ durch T gehen. Ferner liegt der Strahlbüschel $N'_1, a'_1 c_1 \mathfrak{b}'_1 \mathfrak{t}'_1$ mit $S', a'_1 c'_1 b'_1 t'$ nach Tabelle T_2 für Axe $(A_2 - C_1)$ perspectivisch. Es liegen also $(c'_1 \cdot c_1)$, $(b'_1 \cdot \mathfrak{b}'_1)$, $(t' \cdot \mathfrak{t}'_1)$, oder $(c'_1 \cdot c_1)$, $\mathfrak{B}_1$, $(t' \cdot \mathfrak{t}'_1)$ auf der Geraden $(A_2 - C_1)$, daher liegt $\mathfrak{B}_1$ auf $(A_2 - C_1)$. Es gehen also in den Dreiecken

$$C_1 S' \mathfrak{A}_1 \text{ und } A_2 B_1 T$$

die Verbindungsgeraden

$$(C_1 - A_2),\ (S' - B_1),\ (\mathfrak{A}_1 - T)$$

durch denselben Punkt $\mathfrak{B}_1$. Daher liegen nach § 3. Lehrsatz 13. die Durchschnittspunkte entsprechender Seiten

$$[(C_1 - S') \cdot (A_2 - B_1)];\quad [(S' - \mathfrak{A}_1) \cdot (B_1 - T)];\quad [(\mathfrak{A}_1 - C_1) \cdot (T - A_2)]$$

oder X_1; X_2; X_3;

auf einer und derselben Geraden $(X_1 - X_2 - X_3)$ oder x.

Aehnliches findet statt, wenn man den Strahl c_1 auf andere Weise bestimmt. Man nehme, Fig. 109. b'., einen Strahl c'_1 an. Nach Tabelle T_2 erhält man auch, wenn man vom Punkt N_3 aus Strahlen nach den Durchschnittspunkten des Büschels S' mit der Geraden $(A_1 - B_1)$ zieht, einen Strahlbüschel, der zugleich mit dem Büschel S für die Axe $(A_1 - A_2)$ perspectivisch liegt. Sucht man also den Durchschnittspunkt X_1 des Strahls c'_1 mit $(A_1 - B_1)$, zieht die Gerade $(N_3 - X_1)$ oder $\mathfrak{c}_3$, welche die $(A_1 - A_2)$ in Y trifft, und dann $(S - Y)$, so ist dieß der gesuchte Strahl c_1 und $(c'_1 \cdot c_1)$ ist C_1. Auch hier muß auf $(C_1 - T)$ noch ein Punkt C_2 liegen. Stellt man sich vor, daß $A_1, A_2; C_1, C_2$ statt $A_1, A_2; B_1, B_2$ gegeben gewesen sein, so tritt an die Stelle von $[(S' - A_2) \cdot (B_1 - S)]$ oder N_3 der Punkt $[(S' - A_2) \cdot (C_1 - S)$, welcher N'_3 heiße; seien $C_1, C_2; B_1, B_2$ ursprünglich gegeben, so tritt an die Stelle von $[(S' - B_1) \cdot (A_1 - S)]$ oder $\mathfrak{N}_4$ der Punkt $[(S' - B_1) \cdot (C_1 - S)]$; er heiße $\mathfrak{N}''_4$. Man ziehe von N'_3 aus Strahlen nach den Durchschnittspunkten der Strahlen des Büschels S mit $(A_1 - A_2)$, so erhält man

$$\text{Strahlbüschel } N'_3, a'_2 c_1 \mathfrak{b}'_3 \mathfrak{t}'_2 \ \overline{\wedge}\ \text{Strahlbüschel } S, a_2 c_1 b_1 t.$$

Zieht man von denselben Durchschnittspunkten auf $(A_1 - A_2)$ aus Strahlen nach N_3, so findet sich

$$\text{Strahlbüschel } N_3, a'_2 \mathfrak{c}_3 b_1 \mathfrak{t}_3 \ \overline{\wedge}\ \text{Strahlbüschel } S, a_2 c_1 b_1 t.$$

Zieht man ferner von den Durchschnittspunkten der Strahlen des Strahlbüschels S' mit $(B_2 - C'_1)$ Gerade nach $\mathfrak{N}''_4$, so entsteht ein

Strahlbüschel $\mathfrak{N}''_4, \alpha''_4 c_1 b'_1 t''_4 \;\overline{\wedge}\;$ Strahlbüschel $S', a'_2 c'_1 b'_1 t'$.
Es ist also

Strahlbüschel $N'_3, a'_2 c_1 \mathfrak{b}'_3 t'_3 \;\overline{\wedge}\;$ Strahlbüschel $\mathfrak{N}''_4, \alpha''_4 c_1 b'_1 t''_4$;
und beide liegen, weil sie den Strahl c_1 gemein haben, perspectivisch. Nach Lehrsatz 12. liegen nun $\mathfrak{N}''_4$ und $[(C_1 - B_2) \cdot (C_2 - B_1)]$ auf einer durch T gehenden Geraden; ferner muß, da nach T_2 Strahlbüschel $\mathfrak{N}''_4, \alpha''_4 c_1 b'_1 t''_4$ und $S, a_2 c_1 b_1 t$ für Axe $(C_1 - C_2)$ perspectivisch liegen, t''_4 durch T gehen. Es ist daher T ein Projectionspunkt der beiden perspectivisch liegenden Strahlbüschel N'_3 und $\mathfrak{N}''_4$. Heißen wieder $(a'_2 \cdot \alpha''_4)$ und $(\mathfrak{b}'_3 \cdot b'_1)$ bezüglich $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, so geht also $(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1)$ durch T. Nach Tabelle T_2 liegt ferner Strahlbüschel $N'_3, a'_2 c_1 \mathfrak{b}'_3 t'_3$ mit $S', a'_2 c'_1 b'_1 t'$ für Axe $(A_1 - C_1)$ perspectivisch. Es liegen also die Projectionspunkte $(c_1 \cdot c'_1)$, $(\mathfrak{b}'_3 \cdot b'_1)$, $(t'_3 \cdot t')$, oder $(c_1 \cdot c'_1)$, $\mathfrak{B}_1$, $(t'_3 \cdot t')$ auf derselben Geraden $(A_1 - C_1)$, oder $(A_1 - C_1)$ geht durch $\mathfrak{B}_1$. Es gehen also in den Dreiecken

$$C_1 S' \mathfrak{A}_1 \text{ und } A_1 B_1 T$$

die Verbindungsgeraden

$$(C_1 - A_1);\; (S' - B_1);\; (\mathfrak{A}_1 - T)$$

durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{B}_1$. Folglich liegen nach § 3. Lehrsatz 13. die Durchschnittspunkte entsprechender Seiten, nämlich
$[(C_1 - S') \cdot (A_1 - B_1)]$; $[(S' - \mathfrak{A}_1) \cdot (B_1 - T)]$; $[(\mathfrak{A}_1 - C_1) \cdot (T - A_1)]$
oder: X_1; X_2; X_3;
auf einer und derselben Geraden $(X_1 - X_2 - X_3)$ oder x.

Es gingen also in Fig. 109. a. die Geraden $[(c_1 \cdot s') - (a_2 \cdot b_1)]$; $[(s' \cdot \alpha_1) - (b_1 \cdot \tau)]$; $[(\alpha_1 \cdot c_1) - (\tau \cdot a_2)]$ durch denselben Punkt. Da nun $(s' \cdot \alpha_1)$ identisch ist mit $(s' \cdot a_1)$, $(b_1 \cdot \tau)$ identisch mit $(b_1 \cdot b_2)$, $(\alpha_1 \cdot c_1)$ mit $(b_2 \cdot c_1)$, $(\tau \cdot a_2)$ mit $(a_1 \cdot a_2)$, so kann man also auch sagen, die Geraden $[(c_1 \cdot s') - (a_2 \cdot b_1)]$; $[(s' \cdot a_1) - (b_1 \cdot b_2)]$; $[(b_2 \cdot c_1) - (a_1 \cdot a_2)]$ gehen durch denselben Punkt X (s. Fig. 110 a.). Ebenso gingen in Fig. 109. a'. die Geraden $[(c_1 \cdot s') - (a_1 \cdot b_1)]$; $[(s' \cdot \alpha_1) - (b_1 \cdot \tau)]$; $[(\alpha_1 \cdot c_1) - (\tau \cdot a_1)]$ durch denselben Punkt, oder, da $(s' \cdot \alpha_1)$ mit $(s' \cdot a_2)$, $(b_1 \cdot \tau)$ mit $(b_1 \cdot b_2)$, $(\alpha_1 \cdot c_1)$ mit $(b_2 \cdot c_1)$, $(\tau \cdot a_1)$ mit $(a_2 \cdot a_1)$ identisch ist, es gehen die Geraden $[(c_1 \cdot s') - (a_1 \cdot b_1)]$; $[(s' \cdot a_2) - (b_1 \cdot b_2)]$; $[(b_2 \cdot c_1) - (a_2 \cdot a_1)]$ durch denselben Punkt (s. Fig. 109. a'). Es ist aber in Fig. 109. a. und Fig. 110. a. $[(a_1 \cdot s') - (b_2 \cdot b_1)]$ die Verbindungsgerade der ersten und vierten, $[(s' \cdot c_1) - (b_1 \cdot a_2)]$ die Verbindungsgerade oder Diagonale der zweiten und fünften, $[(c_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot a_1)]$ die Verbindungsgerade der dritten und sechsten Ecke im einfachen Sechsseit $a_1 s' c_1 b_2 b_1 a_2$; ebenso ist in Fig. 109. a'. und Fig. 110. a'. $[(a_2 \cdot s') - (b_2 \cdot b_1)]$ die Verbindungsgerade der ersten und vierten, $[(s' \cdot c_1) - (b_1 \cdot a_1)]$ die Verbindungsgerade der zweiten und fünften, $[(c_1 \cdot b_2) - (a_1 \cdot a_2)]$ die Verbindungsgerade der dritten und sechsten Ecke im einfachen Sechsseit $a_2 s' c_1 b\ b_1 a_1$. Ferner lagen in Fig. 109. b. die Punkte $[(C_1 - S') \cdot (A_2 - B_1)]$, $[(S' - \mathfrak{A}_1) \cdot (B_1 - T)]$,

$[(\mathfrak{A}_1 - C_1) \cdot (T - A_2)]$ auf derselben Geraden, und es ist hier $(S' - \mathfrak{A}_1)$ mit $(S' - A_1)$, $(B_1 - T)$ mit $(B_1 - B_2)$, $(\mathfrak{A}_1 - C_1)$ mit $(B_2 - C_1)$, $(T - A_2)$ mit $(A_1 - A_2)$ identisch; man kann also sagen: die Punkte $[(C_1 - S') \cdot (A_2 - B_1)]$, $[(S' - A_1) \cdot (B_1 - B_2)]$, $[(B_2 - C_1) - (A_1 - A_2)]$ liegen auf derselben Geraden x (s. Fig. 110 b.). Ebenso lagen in Fig. 109 b′ die Punkte $[(C_1 - S') \cdot (A_1 - B_1)]$, $[(S' - \mathfrak{A}_1) \cdot (B_1 - T)]$, $[(\mathfrak{A}_1 - C_1) \cdot (T - A_1)]$ auf derselben Geraden; hier ist $[(S' - \mathfrak{A}_1)$ mit $(S' - A_2)$, $(B_1 - T)$ mit $(B_1 - B_2)$, $(\mathfrak{A}_1 - C_1)$ mit $(B_2 - C_1)$, $(T - A_1)$ mit $(A_2 - A_1)$ identisch. Wir sagen also: die Punkte $[(C_1 - S') \cdot (A_1 - B_1)]$, $[(S' - A_2) \cdot (B_1 - B_2)]$, $[(B_2 - C_1) \cdot (A_2 - A_1)]$ liegen auf derselben Geraden. Es ist aber in Fig. 109. b. und Fig. 110. b. $[(A_1 - S') \cdot (B_2 - B_1)]$ der Durchschnittspunkt der ersten und vierten, $[(S' - C_1) \cdot (B_1 - A_2)]$ der Durchschnittspunkt der zweiten und fünften, $[(C_1 - B_2) \cdot (A_2 - A_1)]$ der Durchschnittspunkt der dritten und sechsten Seite im einfachen Sechseck $A_1S'C_1B_2B_1A_2$. Ebenso ist in Fig. 109. b′. und Fig. 110. b′. $[(A_2 - S') \cdot (B_2 - B_1)]$ der Durchschnittspunkt der ersten und vierten, $[(S' - C_1) \cdot (B_1 - A_1)]$ der Durchschnittspunkt der zweiten und fünften, $[(C_1 - B_2) \cdot (A_1 - A_2)]$ der Durchschnittspunkt der dritten und sechsten Seite im einfachen Sechseck $A_2S'C_1B_2B_1A_1$. Wir sehen daher: Es ist nach § 5. Lehrsatz 7.:

Im einfachen Sechsseit $a_1s'c_1b_2b_1a_2$ oder $a_1a_2b_1b_2c_1s'$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punktreihe } a_1,(a_1 \cdot s')\,(a_1 \cdot a_2)\,(a_1 \cdot b_2)\,(a_1 \cdot c_1) \;\overline{\wedge}\\ \text{Punktreihe } b_1,(b_1 \cdot s')\,(b_1 \cdot a_2)\,(b_1 \cdot b_2)\,(b_1 \cdot c_1).\end{array}\right\}\text{IV. a).}$$

Im einfachen Sechsseit $a_2s'c_1b_2b_1a_1$ oder $a_2a_1b_1b_2c_1s'$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punktreihe } a_2,(a_2 \cdot s')\,(a_2 \cdot a_1)\,(a_2 \cdot b_2)\,(a_2 \cdot c_1) \;\overline{\wedge}\\ \text{Punktreihe } b_1,(b_1 \cdot s')\,(b_1 \cdot a_1)\,(b_1 \cdot b_2)\,(b_1 \cdot c_1).\end{array}\right\}\text{IV. b).}$$

Im einfachen Sechseck $A_1S'C_1B_2B_1A_2$ oder $A_1A_2B_1B_2C_1S'$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Strahlbüschel } A_1,(A_1 - S')\,(A_1 - A_2)\,(A_1 - B_2)\,(A_1 - C_1) \;\overline{\wedge}\\ \text{Strahlbüschel } B_1,(B_1 - S')\,(B_1 - A_2)\,(B_1 - B_2)\,(B_1 - C_1).\end{array}\right\}\text{IV. a')}$$

Im einfachen Sechseck $A_2S'C_1B_2B_1A_1$ oder $A_2A_1B_1B_2C_1S'$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Strahlbüschel } A_2,(A_2 - S')\,(A_2 - A_1)\,(A_2 - B_2)\,(A_2 - C_1) \;\overline{\wedge}\\ \text{Strahlbüschel } B_1,(B_1 - S')\,(B_1 - A_1)\,(B_1 - B_2)\,(B_1 - C_1).\end{array}\right\}\text{IV. b')}$$

Wir hatten uns nun beim Beweise dieser Sätze auf den Fall beschränkt, daß C_1 zwischen A_1 und B_1, C'_1 zwischen A'_1 und B'_1 und $(c_1 \cdot c_2)$ auf der den unendlich entfernten Punkt von τ enthaltenden Strecke zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(b_1 \cdot b_2)$ lag. Es läßt sich aber ebenso der Beweis auch führen, mag $(c_1 \cdot c_2)$ zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(\tau \cdot s')$ oder zwischen $(b_1 \cdot b_2)$ und $(\tau \cdot s)$ liegen, und ebenso läßt sich ein Gleiches zeigen für den Strahl c_2, wenn man also C'_2 zwischen $(s \cdot s')$ und $(s' \cdot \tau)$ gewählt hat. Je nachdem man nun beweisen will, daß für c_1 eine ähnliche Gleichung wie IV. a) gilt, hat man, je nachdem c_1 die τ zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(b_1 \cdot b_2)$, oder

zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(s' \cdot \tau)$ oder zwischen $(b_1 \cdot b_2)$ und $(s \cdot \tau)$ liegt, die Punktreihen s und s' auf verschiedene Gerade zu projiciren, ebenso, wenn man zeigen will, daß für c_2 ein Satz analog dem in IV. a) aufgestellten gilt. Ferner hat man verschiedene Gerade anzuwenden, wenn man zeigen will, daß ein dem Satz IV. b) analoger gilt, mag $(c_1 \cdot c_2)$ zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(b_1 \cdot b_2)$, oder zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(s' \cdot \tau)$, oder zwischen $(b_1 \cdot b_2)$ und $(s \cdot \tau)$ liegen; und daß ein Gleiches für c_2 gilt. Daß c_1 oder c_2 die τ auf der endlichen Strecke P'T träfe, ist, wie sogleich aus der Aufeinanderfolge der Punkte hervorgeht, unmöglich. Es sollen nun die verschiedenen, in Anwendung zu bringenden Geraden, wie n_1, w''_4, n'_1; n_3, w''_4, n'_3, etc. für die verschiedenen 12 Fälle aufgezählt werden. Zu dem Zwecke wenden wir die schon im Vorigen gebrauchte Bezeichnung an. Wir bezeichnen nämlich die in Anwendung kommenden Geraden der Tabelle t_2, wenn man dort c_1, c_2 statt b_1, b_2 setzt, durch denselben Buchstaben, wie in t_2, nur mit einem Strich versehen. In Tabelle t_2 war z. B. $[(s' \cdot b_2) - (a_2 \cdot s)]$ mit w_6 bezeichnet; demnach heißt $[(s' \cdot c_2) - (a_2 \cdot s)]$ jetzt w'_6. Wenn man in Tabelle t_2 c_1, c_2 statt a_1, a_2 gesetzt zu denken hat, so soll die Gerade durch denselben Buchstaben, wie in t_2, aber mit zwei Strichen bezeichnet werden; demnach heißt $[(s' \cdot b_2) - (c_2 \cdot s)]$ jetzt w''_6 u. s. w. Demnach kann man sagen:

t_3.

I. 1) Um den Satz IV. a) für c_1 zu beweisen, projicire man stets in α), β) und γ):

C'_1 von $(a_2 \cdot b_1)$ auf n_1 nach $\mathfrak{S}_1$, und $\mathfrak{S}_1$ von $(a_1 \cdot a_2)$ auf s nach C_1.

α) Liegt $(c_1 \cdot c_2)$ zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(b_1 \cdot b_2)$, so projicire man weiter:

s von $(a_1 \cdot a_2)$ und s' von $(a_1 \cdot c_1)$ auf n'_1; s' von $(b_2 \cdot c_1)$ auf w''_4.

β) Liegt $(c_1 \cdot c_2)$ zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(s' \cdot \tau)$, so projicire man statt dessen:

s von $(a_1 \cdot a_2)$ und s' von $(a_1 \cdot c_1)$ auf w'_4; s' von $(b_2 \cdot c_1)$ auf w''_4.

γ) Liegt $(c_1 \cdot c_2)$ zwischen $(b_1 \cdot b_2)$ und $(s \cdot \tau)$, so projicire man:

s von $(a_1 \cdot a_2)$ und s' von $(a_1 \cdot c_1)$ auf n'_1; s' von $(b_2 \cdot c_1)$ auf n''_1.

2) Um den Satz IV. b) für c_1 zu beweisen, projicire man stets:

C'_1 von $(a_1 \cdot b_1)$ auf n_3 nach $\mathfrak{S}_3$, und $\mathfrak{S}_3$ von $(a_1 \cdot a_2)$ auf s nach C_1.

α) Liegt $(c_1 \cdot c_2)$ zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(b_1 \cdot b_2)$, so projicire man weiter:

s von $(a_1 \cdot a_2)$ und s' von $(a_1 \cdot c_1)$ auf n'_3; s' von $(b_2 \cdot c_1)$ auf n''_4.

β) Liegt $(c_1 \cdot c_2)$ zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(s' \cdot \tau)$, so projicire man:

s von $(a_1 \cdot a_2)$ und s' von $(a_1 \cdot c_1)$ auf n''_6; s' von $(b_2 \cdot c_1)$ auf n''_4.

γ) Liegt $(c_1 \cdot c_2)$ zwischen $(b_1 \cdot b_2)$ und $(s \cdot \tau)$, so projicire man:

s von $(a_1 \cdot a_2)$ und s' von $(a_1 \cdot c_1)$ auf n'_3; s' von $(b_2 \cdot c_1)$ auf n''_1.

II. 1) Um den Satz IV. a) für c_2 zu beweisen, projicire man stets: C'_2 von $(a_2 \cdot b_1)$ auf n_1 nach $\mathfrak{S}_1$, und $\mathfrak{S}_1$ von $(a_1 \cdot a_2)$ auf s nach C_2.

α) Liegt $(c_2 \cdot c_1)$ zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(b_1 \cdot b_2)$, so projicire man weiter:

s von $(a_1 \cdot a_2)$ und s' von $(a_2 \cdot c_2)$ auf m'_1; s' von $(b_2 \cdot c_2)$ auf m''_4.

β) Liegt $(c_2 \cdot c_1)$ zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(s' \cdot \tau)$, so projicire man:

s von $(a_1 \cdot a_2)$ und s' von $(a_2 \cdot c_2)$ auf m'_4; s' von $(b_2 \cdot c_2)$ auf m''_4.

γ) Liegt $(c_2 \cdot c_1)$ zwischen $(b_1 \cdot b_2)$ und $(s \cdot \tau)$, so projicire man:

s von $(a_1 \cdot a_2)$ und s' von $(a_2 \cdot c_2)$ auf m'_1; s' von $(b_2 \cdot c_2)$ auf m''_1.

2) Um den Satz IV. b) für c_2 zu beweisen, projicire man stets: C'_2 von $(a_1 \cdot b_1)$ auf n_3 nach $\mathfrak{S}_3$, und $\mathfrak{S}_3$ von $(a_1 \cdot a_2)$ auf s nach C_2.

α) Liegt $(c_2 \cdot c_1)$ zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(b_1 \cdot b_2)$, so projicire man weiter:

s von $(a_1 \cdot a_2)$ und s' von $(a_1 \cdot c_2)$ auf m'_3; s' von $(b_2 \cdot c_2)$ auf m''_4.

β) Liegt $(c_2 \cdot c_1)$ zwischen $(a_1 \cdot a_2)$ und $(s' \cdot \tau)$, so projicire man:

s von $(a_1 \cdot a_2)$ und s' von $(a_1 \cdot c_2)$ auf m'_6; s' von $(b_2 \cdot c_2)$ auf m''_4.

γ) Liegt $(c_2 \cdot c_1)$ zwischen $(b_1 \cdot b_2)$ und $(s \cdot \tau)$, so projicire man:

s von $(a_1 \cdot a_2)$ und s' von $(a_1 \cdot c_2)$ auf m'_3; s' von $(b_2 \cdot c_2)$ auf m'_1.

Man sieht, wie in jedem der drei Fälle α), β), γ), die in jedem allgemeineren Fall vorkommen, die Projectionscentra immer dieselben bleiben, z. B. in I. 1) α), β), γ) $(a_1 \cdot a_2)$, $(a_1 \cdot c_1)$, $(b_2 \cdot c_1)$. Ferner bemerkt man, daß in den Fällen I. 1) und I. 2) nur Gerade der ersten beiden Gruppen der Tabelle t_2, nämlich $\mathfrak{n}$ und n, daß in den Fällen II. 1) und II. 2) nur Gerade der letzten beiden Gruppen der Tabelle t_2, nämlich $\mathfrak{m}$ und m als Projectionsaxen vorkommen; ferner daß nur die acht Geraden $\mathfrak{m}_6$, $\mathfrak{n}_4$, m_3, n_1; und $\mathfrak{m}_4$, $\mathfrak{n}_6$, m_1, n_3, welche die erste und zweite Quaternion der in Lehrsatz 12. erwähnten 12 Geraden bilden, und keine der Geraden $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{m}_5$, m_2, m_4, welche die dritte Quaternion bilden, vorkommt. — Eine ganz ähnliche Tafel läßt sich für die Strahlbüschel aufstellen. Wenn man sich an § 1. Erklärung 3. erinnert, der zufolge also ein Strahlbüschel M,pqrs von einem Punkte M′ aus auf eine Gerade u projicirt, heißt, wenn von M′ nach den Durchschnittspunkten $(u \cdot p)$, $(u \cdot q)$, $(u \cdot r)$, $(u \cdot s)$ die Strahlen p′, q′, r′, s′ gezogen sind, so daß Strahlbüschel M und M′ für die Gerade u als Axe perspectivisch liegen, und wenn man dann p′ die Projection von p und umgekehrt, q′ die Projection von q und umgekehrt, u. s. w. nennt, so sieht der Anfang der sich für Strahlbüschel ergebenden Tabelle so aus:

T_3.

I. 1) Um den Satz IV. a′) für C_1 zu beweisen, projicire man stets, in α), β), γ):

c'_1 von N_1 aus auf $(A_2 - B_1)$ nach $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1$ von S aus auf $(A_1 - A_2)$ nach c_1.

α) Liegt $(C_1 - C_2)$ zwischen $(A_1 - A_2)$ und $(B_1 - B_2)$, so projicire man weiter:

S und S′ von N'_1 aus bezüglich auf $(A_1 - A_2)$ und $(A_1 - C_1)$; S′ von $\mathfrak{N}''_4$ aus auf $(B_2 - C_1)$.

β) Liegt $(C_1 - C_2)$ zwischen $(A_1 - A_2)$ und $(S' - T)$, so projicire man statt dessen:

S und S′ von $\mathfrak{N}'_4$ aus bezüglich auf $(A_1 - A_2)$ und $(A_1 - C_1)$; S′ von $\mathfrak{N}''_4$ aus auf $(B_2 - C_1)$.

γ) Liegt $(C_1 - C_2)$ zwischen $(B_1 - B_2)$ und $(S - T)$, so projicire man:

S und S′ von N'_1 aus bezüglich auf $(A_1 - A_2)$ und $(A_1 - C_1)$; S′ von N''_1 aus auf $(B_2 - C_1)$

u. s. w. c'_1 von N_1 aus auf $(A_2 - B_1)$ nach $\mathfrak{c}_1$ projiciren heißt also hier, den von N_1 ausgehenden Strahl $\mathfrak{c}_1$ suchen, der die $(A_2 - B_1)$ in demselben Punkt schneidet, wie c'_1, etc.; S von N'_1 aus auf $(A_1 - A_2)$ projiciren heißt die von N'_1 als Scheitel eines Strahlbüschels ausgehenden Strahlen suchen, welche die $(A_1 - A_2)$ in denselben Punkten

schneiden, wie die Strahlen des Büschels S etc. Kurz man sieht, daß man bei dieser Bezeichnung in der vorigen Tabelle t_3 außer einer kleinen Wortumstellung nur die kleinen Buchstaben mit den großen zu vertauschen braucht. Sowie in t_3 die Projectionscentra $(a_1 \cdot a_2)$; $(a_1 \cdot c_1)$, $(b_2 \cdot c_1)$ u. s. w. für jede in derselben größeren Abtheilung stehende Unterabtheilung α), β), γ) dieselben waren, so ist dieß hier mit den Projectionsaxen $(A_1 - A_2)$, $(A_1 - C_1)$, $(B_2 - C_1)$ u. s. w. der Fall; und ebenso kommen nur die acht Punkte der zwei ersten Quaternionen des Lehrsatzes 12., $\mathcal{M}_6$, $\mathcal{N}_4$, M_3, N_1 und $\mathcal{M}_4$, $\mathcal{N}_6$, M_1, N_3, dagegen keiner der Punkte $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_5$, M_2, M_4 der dritten Quaternion vor.

Es gelten demnach die Sätze IV. a), IV. b), IV. a'), IV. b'), für jedes beliebige c_1, c_2, C_1, C_2. Sucht man also außer den vier ursprünglich angenommenen Projectionsstrahlen und Projectionspunkten, a_1, a_2; b_1, b_2; A_1, A_2; B_1, B_2, von denen $(a_1 \cdot a_2)$, $(b_1 \cdot b_2)$ auf τ liegen und $(A_1 - A_2)$, $(B_1 - B_2)$ durch T gehen, einen beliebigen fünften c, C, so gelten, wo er auch liegen mag, für ihn die Sätze IV. a), IV. b), IV. a'), IV. b'). Vergleichen wir diese Sätze mit den in III. a), III. b), III. a'), III. b') aufgestellten, so sehen wir, daß die in den Conformitätsgleichungen IV) vorkommenden drei ersten Punkt- oder Strahlenpaare schon in den Conformitätsgleichungen III) entsprechende Punkte oder Strahlen sind, es muß also auch das vierte Punkt- oder Strahlenpaar in IV) ein Paar entsprechender Punkte oder Strahlen in III) sein. Es muß also sein, wenn wir c, C für c_1, C_1 schreiben; und da dasselbe, was von einem Projectionsstrahl c gilt, auch von jedem anderen, z. B. d (hier nicht zu verwechseln mit dem d_1, d_2 in Fig. 108.a., das hier gebrauchte d ohne Marke bezeichnet einen beliebigen Projectionsstrahl), e, f, g, ... u. s. w. gilt, und ein Gleiches bei Strahlbüscheln statt hat:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Punktreihe } a_1, \mathcal{A}_1 (a_1 \cdot \pi_1)(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot s)(a_1 \cdot b_2)(a_1 \cdot \pi_2) \\
\qquad (a_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot s')(a_1 \cdot c)(a_1 \cdot d)(a_1\, e)(a_1 \cdot f) \ldots\ \overline{\wedge} \\
\text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathcal{B}_1 (b_1 \cdot s)(b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2) \\
\qquad (b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot s')(b_1 \cdot c)(b_1 \cdot d)(b_1\, e)(b_1 \cdot f) \ldots
\end{array}\right\} \text{V. a)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Punktreihe } a_2, \mathcal{A}_2 (a_2 \cdot s')(a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot \pi_1)(a_2 \cdot b_1)(a_2 \cdot s) \\
\qquad (a_2 \cdot b_2)(a_2 . \pi_2)(a_2 \cdot c)(a_2 \cdot d)(a_2 \cdot e)(a_2 \cdot f) \ldots\ \overline{\wedge} \\
\text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_2)(b_1 \cdot s')(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot \pi_1) \mathcal{B}_1 (b_1 \cdot s) \\
\qquad (b_1 \cdot b_2)(b_1 \cdot \pi_2)(b_1 \cdot c)(b_1 . d)(b_1 \cdot e)(b_1 \cdot f) \ldots
\end{array}\right\} \text{V. b)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Strahlbüschel } A_1, \alpha_1 (A_1 - \Pi_1)(A_1 - B_1)(A_1 - S)(A_1 - B_2) \\
\qquad (A_1 - \Pi_2)(A_1 - A_2)(A_1 - S')(A_1 - C)(A_1 - D) \\
\qquad (A_1 - E)(A_1 - F) \ldots\ \overline{\wedge} \\
\text{Strahlbüschel } B_1, (B_1 - A_1)(B_1 - \Pi_1) \beta_1 (B_1 - S)(B_1 - B_2) \\
\qquad (B_1 - \Pi_2)(B_1 - A_2)(B_1 - S')(B_1 - C)(B_1 - D) \\
\qquad (B_1 - E)(B_1 - F) \ldots
\end{array}\right\} \text{V. a')}$$

Strahlbüschel $A_2, \alpha_2 (A_2 - S') (A_2 - A_1) (A_2 - \Pi_1) (A_2 - B_1)$
$(A_2 - S) (A_2 - B_2) (A_2 - \Pi_2) (A_2 - C) (A_2 - D)$
$(A_2 - E) (A_2 - F) \ldots . \overline{\wedge}$
Strahlbüschel $B_1, (B_1 - A_2) (B_1 - S') (B_1 - A_1) (B_1 - \Pi_1) \beta_1$
$(B_1 - S) (B_1 - B_2) (B_1 - \Pi_2) (B_1 - C) (B_1 - D)$
$(B_1 - E) (B_1 - F) \ldots .$ V. b')

Es ist also für irgend welche Projectionsstrahlen und Projectionspunkte $c, d, e, f \ldots ; C, D, E, F \ldots$ kurz:

Punktreihe $a_1, \mathfrak{A}_1 (a_1 \cdot b_1) (a_1 \cdot c) (a_1 \cdot d) (a_1 . e) (a_1 \cdot f) \ldots . \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot a_1) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot c) (b_1 \cdot d) (b_1 \cdot e) (b_1 \cdot f) \ldots .$ VI. a)

Punktreihe $a_2, \mathfrak{A}_2 (a_2 \cdot b_1) (a_2 \cdot c) (a_2 \cdot d) (a_2 \cdot e) (a_2 \cdot f) \ldots . \overline{\wedge}$
Punktreihe $b_1, (b_1 \cdot a_2) \mathfrak{B}_1 (b_1 \cdot c) (b_1 \cdot d) (b_1 \cdot e) (b_1 \cdot f) \ldots .$ VI. b)

Strahlbüschel $A_1, \alpha_1 (A_1 - B_1) (A_1 - C) (A_1 - D) (A_1 - E)$
$(A_1 - F) \ldots . \overline{\wedge}$
Strahlbüschel $B_1, (B_1 - A_1) \beta_1 (B_1 - C) (B_1 - D) (B_1 - E)$
$(B_1 - F) \ldots .$ VI. a')

Strahlbüschel $A_2, \alpha_2 (A_2 - B_1) (A_2 - C) (A_2 - D) (A_2 - E)$
$(A_2 - F) \ldots . \overline{\wedge}$
Strahlbüschel $B_1, (B_1 - A_2) \beta_1 (B_1 - C) (B_1 - D) (B_1 - E)$
$(B_1 - F) \ldots .$ VI. b')

Es werden also die Projectionsstrahlen a_1 und b_1, a_2 und b_1, mögen sie die ursprünglichen Punktreihen s, s' auf derselben Seite von $(s \cdot s')$, wie a_1, b_1, so schneiden, daß sowohl $(a_1 \cdot s)$ als $(b_1 \cdot s)$ auf der Strecke $P \infty T$, $(a_1 \cdot s')$, $(b_1 \cdot s')$ auf der Strecke $P' \infty T'$ liegt, oder mögen sie s und s' so schneiden, daß, wie bei a_2, b_1 von den Durchschnittspunkten $(a_2 \cdot s)$, $(b_1 \cdot s)$ ersterer auf PT, letzterer auf $P \infty T$, von $(a_2 \cdot s')$, $(b_1 \cdot s')$ ersterer auf $P'T'$, letzterer auf $P' \infty T'$ liegt, stets in den Durchschnittspunkten von beliebigen anderen conform getheilt; denn der Fall a_2, b_2 ist ganz analog dem Fall a_1, b_1. Daß ferner dieß Gesetz auch für zwei auf τ sich schneidende Strahlen a_1, a_2, b_1, b_2 gilt, ergiebt sich schon aus den Conformitätsgleichungen 1. a) und 1. b) (Seite 258.). Ebenso entstehen an den Projectionspunkten A_1, B_1; A_2, B_2, mögen sie, wie erstere zwei, beide auf derselben, oder wie letztere zwei, auf verschiedenen Seiten von $(S - S')$ liegen, durch die Verbindungsgeraden mit beliebigen anderen Projectionspunkten conforme Strahlbüschel. Daß ferner dieses Gesetz auch für zwei Punkte A_1, A_2; B_1, B_2, deren Verbindungsgerade durch T geht gilt, ergiebt sich schon aus den Conformitätsgleichungen 1. a') und 1. b') (Seite 258.).

Wir hatten uns bisher nur mit den Curven K'_1 und k_1 beschäftigt.

Es ist aber aus dem Bisherigen klar, daß der ganze bisherige Beweis nirgends einen Unterschied zu machen genöthigt war, ob die ursprünglich gegebenen Punktreihen s und s′ nur im Allgemeinen conform, oder im Speciellen proportional getheilt sind. Es muß also alles Bisherige auch von der Curve K'_3 (s. Erklärung 5). gelten. Es versteht sich aber von selbst, daß von der Punktreihe, die auf der unendlich entfernten Geraden liegt, nicht die Rede sein kann, da ihre Richtung eine völlig unbestimmte ist. Bei entgegengesetzt verlaufenden Punktreihen Fig. 111. (Taf. IX.) müssen sich nach Lehrsatz 3. in jedem Punkt der Strecke P′T zwei Projectionsstrahlen schneiden, z. B. $a_1, a_2; b_1, b_2$. Aus der Aufeinanderfolge der Punkte überzeugt man sich sogleich, daß kein Projectionsstrahl die τ auf der Strecke $P'\infty T$ treffen kann. Versteht man wieder, wie im Vorigen, unter γ' die Gerade $[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$, so sieht man sofort, daß sie stets die τ auf der Strecke P′T schneiden muß, versteht man unter γ die Gerade $[(a_1 \cdot b_1) - (a_2 \cdot b_2)]$, so sieht man, daß sie die τ stets auf $P'\infty T$ schneiden muß. Da nun auch die Sätze über das vollständige Sechsseit in § 5. Lehrsatz 6. und Lehrsatz 7. von der Lage der Punktreihen ganz unabhängig sind, und auf diese und die Lage von γ' allein der vorige Beweis sich gründet, so sieht man, daß derselbe auch für K'_2 gilt. — Ebenso sieht man, daß der bisherige Beweis auch für die Curve k_5 ohne Weiteres gültig sein muß. Man überzeugt sich ferner leicht, indem man in Fig 63. einen der Punkte D_1, F_1, A_1, E_1 in das Unendliche rücken läßt, (z. B. indem man d_1 und d_2 parallel annimmt, in welchem Falle D in ∞ liegt), oder, indem man an die Stelle des einen Strahlbüschels z. B. S_2 einen Parallelstrahlbüschel setzt, also S_2 als im Unendlichen liegend ansieht, daß auch dann die Sätze § 5. Lehrsatz 6. und Lehrsatz 7. noch gelten, indem die dort gegebenen Beweise dadurch keine Modification erleiden. Man kann sogar zwei Punkte als im Unendlichen liegend ansehen, nur dürfen sie nicht zwei auf einander folgende Punkte sein, z. B. nicht der erste und zweite, oder der zweite und dritte u. s. w., indem sonst das Sechseck Fig. 63. in ein Fünfeck mit einem unendlich entfernten Punkt übergehen würde, wohl aber z. B. D und F_1, indem man $d_1 \parallel d_2$, $f_1 \parallel f_2$ sein läßt. Dann tritt an die Stelle von A_1F_1 eine durch A_1 gehende parallel zu f_1 oder f_2 verlaufende Gerade, und der Beweis bleibt ungeändert. Setzt man jedoch an die Stelle des einen Strahlbüschels z. B. an die Stelle von S_2 einen Parallelstrahlbüschel, nimmt also S_2 als unendlich entfernt an, und zugleich einen anderen Punkt, z. B. F_1, indem man f_2 und also auch a_2, e_2, $d_2 \parallel f_1$ nimmt, so läßt sich, da man für A_1F_1 jetzt den Strahl a_2 selbst bekommt, kein bestimmter Strahlbüschel angeben, der mit S_1 und S_2 zugleich perspectivisch läge; ebenso wenig kann dieß geschehen, wenn man für S_1 sowohl als für S_2 Parallelstrahlbüschel setzt. Man sieht demnach sogleich, daß für alle in **endlicher** Entfernung liegenden Punkte der Curve k_2 und k_4 der bisherige Beweis ungeändert bleibt, ebenso, daß er ungeändert bleibt,

wenn man für einen der Punkte A_1, A_2, B_1, B_2 den unendlich entfernten Curvenpunkt setzt. Es gilt also insbesondere alles von den endlichen Punkten Gesagte auch von dem unendlich entfernten Punkt der Curve k_1. Auch gelten die bisherigen Beweise und Sätze noch, wenn man für zwei der in ihnen vorkommenden Projectionspunkte die unendlich entfernten Punkte setzt, nur darf keiner der beiden Punkte, für den man einen der unendlichen einsetzen will, die Bedeutung des Scheitels eines Strahlbüschels haben, sondern er muß nur dazu dienen die Richtung eines Strahls anzugeben, der von einem endlichen Scheitel ausgeht, wie eben an Fig 63. gezeigt wurde. Man kann also dasselbe, was von dem Strahl eines Strahlbüschels behauptet worden war, dessen Strahlen durch endlich entfernte Punkte bestimmt waren, auch von den Strahlen dieses Büschels behaupten, die nach den unendlich entfernten Punkten der Curve gehen. Man kann aber nicht behaupten, daß das, was von zwei Strahlbüscheln gilt, deren Scheitel im Endlichen liegen, auch gelte von den zwei Strahlbüscheln, deren beide Scheitel in den unendlich entfernten Curvenpunkten liegen. Also

18. Lehrsatz. Was von den Punktreihen, deren Richtung in endlicher Entfernung liegt, gilt, verliert seine Bestimmtheit, wenn man es auf die Punktreihe der Curve K'_3 ausdehnen will, deren Richtung im Unendlichen liegt.

18. Lehrsatz. Alle bisherigen Sätze bleiben unter **allen** Umständen richtig, wenn man für irgend einen Punkt **einen** der unendlich entfernten der Curven k annimmt. Sie gelten auch dann, wenn man für **zwei** Punkte die unendlichen setzt, jedoch **nur**, wenn diese nur dazu dienen, die **Richtung** zweier Strahlen zu bestimmen; sie verlieren ihre Bestimmtheit in **jedem** anderen Falle.

Bei der Curve k_2 sind noch mehrere Besonderheiten zu erwähnen. Es seien m, m'; n, n' die parallelen entsprechenden Strahlen, die nach den beiden unendlich entfernten Punkten gerichtet sind, so erhält man auf jedem Strahl b_1, der in der Ebene des Winkels pn liegt, einen oberhalb (S—S') liegenden Punkt B_1, und einen zweiten B_2, auf (B_1—T), Fig. 112a.*), auf jedem Strahl b_1 in der Fläche des Winkels mn einen unterhalb (S—S') liegenden Punkt B_1, und auf (B_1—T) einen zweiten B_2 Fig. 112b., auf jedem Strahl a_1 in der Fläche des Winkels mp einen oberhalb (S—S') liegenden Punkt A_1

*) Durch ein Versehen ist dieser Strahl b_1 in dieser Figur zwischen m und n gesetzt worden. Er muß vielmehr in pn, etwas rechts von n liegen, so wie links der Strahl a'_1 links von m' liegt, wovon man sich durch die Aufeinanderfolge der Strahlen an S und S' sogleich überzeugt. (s. Fig. 112. c.)

und einen zweiten auf (A_1-T) Fig. 112a. nach Lehrsatz 3; die Strahlen m, m'; n, n' selbst geben die zwei unendlich entfernten Punkte, die Punkte A_2, B_2 müssen immer auf der Strecke zwischen T und $(S-S')$ liegen, wegen Lehrsatz 6. Es können nun drei Fälle eintreten: 1) A_1 und B_1 liegen beide oberhalb $(S-S')$ Fig. 112a., 2) A_1 und B_1 liegen beide unterhalb $(S-S')$ Fig. 112b., 3) einer der beiden Punkte, z. B. B_1 liegt ober-, der andere, A_1, unterhalb $(S-S')$ Fig. 112c. Liegt aber einer der Punkte A_1, B_1 unterhalb $(S-S')$, so muß er auch unterhalb T liegen, da p' und t in den Winkelräumen t'm', pn sich befinden, und erst auf einem Strahl, der mit $(S-S')$ einen Winkel macht, der größer ist als pn oder pm, ein Punkt unterhalb $(S-S')$ liegen kann. In allen Fällen aber schneiden sich (A_1-B_1) und (A_2-B_2) auf $(S-S')$ und zwar in einem Punkt Γ auf $S\infty S'$, und (A_1-B_2) und (A_2-B_1) in einem Punkt Γ' der Strecke SS'. Ueberhaupt ist es völlig gleichgültig, ob ein Punkt A_1, B_1 ober- oder unterhalb $(S-S')$ liegt, ebenso wie es bei der Curve K'_1 einerlei ist, ob ein Projectionsstrahl die s und s' rechts von $(s \cdot s')$ und also auch rechts von τ schneidet. Fig. 113. Der Beweis bleibt in allen Fällen derselbe. Liegen endlich die Strahlbüschel entgegengesetzt in der Curve k_3 Fig. 115., so gilt auch hier unser Beweis, da die Sätze § 5. Lehrsatz 6. und Lehrsatz 7. auch bei entgegengesetzter Lage der Strahlbüschel gültig bleiben, wenn man nur dieselbe Bezeichnung, wie früher anwendet. Sind m, m'; n, n' die die beiden unendlich entfernten Punkte erzeugenden Strahlen, so erhält man einen Punkt rechts von S, wenn ein Strahl b_1, a_1 zwischen n und t liegt, und zwar oberhalb $(S-S')$, auf einem Strahl a_2, b_2 zwischen t und m erhält man einen rechts von S unter $(S-S')$ liegenden Punkt, auf m einen unendlichen Punkt, auf einem Strahl a_2 zwischen m und p einen Punkt links von S' über $(S-S')$, auf einem Strahl a_1 zwischen p und n einen links von S' unter $(S-S')$ liegenden, auf dem Strahl n den zweiten unendlich entfernten Punkt, worauf die früheren Strahlen wiederkehren. Auch hier gelten, wenn man nur die Punkte links unterhalb $(S-S')$ ebenso, wie die rechts über $(S-S')$ befindlichen mit der Marke 1, die links über $(S-S')$ ebenso, wie die rechts unter $(S-S')$ befindlichen mit 2. bezeichnet, dieselben Gesetze. Diese Bezeichnung stimmt vollkommen mit der früheren überein. Bei einstimmigen Strahlbüscheln gab es nur auf den die $(S-S')$ auf der Strecke SS' schneidenden Geraden Curvenpunkte, hier nur auf den in $S\infty S'$ schneidenden. Wir bezeichneten früher diejenigen Strahlen an S mit 1, die mit ihrer aufwärts gerichteten Hälfte zwischen SS' und t sich befanden, hier also haben wir diejenigen Strahlen an S mit der Marke 1. zu versehen, die mit ihrer aufwärts gekehrten Hälfte zwischen $S\infty S'$ und t liegen, u. s. w. Dann liegt, wenn man bedenkt, daß hier die Punkte auf $S\infty S'$ mit Γ', B' u. s. w., die Punkte auf SS' mit Γ, B, u. s. w. bezeichnet werden müssen, wie bei einstimmig verlaufenden Strahlbüscheln der Durchschnittspunkt sowohl von (A_1-B_1) und (A_2-B_2) als der

von $(A_1 \frown B_1)$ und $(A_2 \frown B_2)$ in einem Punkt Γ der Strecke SS′, der Durchschnittspunkt, sowohl von $(A_1 \frown B_2)$ und $(A_2 \frown B_1)$, als von $(A_1 \frown B_2)$ und $(A_2 \frown B_1)$ in einem Punkt Γ′ der Strecke S∞S′. Dasselbe gilt auch, wenn in der Curve k_6 die entgegengesetzt verlaufenden Strahlbüschel gleich sind. Man sieht daher, daß unser Beweis für alle Fälle gültig bleibt, sofern man nicht zwei von den in Rede stehenden Punkten als im Unendlichen befindlich annimmt.

Wir können daher nach den Conformitäts-Gleichungen IV. a); IV. b); IV. a′); IV. b′); V. a); V. b); V. a′); V. b′); VI. a); VI. b); VI. a′); VI. b′) sagen:

19. **Lehrsatz.** Liegen irgend zwei conforme Punktreihen $s, B_1 A_1 P A_2 B_2 T$ und $s', B'_1 A'_1 P' A'_2 B'_2 T'$ projectivisch, einstimmig oder entgegengesetzt, so entstehen auf jeden zwei Projectionsstrahlen a_1 und a_2; a_1 und b_1; a_2 und b_1;.... als Richtungen conforme projectivisch liegende Punktreihen, indem der Durchschnittspunkt jedes Projectionsstrahls auf jedem der beiden Strahlen a_1 und a_2; a_1 und b_1; a_2 und b_1, ... entsprechende Punkte bildet.

19. **Lehrsatz.** Liegen irgend zwei conforme Strahlbüschel $S, b_1 a_1 p a_2 b_2 t$ und $S', b'_1 a'_1 p' a'_2 b'_2 t'$ projectivisch, einstimmig oder entgegengesetzt, so entstehen an jeden zwei Projectionspunkten A_1 und A_2; A_1 und B_1; A_2 und B_1;.... als Scheiteln conforme projectivisch liegende Strahlbüschel, indem die Verbindungsgerade jedes Projectionspunkts an jedem der beiden Punkte A_1 und A_2; A_1 und B_1; A_2 und B_1;.... entsprechende Strahlen bildet.

Es ist dieß nichts anderes als eine weitere Ausführung des § 5. Lehrsatz 10. ausgesprochenen Gesetzes. Wir sehen aber jetzt noch mehr. Wir sahen aus der Conformitätsgleichung V. a) daß in den auf den Projectionsstrahlen a_1 und b_1 als Richtungen von den übrigen Projectionsstrahlen a_1, π_1, π_2; c, d, e, f.... durch ihre Durchschnittspunkte mit a_1 und b_1 hervorgebrachten conformen Punktreihen der Punkt $\mathcal{A}_1$ der Reihe auf a_1 dem Durchschnittspunkt $(b_1 \cdot a_1)$ des Strahls a_1 mit b_1 als einem Punkt der auf b_1 liegenden Reihe entsprach, und daß der Punkt $\mathcal{B}_1$ auf b_1 dem Punkt $(a_1 \cdot b_1)$ auf a_1 entspricht. Es fragt sich jetzt, ob, wenn man statt der Punktreihe auf b_1, die auf einem anderen Projectionsstrahl z. B. auf c, wählt, ob auch dann derselbe Punkt $\mathcal{A}_1$ auf a_1 dem Durchschnittspunkt $(c \cdot a_1)$ entspricht, oder nicht. Dieses haben wir jetzt zu untersuchen. Zunächst ist nach V. a), die also für jede Art conformer Reihen in jeder Lage gilt,

$$\left.\begin{array}{l} \text{Punktreihe } a_1, \mathcal{A}_1 (a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot s)(a_1 \cdot s')(a_1 \cdot c)(a_1 \cdot d) \ldots . \;\overline{\wedge} \\ \text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_1)\, \mathcal{B}_1 (b_1 \cdot s)(b_1 \cdot s')(b_1 \cdot c)(b_1 \cdot d) \ldots . \end{array}\right\} \dagger)$$

Nach Lehrsatz 19. ist aber auch, wenn wir den Punkt der Reihe auf c,

welcher dem Punkt $(a_1 \cdot c)$ der Reihe auf a_1 entspricht, mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen:

$$\text{Punktreihe } a_1, (a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot s)(a_1 \cdot s')(a_1 \cdot c)\, a_1 \cdot d) \ldots \barwedge$$
$$\text{Punktreihe } c, (c \cdot b_1)(c \cdot s)(c \cdot s')\mathfrak{S}(c \cdot d) \ldots$$

Bezeichnen wir nun den als noch unbekannt angenommenen Punkt der Reihe a_1, der dem Punkt $(c \cdot a_1)$ auf c entspricht, mit $\mathcal{A}'$, so ist also

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punktreihe } a_1, \mathcal{A}'(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot s)(a_1 \cdot s')(a_1 \cdot c)(a_1 \cdot d) \ldots \barwedge \\ \text{Punktreihe } c, (c \cdot a_1)(c \cdot b_1)(c \cdot s)(c \cdot s')\mathfrak{S}(c \cdot d) \ldots\end{array}\right\} \dagger\dagger)$$

Nach Lehrsatz 19. (s. Gleichung V. a.)) ist aber auch

$$\text{Punktreihe } c, (c \cdot a_1)(c \cdot s)(c \cdot s')(c \cdot d) \ldots \barwedge$$
$$\text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot s)(b_1 \cdot s')(b_1 \cdot d) \ldots$$

Nach Gleichung †) ist aber

$$\text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot s)(b_1 \cdot s')(b_1 \cdot d) \ldots \barwedge$$
$$\text{Punktreihe } a_1, \mathcal{A}_1(a_1 \cdot s)(a_1 \cdot s')(a_1 \cdot d) \ldots$$

Es ist also auch

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punktreihe } c, (c \cdot a_1)(c \cdot s)(c \cdot s')(c \cdot d) \ldots \barwedge \\ \text{Punktreihe } a_1, \mathcal{A}_1(a_1 \cdot s)(a_1 \cdot s')(a_1 . d) \ldots\end{array}\right\} \dagger\dagger\dagger)$$

Da in diesen beiden Punktreihen je die drei Punkte $(c \cdot s)$, $(c \cdot s')$, $(c \cdot d)$ auf c, und $(a_1 \cdot s)$, $(a_1 \cdot s')$, $(a_1 \cdot d)$ auf a_1 entsprechende sind, die schon in ††) entsprechende waren, so folgt, daß auch dem vierten Punkt $(c \cdot a_1)$ in der letzten Gleichung derselbe Punkt auf a_1 entsprechen muß, wie in der Gleichung ††). Daselbst war es der unbekannte Punkt $\mathcal{A}'$; hier, in †††) ist es $\mathcal{A}_1$; es muß also $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{A}_1$ identisch sein, oder $\mathcal{A}'$ nach $\mathcal{A}_1$ fallen. Ist also

$$\text{Punktreihe } a_1, \mathcal{A}_1(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot s)(a_1 \cdot s')(a_1 \cdot c)(a_1 \cdot d) \ldots \barwedge$$
$$\text{Punktreihe } b_1, (b_1 \cdot a_1)\mathcal{B}_1(b_1 \cdot s)(b_1 \cdot s')(b_1 \cdot c)(b_1 \cdot d) \ldots$$

so ist auch, wenn c ein beliebiger Projectionsstrahl ist:

$$\text{Punktreihe } a_1, \mathcal{A}_1(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot s)(a_1 \cdot s')(a_1 \cdot c)(a_1 \cdot d) \ldots \barwedge$$
$$\text{Punktreihe } c, (c \cdot a_1)(c \cdot b_1)(c \cdot s)(c \cdot s')\mathfrak{S}(c \cdot d) \ldots$$

Genau ebenso läßt sich dieß von der Punktreihe auf a_2 zeigen, daß nämlich der Punkt $\mathcal{A}_2$ auf a_2 dem Punkt $(c \cdot a_2)$ entspricht. Man braucht in diesem Beweise nur a_1 mit a_2 zu vertauschen. Ebenso folgt ein Gleiches aus den Gleichungen V. a') und V. b') für Strahlbüschel, indem man in diesem Beweise die kleinen Buchstaben mit den großen, und „Punktreihe" mit „Strahlbüschel" vertauscht. Man sieht also:

20. **Lehrsatz.** Derselbe Punkt $\mathcal{A}_1$ auf einem Projectionsstrahl a_1, der dem

20. **Lehrsatz.** Derselbe Strahl α_1 an einem Projectionspunkt A_1, der dem

Punkt $(b_1 \cdot a_1)$ der conformen Punktreihe auf **einem** Projectionsstrahle b_1 entsprechend ist, ist auch dem Punkte $(c \cdot a_1)$ der conformen Punktreihe auf **jedem anderen** Projectionsstrahl c entsprechend.

Strahl $(B_1 - A_1)$ des conformen Strahlbüschels an **einem** Projectionspunkte B_1 entsprechend ist, ist auch dem Strahle $(C - A_1)$ des conformen Strahlbüschels an **jedem anderen** Projectionspunkte C entsprechend.

Es giebt demnach auf jedem Projectionsstrahl a_1 nur einen einzigen Punkt $\mathfrak{A}_1$, der in der Punktreihe auf a_1 dem Durchschnittspunkte von a_1 mit jedem anderen Projectionsstrahle b_1, c, d, e .... in den conformen Punktreihen auf b_1, c, d, e .... entsprechend ist. Ebenso giebt es an jedem Projectionspunkt A_1 nur einen einzigen Strahl α_1, der in dem Strahlbüschel an A_1 der Verbindungsgeraden von A_1 mit jedem andern Projectionspunkt B_1, C, D, E .... in den conformen Strahlbüscheln an B_1, C, D, E,.... entsprechend ist. Dasselbe gilt ebenso von den Projectionsstrahlen a_2,...., und den Projectionspunkten A_2,.... Es kann also durch $\mathfrak{A}_1$ auf a_1 keiner der Projectionsstrahlen b_1, a_2, c, d, e,.... gehen, denn ginge z. B. c durch $\mathfrak{A}_1$, so müßte, da c den Projectionsstrahl b_1 in $(b_1 \cdot c)$ schneidet, nach Lehrsatz 19. der Punkt $(a_1 \cdot c)$ auf a_1 dem Punkt $(b_1 \cdot c)$ auf b_1 entsprechen; $(a_1 \cdot c)$ wäre aber nichts anderes als $\mathfrak{A}_1$, und dieses entspricht nur dem Punkt $(b_1 \cdot a_1)$; es kann also außer a_1 kein Strahl c durch $\mathfrak{A}_1$ gehen, ebenso kann durch $\mathfrak{B}_1$ auf b_1, durch $\mathfrak{A}_2$ auf a_2, durch $\mathfrak{B}_2$ auf b_1, durch $\mathfrak{C}$ auf c, u. s. w. kein Projectionsstrahl gehen. Es ist aber auch $\mathfrak{A}_1$ der einzige Punkt auf a_1, durch den kein anderer Projectionsstrahl geht. Denn gäbe es auf a_1 noch einen solchen Punkt $\mathfrak{A}''$, durch den kein Projectionsstrahl ginge, so müßte es in der Punktreihe z. B. auf b_1 keinen ihm entsprechenden Punkt geben können, (denn gäbe es einen, z. B. $\mathfrak{B}''$, so wäre die Gerade $(\mathfrak{A}'' - \mathfrak{B}'')$ ein Projectionsstrahl, gegen die Voraussetzung, daß durch $\mathfrak{A}''$ keiner gehen soll als a_1. Es könnte also $\mathfrak{B}''$ nur im Durchschnitt von b_1 mit a_1 liegen; diesem Punkt auf b_1 entspricht aber nach V. a) schon $\mathfrak{A}_1$ auf a_1; es müßte also $\mathfrak{A}''$ mit $\mathfrak{A}_1$ zusammenfallen, wiederum gegen die Voraussetzung), was unmöglich ist, da in zwei conformen Punktreihen jedem Punkt der einen ein Punkt der anderen entsprechen muß. Ebenso überzeugt man sich, daß auf dem Strahl α_1 an A_1 kein zweiter Projectionspunkt, z. B. C liegen kann, weil sonst nach Lehrsatz 19. dem Strahl $(A_1 - C)$ an A_1 der Strahl $(B_1 - C)$ an B_1 entsprechen müßte, es ist aber $(A - C)$ mit α_1 identisch, und diesem entspricht an B_1 nur $(B_1 - A_1)$ nach V. a'); es muß aber auch der einzige Strahl an A_1 sein, von dem dieß gilt, wovon man sich ebenso wie bei den Punktreihen überzeugt. Man sieht also:

21. Lehrsatz. Auf **jedem** Projectionsstrahl, z. B. a_1,

21. Lehrsatz. An **jedem** Projectionspunkt, z. B. A_1,

giebt es **stets** einen, aber auch **nur einen** Punkt $\mathcal{A}_1$, durch den kein anderer Projectionsstrahl geht. Dieser Punkt $\mathcal{A}_1$ ist derjenige der Punktreihe auf a_1, welcher dem Durchschnittspunkte $(b_1 \cdot a_1)$, $(c \cdot a_1)$, $(d \cdot a_1)$.... der a_1 mit allen übrigen Strahlen in den bezüglich auf b_1, c, d.... entstandenen Punktreihen entspricht.

giebt es **stets** einen, aber auch **nur einen** Strahl α_1, auf dem kein anderer Projectionspunkt liegt. Dieser Strahl α_1 ist derjenige des Strahlbüschels an A_1, welcher der Verbindungsgeraden $(B_1 - A_1)$, $(C - A_1)$, $(D - A_1)$, des A_1 mit allen übrigen Punkten in den bezüglich an B_1, C, D.... entstandenen Strahlbüscheln entspricht.

Da nun der Forderung zufolge jeder der Projectionsstrahlen a_1, b_1, a_2, b_2, c, d, e.... die gesuchte Curve K′ berühren soll, ihre Aufeinanderfolge eine stetige, nirgends unterbrochene, und nirgends sprungweise sich ändernde ist, und es auf jedem stets einen einzigen Punkt $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}$, giebt, durch den kein anderer Strahl geht, so folgt, daß jeder dieser Punkte $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}$,.... der Berührungspunkt des Strahls a_1, b_1,.... mit der Curve sein muß, und daß es außer ihm keinen anderen giebt. Ebenso folgt, da es an jedem der Projectionspunkte A_1, B_1, A_2, B_2, C, D, E,...., die auf der gesuchten Curve k liegen, und stetig auf einander folgen, einen, und nur einen einzigen Strahl α_1, β_1, α_2, β_2, γ,.... giebt, auf dem kein anderer Punkt liegt, daß jeder dieser Strahlen α_1, β_1,.... die Berührungsgerade am Punkte A_1, B_1,.... der Curve sein muß, und daß es außer ihr keine andere giebt. Man erhält also den

22. Lehrsatz. Derjenige Punkt eines jeden Projectionsstrahls, z. B. der Punkt $\mathcal{A}_1$ auf a_1, welcher jedem Punkt $(b_1 \cdot a_1)$, $(c \cdot a_1)$, $(d \cdot a_1)$, $(e \cdot a_1)$.... in den Punktreihen auf den anderen Projectionsstrahlen b_1, c, d, e.... entspricht, ist der Punkt, in welchem a_1 die Curve K′ berührt.

22. Lehrsatz. Derjenige Strahl eines jeden Projectionspunkts, z. B. der Strahl α_1 an A_1, welcher jedem Strahle $(B_1 - A_1)$, $(C - A_1)$, $(D - A_1)$, $(E - A_1)$.... in den Strahlbüscheln an den anderen Projectionspunkten B_1, C, D, E,.... entspricht, ist der Strahl, welcher die Curve k in A_1 berührt.

Alles was bisher von den Projectionsstrahlen a_1, b_1, c,.... gesagt worden war, gilt natürlich auch von den ursprünglichen Geraden s, s′, denn, da auf jeden zwei Projectionsstrahlen, z. B. auf a_1, und b_1, die Punkte $(a_1 \cdot s)$ und $(b_1 \cdot s)$; $(a_1 \cdot s')$ und $(b_1 \cdot s')$ entsprechende sind, und sowohl auf a_1 und b_1, als s und s′ conforme Punktreihen liegen, so hätte man auch, indem man die entsprechenden Punkte der

conformen Punktreihen auf a_1 und b_1 durch Projectionsstrahlen verbunden hätte, und auf diesen wieder ebenso verfahren wäre, rückwärts auf die Punktreihen s und s' kommen können; was also von a_1, b_1 (als secundären Projectionsstrahlen, die durch die Punktreihen s, s' hervorgerufen sind) gilt, gilt auch von s und s' (da sie als secundäre durch die Punktreihen a_1, b_1 hervorgerufene Projectionsstrahlen angesehen werden können). Ebenso ist es mit S und S'. Da nun dem Punkt T auf s der Punkt $(s' \cdot s)$ auf s', dem Punkt P' auf s' der Punkt $(s \cdot s')$ auf s entspricht, so gilt von T auf s und von P' auf s' dasselbe wie von $\mathcal{A}_1$ auf a_1, von $\mathcal{B}_1$ auf b_1, etc. Da dem Strahl t an S der Strahl $(S'-S)$ an S', dem Strahl p' an S' der Strahl $(S-S')$ an S entspricht, so gilt von ihnen dasselbe, wie von α_1 an A_1, von β_1 an B_1, etc. Man hat sich also jetzt von dem im Anfange dieses Paragraphen als wahrscheinlich hingestellten Gesetze überzeugt:

23. Lehrsatz. Die Richtungen s, s' der ursprünglich gegebenen conformen Punktreihen sind Tangenten an die Curven K'; die Punkte T auf s und P' auf s' sind die Berührungspunkte.

23. Lehrsatz. Die Scheitel S, S' der ursprünglich gegebenen conformen Strahlbüschel sind Punkte auf den Curven k, die Strahlen t an S und p' an S' sind die Berührungsgeraden oder Tangenten.

Zugleich können wir vermöge der Sätze 22. und 23. nun sagen:

24. Lehrsatz. Auf jeder Tangente an eine der Curven K', z. B. auf s, s', a_1, a_2, b_1, b_2, c, d.... giebt es nur einen **einzigen** Berührungspunkt, nämlich T, P', $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$....

24. Lehrsatz. An jedem Punkte auf einer der Curven k, z. B. an S, S', A_1, A_2, B_1, B_2, C, D,.... giebt es nur eine **einzige** Berührungsgerade oder Tangente, nämlich t, p', α_1, α_2, β_1, β_2, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$,....

Nach Lehrsatz 2. und 3. können wir ferner jetzt sagen: Da in K' durch jeden Punkt eines Projectionsstrahls a_1, der nicht der Punkt $\mathcal{A}_1$ ist, noch ein Strahl gehen muß, weil $\mathcal{A}_1$ der einzige Punkt auf a_1 ist, durch den kein zweiter Strahl geht; und da auf jedem Strahl eines auf k_1 liegenden Projectionspunkts A, der nicht der Strahl α_1 ist, noch ein Punkt liegen muß, weil α_1 der einzige Strahl an A_1 ist, auf dem kein zweiter Punkt liegt:

25. Lehrsatz. Von einem Punkte der Ebene einer der Curven K' giebt es höchstens zwei Tangenten an dieselbe; geht aber durch einen Punkt Π_1, Π'_1, der nicht Berührungs-

25. Lehrsatz. Auf einer Geraden der Ebene einer der Curven k, giebt es höchstens zwei Curvenpunkte derselben; liegt aber auf einer Geraden π_1, die nicht

punkt ist, **eine** Tangente, so geht auch durch denselben Punkt allemal noch eine **zweite** Tangente.

Tangente ist, **ein** Curvenpunkt, so liegt auf derselben Geraden auch allemal noch ein **zweiter** Curvenpunkt.

Den ersten Theil dieses Satzes können wir nach § 10. Erklärung 5. auch so aussprechen:

26. Lehrsatz. Die Curven K' sind Curven zweiter Klasse.

26. Lehrsatz. Die Curven k sind Curven zweiter Ordnung.

Wir treten nunmehr an die Untersuchung unserer Curven einen Schritt näher heran. Es fragt sich zunächst, ob in der Curve K'_3 sämmtliche Projectionsstrahlen auch wieder, ebenso wie s und s' proportional getheilt werden, oder ob die Theilung auf ihnen nur im Allgemeinen eine conforme ist. Es ist leicht zu sehen, daß ersteres statt haben muß. Denn da die unendlich entfernten Punkte auf s und s' entsprechend sind, nach § 3. Lehrsatz 23., so liegt ein Projectionsstrahl, der p heiße, im Unendlichen. Nach Lehrsatz 20. aber bildet der Durchschnitt irgend eines Projectionsstrahls c mit einem Paar anderer, z. B. mit a_1 und b_1 ein Paar Punkte $(a_1 \cdot c)$, $(b_1 \cdot c)$, die in den auf a_1 und b_1 entstandenen Punktreihen sich entsprechen. Es muß also auch $(a_1 \cdot p)$ dem Punkte $(b_1 \cdot p)$ entsprechen. Da aber p im Unendlichen liegt, so sind also die unendlich entfernten Punkte der Punktreihen auf a_1 und b_1 entsprechende, d. h. a_1 und b_1 sind proportional getheilt, nach § 3. Lehrsatz 22. Ebenso jedes andere Paar Projectionsstrahlen a_1 und c, a_2 und b_1, a_2 und c, c und d, u. s. w. Es seien ferner Fig. 116. $S, b_1 a_1 p t \ldots$, $S', b'_1 a'_1 p' t' \ldots$ ein Paar die Curve k_5 erzeugende einstimmig verlaufende, gleiche Strahlbüschel, A_1, B_1 ein Paar Curvenpunkte, t und p' also nach Lehrsatz 23. die Tangenten an S und S', α_1 die Tangente an A_1, so ist nach Lehrsatz 19., Lehrsatz 21. und Lehrsatz 22., wenn man den Strahl $(A_1 - B_1)$ durch b bezeichnet, Strahlbüschel $A_1, b\alpha_1 a'_1 a_1 \;\overline{\wedge}\;$ Strahlbüschel $S, b_1 a_1 p t$. Nach der Voraussetzung ist aber $\angle a_1 b_1 = \angle a'_1 b'_1$ und, da in den Dreiecken $B_1 \mathfrak{N}_4 S$ und $A_1 \mathfrak{N}_4 S'$ auch $\angle B_1 \mathfrak{N}_4 S = \angle A_1 \mathfrak{N}_4 S'$ ist, so ist $\triangle B_1 \mathfrak{N}_4 S \sim \triangle A_1 \mathfrak{N}_4 S'$; es verhält sich also $B_1 \mathfrak{N}_4 : S\mathfrak{N}_4 = A_1 \mathfrak{N}_4 : S'\mathfrak{N}_4$; nach einem bekannten Satze der Planimetrie läßt sich also ein Kreis beschreiben, der durch S, S', A_1, B_1 geht. In diesem sind $\angle B_1 S'S$ und $\angle B_1 A_1 S$ Peripheriewinkel auf demselben Bogen (nämlich auf dem Bogen, dessen Sehne SB_1 ist), also ist $\angle B_1 A_1 S = \angle B_1 S'S$, oder $\angle a_1 b = \angle t'b'_1$. Es ist aber nach der Voraussetzung $\angle t'b'_1 = \angle tb_1$ (vergl. § 1. Erklärung 22.), also ist $\angle a_1 b = \angle tb_1$. Ferner ist $\angle SA_1S' = \angle SB_1S'$ (als Peripheriewinkel über SS'); es ist aber $\angle SB_1S' = 180^0 - \angle B_1S'S - \angle B_1SS'$ oder $\angle SB_1S' = 180^0 - \angle b'_1t' - \angle b_1p$; oder da $\angle b'_1t' = \angle b_1t$ ist, ist $\angle SB_1S' = 180^0$

$- \angle b_1 t - \angle b_1 p = \angle tp$; es ist also $\angle SA_1S' = \angle tp$ oder $\angle a_1a'_1 = \angle tp$. Wir haben also $\angle ba_1 = \angle b_1t$, $\angle a_1a'_1 = \angle tp$ also auch $\angle ba'_1 = \angle b_1p$. Da nun Strahlbüschel $A_1, b\alpha_1 a'_1 a_1 \overline{\wedge}$ Strahlbüschel $S, b_1 a_1 pt$ sein muß, und drei Paar entsprechende Strahlen gleiche Winkel bilden, so muß auch der vierte Strahl α_1 mit jedem Strahl des Büschels A_1, z. B. mit a'_1, einen Winkel bilden, der gleich ist dem Winkel, den der entsprechende vierte Strahl a_1 mit dem entsprechenden des Büschels S, z. B. mit p bildet. Es ist also Strahlbüschel $A_1, b\alpha_1 a' a_1$ nicht nur conform, sondern auch gleich dem Strahlbüschel $S, b_1 a_1 pt$. Ebenso ist $B_1, \beta_1 bb'_1 b_1$ nicht nur conform, sondern auch gleich dem Strahlbüschel $S, b_1 a_1 pt$, also auch Strahlbüschel $A_1, b\alpha_1 a'_1 a_1 =$ Strahlbüschel $B_1, \beta_1 bb'_1 b_1$ u. s. w. Es entstehen also stets zwei gleiche Strahlbüschel, wenn man irgend zwei Curvenpunkte mit vier anderen verbindet. Verlaufen die Strahlbüschel entgegengesetzt (man kann Fig. 117. benutzen, wo man sich nach Lehrsatz 4. unter $\angle mn$ und $\angle m'n'$ rechte Winkel vorstellen muß), so läßt sich dieß nicht so allgemein behaupten. Wohl aber giebt es in einer solchen Curve k_6 immer gleiche Strahlbüschel. Es sei A_1 ein Curvenpunkt, und von A_1 aus sei eine Gerade durch die Mitte O der Strecke SS' gezogen, und der auf ihm befindliche Curvenpunkt A_1 gesucht; m und m', n und n' seien die nach den beiden unendlich entfernten Punkten (s. Lehrsatz 4.) der Curve gerichteten Strahlen; es sei also $m' \parallel m$, $n' \parallel n$. Es ist also $\angle t'n' = \angle pn$ als Wechselwinkel an $n' \parallel n$, aber auch der Voraussetzung nach $\angle pn = \angle p'n'$, also $\angle t'n' = \angle p'n'$, also auch, da $\angle t'n' = \angle tn$ ist, $\angle tn = \angle p'n'$. Hieraus folgt, da $n' \parallel n$ ist, daß auch $p' \parallel t$ sein muß, daß also der Durchschnittspunkt T der Tangenten im Unendlichen liegt. Nach Lehrsatz 3. β) muß nun auf einer durch A_1 nach T gehenden Geraden, d. h. also auf einer durch A_1 zu t gezogenen Parallelen noch ein Punkt A_2, sowie auf einer durch A_1 zu p' parallel gezogenen Geraden noch ein Punkt A_2 liegen. Nach Lehrsatz 10. muß nun, wenn man daselbst A_2 für B_1, A_1 für B_2 schreibt, der Durchschnittspunkt von $(\mathrm{A}_1 - A_1)$ und $(A_2 - \mathrm{A}_2)$ auf $(S - S')$ liegen. Da nun $(A_1 - \mathrm{A}_1)$ die $(S - S')$ in O schneidet, so muß auch $(A_2 - \mathrm{A}_2)$ die $(S - S')$ in O schneiden. Ferner muß nach Lehrsatz 10. auch der Durchschnittspunkt von $(\mathrm{A}_1 - A_2)$ und $(\mathrm{A}_2 - A_1)$ auf $(S - S')$ liegen und zwar nach Lehrsatz 11. in einem solchen Punkt O', daß Punktreihe $(S - S')$, SOS'O' harmonisch ist. Da nun O in der Mitte von SS' schneidet, so muß O' in unendlicher Entfernung auf $(S - S')$ sich befinden; d. h. es muß $(\mathrm{A}_1 - A_2) \parallel (\mathrm{A}_2 - A_1)$ sein. Da nun auch $(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2) \parallel (A_1 - A_2) \parallel t \parallel p'$ ist, so ist Viereck $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2A_1A_2$ ein Parallelogramm, und O der Durchschnittspunkt der Diagonalen; also $OA_1 = O\mathrm{A}_1$; es wird also auch die Sehne A_1A_1 in O halbirt. In den Dreiecken $OS\mathrm{A}_1$ und $OS'A_1$ ist also $OS = OS'$, $O\mathrm{A}_1 = OA_1$, $\angle \mathrm{A}_1OS = \angle A_1OS'$, also $\triangle OS\mathrm{A}_1 \cong \triangle OS'A_1$, also $S\mathrm{A}_1 = S'A_1$, $\angle S\mathrm{A}_1O = \angle S'A_1O$, also $(S - \mathrm{A}_1) \parallel (S' - A_1)$ oder $a_1 \parallel a'_1$. Nun ist also auch $\triangle S\mathrm{A}_1S$

$\cong \triangle \mathrm{S}'A_1\mathrm{S}$, da $\mathrm{SS}' = \mathrm{S}'\mathrm{S}$, $\mathrm{SA}_1 = \mathrm{S}'A_1$, $\angle \mathrm{A}_1\mathrm{SS}' = \angle A_1\mathrm{S}'\mathrm{S}$ ist, also auch $\angle \mathrm{SS}'\mathrm{A}_1 = \angle \mathrm{S}'\mathrm{S}A_1$, folglich $\mathrm{a}'_1 \parallel a'_1$, also Viereck $\mathrm{SA}_1\mathrm{S}'A_1$ ein Parallelogramm und $\mathrm{S}A_1 = \mathrm{S}'\mathrm{A}_1$; zugleich ist auch Viereck $\mathrm{S}\mathfrak{s}\mathrm{S}'\mathfrak{s}'$ ein Parallelogramm und $\mathrm{S}\mathfrak{s} = \mathrm{S}'\mathfrak{s}'$ und in den Dreiecken $\mathrm{S}\mathfrak{s}\mathrm{A}_1$ und $\mathrm{S}'\mathfrak{s}'A_1$ ist $\mathrm{S}\mathfrak{s} = \mathrm{S}'\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}\mathrm{A}_1 = \mathfrak{s}'A_1$ $(= \mathrm{S}'\mathrm{A}_1 - \mathrm{S}'\mathfrak{s} = \mathrm{S}A_1 - \mathrm{S}\mathfrak{s}')$, $\mathrm{SA}_1 = \mathrm{S}'A_1$, also $\triangle \mathrm{S}\mathfrak{s}\mathrm{A}_1 \cong \triangle \mathrm{S}'\mathfrak{s}'A_1$, folglich $\angle \mathfrak{s}\mathrm{SA}_1 = \angle \mathfrak{s}'\mathrm{S}'A_1$, oder $\angle \mathrm{m}a_1 = \angle \mathrm{m}'\mathrm{a}'_1$; also da die Strahlbüschel S und S′ gleich sind, und daher $\angle \mathrm{m}'\mathrm{a}'_1 = \angle \mathrm{ma}_1$ ist, $\angle \mathrm{m}a_1 = \angle \mathrm{ma}_1$; und auch, da $\angle \mathrm{m}a_1 = \angle \mathrm{m}'a'_1$ ist, $\angle \mathrm{m}'a'_1 = \angle \mathrm{m}'\mathrm{a}'_1$. Zieht man nun durch A_1 und A_1 Strahlen nach den unendlich entfernten Punkten (s. Lehrsatz 18.), durch A_1 also $\mu \parallel \mathrm{m}$, $\nu \parallel \mathrm{n}$, durch A_1 $\mu' \parallel \mathrm{m}'$, $\nu' \parallel \mathrm{n}'$; so ist $\angle \mu\nu = \angle \mu'\nu'$ $(= \angle \mathrm{mn} = \angle \mathrm{m}'\mathrm{n}' = 90^0)$, $\angle \mu a_1 = \angle \mathrm{m}a_1 = \angle \mathrm{ma}_1 = \angle \mathrm{S}'\mathfrak{s}'A_1 = \angle \mu'\mathrm{a}_1$ (da $\mu' \parallel (\mathfrak{s}' - \mathrm{S}')$ ist); $\angle \mu'\mathrm{a}'_1 = \angle \mathrm{m}'\mathrm{a}'_1 = \angle \mathrm{m}'a'_1 = \angle \mathrm{S}\mathfrak{s}\mathrm{A}_1 = \angle \mu a'_1$ (da $\mu \parallel (\mathfrak{s} - \mathrm{S})$ ist). Es ist also $\angle \mu\nu = \angle \mu'\nu'$, $\angle \mu a_1 = \angle \mu'\mathrm{a}_1$, $\angle \mu a'_1 = \angle \mu'\mathrm{a}'_1$; also da $\angle \mu\nu = \angle \mu'\nu' = 90^0$ ist, auch $\angle \nu a_1 = \angle \nu'\mathrm{a}_1$, $\angle \nu a'_1 = \angle \nu'\mathrm{a}'_1$. Es ist also Strahlbüschel $\mathrm{A}_1, \mu a_1 \nu a'_1$ nicht nur conform, sondern auch gleich Strahlbüschel $A_1, \mu'\mathrm{a}_1\nu'\mathrm{a}'_1$. Es gehen aber die Strahlen μ und μ', ν und ν' nach den beiden unendlich entfernten Punkten der Curve, der Strahl a_1 von A_1 und a_1 von A_1 nach S, der Strahl a'_1 von A_1 und a'_1 von A_1 nach S′. Es bilden also die von A_1 und A_1 nach denselben vier Curvenpunkten gehenden Strahlen gleiche Winkel; zieht man also von A_1 nach irgend einem anderen Curvenpunkt einen Strahl und nach demselben Punkt auch von A_1 aus, so müssen auch die Winkel, die der Strahl an A_1 mit μ, a_1, ν, a'_1 macht, gleich sein dem Winkel, den der Strahl an A_1 bezüglich mit μ', a_1, ν', a'_1, macht. Es gilt dieß jedoch nur für Strahlbüschel, deren Scheitel, wie A_1 und A_1 auf einer durch die Mitte O von SS′ gehenden Geraden liegen, denn zu jedem Curvenpunkt A_1 kann man denjenigen finden, welcher der Scheitel eines gleichen Strahlbüschels ist, man braucht nur von ihm aus durch O zu ziehen und auf dieser Geraden den zweiten Curvenpunkt A_1 zu bestimmen. Gäbe es nun noch einen Punkt A'_1 in dem ein dem Strahlbüschel A_1 gleicher entstände, so müßte ebenso wie $\mathrm{t} \parallel \mathrm{p}'$ sein muß, die Tangente in A_1 parallel der in A_1 und A'_1 sein; was nur möglich wäre, wenn es in A_1 zwei Tangenten gäbe. Aber auch dieses ist unmöglich nach Lehrsatz 24. Man sieht also:

27. Lehrsatz. In der Curve K'_3 entsteht auf jedem Projectionsstrahl eine proportionale Punktreihe.

27. Lehrsatz. In der Curve k_5 entstehen an jeden zwei Curvenpunkten, wenn man von ihnen, als Scheiteln, nach beliebigen anderen Curvenpunkten Strahlen zieht, gleiche Strahlbüschel. In der Curve k_6 entstehen nur

an je zwei solchen Curvenpunkten, welche auf einer durch die Mitte O von SS′ gehenden Geraden liegen, und deren Verbindungs-Sehne selbst in diesem Punkte O halbirt wird, wenn man von ihnen, als Scheiteln nach beliebigen anderen Curvenpunkten Strahlen zieht, gleiche Strahlbüschel.

Nach Lehrsatz 23. und 24. sind in den Curven K_1', k_1 : $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, P′, T Curvenpunkte, $\mathcal{A}_1$ auf der Tangente a_1, $\mathcal{A}_2$ auf a_2, P′ auf s′, T auf s, α_1 die Tangente an A_1, α_2 die Tangente an A_1, s die Tangente an T, s′ die an P′, S der Curvenpunkt auf t, S′ der auf p′. Es lagen nun $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ auf einer durch (s · s′) gehenden Geraden (s. Fig. 107 a.) a, und es war Strahlbüschel (s · s′), $s a s' a'$ harmonisch nach Lehrsatz 15. und § 4. Lehrsatz 15. und Strahlbüschel $(a_1 \cdot a_2)$, $a_1 a' a_2 \tau$ harmonisch nach Lehrsatz 6. Es zeigte sich nun im Vorigen, daß die Punkte $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ gerade wegen dieser Beschaffenheit Berührungspunkte sein müssen, und daß es auf a_1 und a_2 keinen anderen Berührungspunkt geben kann. Es ist daher diese Lage eine nothwendige für die Berührungspunkte $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, indem nach dem Vorigen jedenfalls diejenigen Punkte $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ auf a_1 und a_2, die auf einer durch (s · s′) gehenden Geraden a liegen, welche letztere der dem a' zugeordnete harmonische ist, Berührungspunkte sind, und man, wenn man annehmen wollte, daß auf a_1 und a_2 je noch ein anderer Punkt der Berührungspunkt sei, in Widerspruch mit Lehrsatz 24. geriethe. Ebenso ist für die Tangenten α_1 und α_2 (s. Fig. 107 b.) die Eigenschaft nothwendig, daß sie sich auf (S−S′) in dem dem Punkt A′ zugeordneten harmonischen der Punktreihe (S−S′), SAS′A′ schneiden. Man sieht also:

28. Lehrsatz. Ist τ die Verbindungsgerade zweier Punkte T, P′ einer der Curven K′, und sind a_1, a_2 zwei in einem Punkte $(a_1 \cdot a_2)$ von τ sich schneidende Tangenten derselben, so liegen die Berührungspunkte $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ von a_1, a_2 auf einer Geraden a, welche durch den Durchschnittspunkt (s · s′) der an T und P′ gelegten Tangenten s und s′ geht.

28. Lehrsatz. Ist T der Durchschnittspunkt zweier Tangenten t, p′, einer der Curven k, und sind A_1, A_2, zwei auf einer durch T gehenden Geraden liegende Punkte derselben, so gehen die Tangenten α_1, α_2 von A_1, A_2 aus, durch einen Punkt A, welcher auf der Verbindungsgeraden (S−S′) der auf t und p′ liegenden Curvenpunkte S und S′ liegt.

Zugleich ist, wenn die Verbindungsgerade $[(s \cdot s') - (a_1 \cdot a_2)]$ durch α' bezeichnet wird, Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $s \alpha s' \alpha'$ und Strahlbüschel $(a_1 \cdot a_2)$, $a_1 \alpha' a_2 \tau$ harmonisch. Fig. 107a.

Zugleich ist, wenn der Durchschnittspunkt $[(S - S') \cdot (A_1 - A_2)]$ durch A' bezeichnet wird, Punktreihe $(S - S')$, $SAS'A'$ und Punktreihe $(A_1 - A_2)$, $A_1 A' A_2 T$ harmonisch. Fig. 107b.

Um nun etwas weiteres über unsere Curven zu erfahren, untersuchen wir, ob die Curven K' etwa einen unendlich entfernten Punkt, und ob die Curven k vielleicht eine unendlich entfernte Tangente haben, so wie wir früher uns darüber vergewissert hatten, ob erstere eine unendlich entfernte Tangente, und letztere einen unendlich entfernten Punkt haben. Zunächst ist klar, daß keine unserer Curven K' mehr als zwei unendlich entfernte Punkte haben kann. Denn sind, Fig. 118a., bei einstimmig verlaufenden Punktreihen s und s' die Geraden a und b Tangenten an unendlich entfernten Punkten, so muß nach Lehrsatz 18. und 21. Punktreihe $a, AMR \infty A' \overline{\wedge}\, b, B \infty NMB'$ sein. Ist nun c noch ein Projectionsstrahl, und suchen wir den auf ihm liegenden Curvenpunkt $\mathfrak{S}$, so muß nach denselben Lehrsätzen sein: Punktreihe $a, AMR \infty A' \overline{\wedge}\, c, CN\mathfrak{S}RC'$. Es muß also $\mathfrak{S}$ zwischen N und R liegen, kann also nicht im Unendlichen sich befinden. Ein Gleiches gilt von jedem ferneren Projectionsstrahl. Nur das wäre auf den ersten Anblick möglich, daß ein unendlich entfernter Punkt auf einem durch $(a \cdot b)$ oder M gehenden Strahl läge. Allein auch dieß ist nicht möglich, weil nach Lehrsatz 2. in keinem Punkt der Ebene sich mehr als zwei Projectionsstrahlen schneiden können. Ebenso muß, wenn bei entgegengesetzt verlaufenden Punktreihen Fig. 118b. auf a und b ein unendlich entfernter Punkt liegt, Punktreihe $a, ARMA' \infty \overline{\wedge}\, b, BN \infty B'M$ sein, und der Berührungspunkt $\mathfrak{S}$ eines ferneren Strahls c bestimmt sich ebenfalls aus der Conformitätsgleichung: Punktreihe $a, ARMA' \infty \overline{\wedge}\, c, C\mathfrak{S}NC'R$. Es muß also $\mathfrak{S}$ zwischen C und N sich befinden und kann daher nicht im Unendlichen liegen; auch kann hier kein dritter Strahl durch $(a \cdot b)$ oder M gehen. Es können also die Curven K' höchstens zwei unendlich entfernte Punkte haben. Um das Genauere, und zwar zunächst bei der Curve K'_1, die von einstimmig verlaufenden Punktreihen erzeugt wird, zu entscheiden, ziehen wir die Projectionsstrahlen o, q', Fig. 119a., die nach den unendlich entfernten Punkten der Punktreihen auf s' und s gerichtet sind, und daher die s, s' in den Gegenpunkten, bezüglich O, Q', schneiden, und zwar seien ein Paar solcher Projectionsstrahlen s und s' gewählt, daß weder der Gegenpunkt O der auf s liegenden, noch der Gegenpunkt Q' der auf s' liegenden Punktreihe mit dem Punkte $(s \cdot s')$ oder P oder T' zusammenfällt; auch liege weder auf s noch auf s' ein unendlich entfernter Curvenpunkt, und es sei s' nicht parallel s. Ist nun X auf s, X' auf s' ein Paar derartiger entsprechender Punkte, daß der sie verbin-

dende Projectionsstrahl x die Curve in einem unendlich entfernten Punkte berührt, so muß, wenn man den Durchschnitt von x mit q′ durch Z bezeichnet, nach Lehrsatz 19. Punktreihe $x,\infty ZXX' \overline{\wedge}$ Punktreihe $s, X\infty TP$ sein; es muß sich also verhalten:

$$\frac{\infty Z}{XZ} : \frac{\infty X'}{XX'} = \frac{X\infty}{T\infty} : \frac{XP}{TP},$$

woraus folgt:

$$\frac{XX'}{XZ} = \frac{PT}{PX}.$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke T′X′X und Q′X′Z verhält sich aber

$$\frac{XX'}{XZ} = \frac{T'X'}{T'Q'}.$$

Wir haben also die Gleichung:

$$\frac{T'X'}{T'Q'} = \frac{PT}{PX},$$

woraus folgt:

$$\frac{X'Q'}{T'Q'} = \frac{TX}{PX}.$$

Da nun O und Q′ die Gegenpunkte der conformen Punktreihen auf s und s′ sind, so muß, wenn G und G′ diejenigen entsprechenden Punkte derselben sind, die gleichweit von O und Q′ abstehen, nach § 2. Lehrsatz 17. und § 3. Lehrsatz 9. sein

$$OX \cdot Q'X' = OT \cdot Q'T' = \overline{OG}^2 = \overline{Q'G}^2,$$

also

$$X'Q' = \frac{\overline{OG}^2}{OX}.$$

Setzt man diesen Werth in die letzte Gleichung ein, so nimmt sie die Gestalt an:

$$\frac{\overline{OG}^2}{T'Q' \cdot OX} = \frac{XT}{XP};$$

oder da $\frac{\overline{OG}^2}{T'Q'} = OT$ ist:

$$\frac{OT}{OX} = \frac{XT}{XP};$$

oder:

$$\frac{OT}{OX} = \frac{OT - OX}{OP - OX};$$

woraus folgt:

$$OX = OT \pm \sqrt{OT \cdot (OT - OP)}.$$

Dieß ist also der Ausdruck für die Entfernung des Durchschnittspunkts X, den derjenige Projectionsstrahl mit s bildet, welcher die Curve K'_1 in einem unendlich entfernten Punkt berührt. Man sieht daher auch auf arithmetischem Wege, daß es im Allgemeinen zwei und nicht mehr Werthe für OX giebt, daß es also im Allgemeinen zwei Projectionsstrahlen x giebt, welche die Curve in unendlich entfernten Punkten berühren, und daß diese beiden Projectionsstrahlen die s in gleicher Entfernung auf beiden Seiten vom Punkt T, nämlich in der

Entfernung $\sqrt{OT(OT-OP)}$ schneiden. Dieß findet jedoch nur statt, wenn $OT > OP$ ist, so lange also $(s \cdot s')$ zwischen O und T liegt. Die beiden dann die Curve in unendlich entfernten Punkten berührenden Projectionsstrahlen, die mit x und x′ bezeichnet werden mögen, heißen dann Asymptoten der Curve. Da nach Lehrsatz 19. die den Berührungspunkten zweier Projectionsstrahlen entsprechenden Punkte in ihrem Durchschnittspunkte liegen (z. B. auf den Projectionsstrahlen a_1, b_1 entsprach dem Berührungspunkt $\mathfrak{A}_1$ auf a_1 der Punkt $(b_1 \cdot a_1)$ auf b_1, und dem Berührungspunkt $\mathfrak{B}_1$ auf b_1 der Punkt $(a_1 \cdot b_1)$ auf a_1), die Berührungspunkte aber hier im Unendlichen liegen, so folgt, daß dann im Durchschnittspunkte $(x \cdot x')$ von x und x′ die Gegenpunkte der auf x und x′ entstehenden conformen Punktreihen vereinigt sein müssen. Ist aber $OT < OP$, so wird der Ausdruck für den Werth von OX imaginär und es giebt daher in diesem Falle keinen Projectionsstrahl, dessen Berührungspunkt unendlich entfernt wäre; die Curve hat also dann keinen unendlich entfernten Punkt.

Dagegen kann, wie es scheint, der Fall eintreten, daß sie nur einen einzigen unendlich entfernten Punkt besitzt, wenn nämlich der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen den Werth 0 erhält. Indessen, dieß ist nur scheinbar. Denn damit der Radicand $OT(OT-OP) = 0$ werde, müßte entweder 1) $OT = 0$ sein; dann müßte in $(s \cdot s')$ der dem Punkt O entsprechende O′ statt T′ mit P zusammenfallen; O′ ist aber, da O der Gegenpunkt der Punktreihe auf s ist, der unendlich entfernte Punkt der Reihe auf s′. Es müßte also dann s die s′ im unendlich entfernten Punkte schneiden, d. h. mit ihr parallel sein, gegen die Voraussetzung. Dieser Fall soll hernach noch besonders betrachtet werden. Hier mag nur noch erwähnt werden, daß dann also auch P mit O′ (dem früheren T′) vereinigt, in das Unendliche rückt, also der unendlich entfernte Punkt der Reihe auf s, oder der dem Gegenpunkt Q′ der Reihe s′ entsprechende Punkt Q wird. Es wird aber der Radicand $OT(OT-OP) = 0$, wenn 2) $OT = OP$ ist. Dieß würde geschehen, wenn α) O in die Mitte der endlichen Strecke PT fallen könnte; allein dieß ist unmöglich, weil dann O′ zwischen P′ und T′ liegen müßte, während doch dieser Punkt, da O der Gegenpunkt ist, im Unendlichen sich befinden muß. Es könnte dieß demnach nur eintreten, wenn einer der beiden Punkte P′ oder T′ selbst im Unendlichen läge, dann hätte man aber wieder den Fall, daß s′ parallel s wäre. Es bleibt daher nur noch übrig, daß, wenn $OT = OP$ sein soll, β) O in das Unendliche rückt. Da aber O der Gegenpunkt der Reihe s ist, so liegt der ihm entsprechende Punkt auf s′ im Unendlichen, und da dieß auch mit O der Fall wäre, so wären also die unendlich entfernten Punkte der Reihen s und s′ entsprechend, mithin die Reihen selbst proportional nach § 3. Lehrsatz 22., gegen die Voraussetzung. Man sieht also, daß, wenn die Punktreihen s und s′ der über sie gemachten Voraussetzung gemäß beschaffen sind, auf keine Weise die Curve nur einen einzigen unendlich entfernten Punkt haben kann, sondern

daß sie deren entweder keinen oder zwei besitzen muß. Es fragt sich nun, wie der Beweis sich gestaltet, wenn s und s′ so beschaffen sind, daß der oben aufgestellte Beweis nicht anwendbar ist. Es sei nun

a) im Durchschnittspunkte (s · s′) der Gegenpunkt einer der beiden Reihen, z. B. der Gegenpunkt O der Reihe s gelegen, so tritt also O an die Stelle des früheren P, also O′ an die des P′; O′ ist aber der unendlich entfernte Punkt der Reihe s′. Es liegt also dann ein unendlich entfernter Punkt der Curve auf s′ selbst. Da aber die Curve, wie oben gezeigt wurde, höchstens zwei Punkte im Unendlichen haben kann, so folgt, daß es nothwendig irgend einen andern Projectionsstrahl geben muß, auf dem keiner dieser beiden Punkte liegt. Einer der unendlich vielen Strahlen (denn nur auf einem einzigen könnte noch, außer auf s′ der zweite unendlich entfernte Punkt sich befinden) heiße nun c, so gelten von s und c dieselben Voraussetzungen, wie früher von s und s′. Man sieht also auch dann, daß es jedenfalls noch einen unendlich entfernten Punkt geben muß, indem man beim Auflösen der Gleichung wie oben zwei Werthe für die Unbekannte (das frühere OX) erhält, deren einer die Entfernung des Punkts (s · s′) von (s · c) sein muß, außer welchem also nothwendig noch ein anderer existiren muß, da im Durchschnittspunkt (s · c) keiner der Gegenpunkte der Reihen s oder c liegen kann. Es seien

b) im Durchschnittspunkt (s · s′) die beiden Gegenpunkte O, Q′, der Reihen auf s und s′ vereinigt, so gehen die Berührungspunkte T, P′, in Q, O′, also in die unendlich entfernten Punkte der Reihen s und s′ über. Es liegen also dann die beiden möglicher Weise vorkommenden unendlich entfernten Punkte auf s und s′; und weiter sind keine möglich. Sind die beiden Punktreihen s und s′

c) parallel, so rückt der Durchschnittspunkt (s · s′) in das Unendliche und der Unterschied, der in Erklärung 1. zwischen einstimmig und entgegengesetzt verlaufenden Punktreihen gemacht wurde, wird jetzt unbestimmt, indem der Drehungspunkt in unendliche Ferne rückt. Da dann die früheren Punkte P und T′ zusammen im Unendlichen liegen, also in die Punkte Q und O′ übergehen, so müssen die ihnen entsprechenden O und Q′, also die Gegenpunkte auf s und s′ Berührungspunkte der Curve sein. Verläuft nun, Fig. 120 a., die Punktreihe s,OA ∞ CB von links nach rechts, die entsprechende s′, ∞A′Q′CB′ von rechts nach links, so kann offenbar kein Projectionsstrahl die Verbindungsgerade (O − Q′), d. h. die frühere (T − P′) auf der endlichen Strecke OQ′ schneiden. Es sind daher diese Punktreihen als ein specieller Fall von einstimmig verlaufenden im Sinne von Erklärung 1. anzusehen. Und in der That, ist a ein beliebiger Projectionsstrahl, so muß nach Lehrsatz 19. und 22., wenn der Berührungspunkt auf a durch 𝔄 bezeichnet wird, sein: Punktreihe s,OA ∞ C $\overline{\wedge}$ a,A𝔄A′R. Es muß

also der Berührungspunkt $\mathfrak{A}$ auf der endlichen Strecke AA′ sich befinden; ebenso der Berührungspunkt $\mathfrak{B}$ des Strahls b auf BB′, u. s. w.; es kann demnach dann die Curve keinen unendlich entfernten Punkt besitzen. Verlaufen aber die Punktreihen auf s und s′ nach derselben Seite Fig. 120 b., so überzeugt man sich zunächst, daß hier kein Projectionsstrahl die (O—Q′) auf der Strecke O∞Q′ schneiden kann, und daher für diesen Fall dasselbe wie für entgegengesetzt verlaufende im Sinne von Erklärung 1. gilt, daß es also möglicher Weise nur zwei unendlich entfernte Punkte geben kann. Um nun einen solchen Strahl x, der die Curve in einem unendlich entfernten Punkte berührt, kennen zu lernen, bedenken wir, daß dann die Beziehung statt haben muß, nach Lehrsatz 19. und 22.: Punktreihe s,OXA∞ $\overline{\wedge}$ x,X∞YX′, wenn Y den Durchschnittspunkt von x mit irgend einem Projectionsstrahl a bezeichnet. Es muß also sein:

$$\frac{OX}{AX} : \frac{O\infty}{A\infty} = \frac{X\infty}{Y\infty} : \frac{XX'}{YX'},$$

oder:
$$\frac{OX}{AX} = \frac{YX'}{XX'}.$$

Es verhält sich aber dann auch $\frac{YX'}{XX'} = \frac{A'X'}{AX - A'X'}$.

Also muß sein:
$$\frac{OX}{AX} = \frac{A'X'}{AX - A'X'};$$

folglich
$$\frac{OX}{OA} = \frac{A'X'}{AX}.$$

Da aber O und Q′ Gegenpunkte sind, so ist nach § 2. Lehrsatz 17. und § 3. Lehrsatz 9.

$$OX \cdot Q'X' = OA \cdot Q'A',$$

oder:
$$(OA - AX)(Q'A' + A'X') = OA \cdot Q'A'$$

oder:
$$OA \cdot Q'A' - AX \cdot Q'A' + A'X' \cdot OA - AX \cdot A'X' = OA \cdot Q'A';$$

folglich
$$A'X' \cdot (OA - AX) = AX \cdot Q'A';$$

oder:
$$A'X' \cdot OX = AX \cdot Q'A';$$

also:
$$\frac{A'X'}{AX} = \frac{Q'A'}{OX}.$$

Es muß also sein
$$\frac{OX}{OA} = \frac{Q'A'}{OX};$$

daher
$$OX^2 = OA \cdot Q'A'.$$

Es ist aber, wenn G und H dieselbe Bedeutung haben, wie in § 3. Lehrsatz 9.:
$$OA \cdot Q'A' = OG^2 = OH^2;$$

also muß sein $OX = OG$; oder $OX = OH$.

Es giebt also auf zwei Projectionsstrahlen unendlich entfernte Punkte, und dieß sind die Projectionsstrahlen (G—G′) und (H—H′), wenn G und H dieselbe Bedeutung haben, wie in § 3. Lehrsatz 9.

Man sieht also aus dem Bisherigen, daß die Curve K'_1 stets entweder keinen oder zwei unendlich entfernte Punkte besitzt, und daß sie nie deren bloß Einen haben kann.

Gehen wir nun über zur Betrachtung der Curve K'_3, so wissen wir, daß sie jedenfalls einen unendlich entfernten Punkt hat, nämlich denjenigen, in welchem ihre unendlich entfernte Tangente (s. Lehrsatz 4.) sie berührt. Nach Lehrsatz 27. sind nun alle Projectionsstrahlen proportional getheilt, und ihre Gegenpunkte liegen daher sämmtlich im Unendlichen. Berührte nun ein Strahl x (man denke sich in Fig. 119. a. die Gegenpunkte O und Q' im Unendlichen) die Curve in einem unendlich entfernten Punkte, so müßte sein: Punktreihe $x, UXX'\infty \;\overline{\wedge}\; s, YTPX$. Da aber sämmtliche Punktreihen proportional getheilt sind, so muß auch sein $x, UXX'\infty \;\overline{\wedge}\; s, YTP\infty$, also $s, YTPX \;\overline{\wedge}\; s, YTP\infty$. Es müßte also X in ∞ liegen, oder, ein Projectionsstrahl, der die Curve K'_3 in einem unendlich entfernten Punkte berührt, müßte den Strahl s in unendlicher Ferne schneiden; ebenso müßte er auch die s' im unendlich entfernten Punkte schneiden; es muß also x mit der unendlich entfernten Tangente der Curve K'_3 zusammenfallen.

Es kann also die Curve K'_3 nur einen einzigen unendlich entfernten Punkt haben, nämlich den Berührungspunkt der unendlich entfernten Tangente.

Daß die Curve K'_2 höchstens zwei unendlich entfernte Punkte haben kann, ist schon oben Seite 295. auf geometrischem Wege bewiesen worden. Es ist daher auch hier keine Beschränkung, wenn wir zwei Punktreihen s und s', Fig. 119. b., annehmen, in deren Durchschnittspunkt $(s \cdot s')$ keiner der Gegenpunkte O oder Q' liegt. Ist nun x ein Strahl, der die Curve K'_2 in einem unendlich entfernten Punkt berührt, so muß sein Punktreihe $x, \infty XX'Y \;\overline{\wedge}\; s, XTP\infty$ oder:

$$\frac{\infty X}{X'X} : \frac{\infty Y}{X'Y} = \frac{XT}{PT} : \frac{X\infty}{P\infty};$$

also:
$$\frac{X'Y}{X'X} = \frac{XT}{PT}.$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke Q'YX' und PXX' verhält sich aber auch:

$$\frac{X'Y}{X'X} = \frac{Q'X'}{PX'};$$

also ist auch
$$\frac{XT}{PT} = \frac{Q'X'}{PX'};$$

oder:
$$\frac{XT}{PT} = \frac{Q'X'}{T'X'};$$

folglich
$$TX \cdot T'X' = PT \cdot Q'X';$$

oder:
$$(OX - OT)(Q'T' - Q'X') = (OP + OT)\,Q'X';$$

also
$$OX \cdot Q'T' - OT \cdot Q'T' - OX \cdot Q'X' + OT \cdot Q'X' = OP \cdot Q'X' + OT \cdot Q'X';$$

oder:
$$OX \cdot Q'T' - OT \cdot Q'T' - OX \cdot Q'X' = OP \cdot Q'X'.$$

Nun ist, da O und Q′ die Gegenpunkte sind:

$$OT \cdot Q'T' = OX \cdot Q'X' = OG^2,$$

also

$$Q'X' = \frac{OG^2}{OX};$$

folglich

$$OX \cdot Q'T' - 2OG^2 = \frac{OP \cdot OG^2}{OX};$$

oder:

$$OX^2 \cdot Q'T' - 2 \cdot OG^2 \cdot OX = OP \cdot OG^2;$$

oder:

$$OX^2 - 2\frac{OG^2}{Q'T'} \cdot OX = OP \cdot \frac{OG^2}{Q'T'},$$

oder, da $\frac{OG^2}{Q'T'} = OT$ ist:

$$OX^2 - 2OT \cdot OX = OP \cdot OT;$$

also:

$$OX = OT \pm \sqrt{OT(OT + OP)}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen kann nun nie negativ, also der Werth für OX nie imaginär werden. Auch kann der Radicand sich nie annulliren, so lange OT von 0 verschieden ist. Ist aber $OT = 0$, so findet sich durch dasselbe Räsonnement, wie bei der Curve K'_1, daß dann s parallel s′ sein müßte, und man hätte dann den für sich besonders an Fig. 120 a. und 120. b. betrachteten Fall wieder, der hier ausgeschlossen sein soll.

Man überzeugt sich also, daß die Curve K'_2 stets zwei unendlich entfernte Punkte besitzt.

Wir gehen jetzt über zu der Untersuchung, ob eine der Curven k eine oder mehrere unendlich entfernte Tangenten habe. Zunächst ist klar, daß die Linien k_1 und k_5, da sie keinen Punkt im Unendlichen haben, auch keine unendlich entfernte Tangente besitzen können; es kann also hier nur die Rede sein von k_2, k_3, k_4. Was nun die Curve k_2 angeht, so ist sogleich einleuchtend, daß, wenn sie eine unendlich entfernte Tangente haben soll, dieß nur die Tangente an einem der beiden unendlich entfernten Punkte sein könnte. Es mögen jetzt die unendlich entfernten Curvenpunkte mit M_1, N_1 bezeichnet werden. Auf einer von T, Fig. 121. (vgl. auch Fig. 112.) nach M_1 gezogenen Graden, also auf einer durch T zu m oder m′ parallel gezogenen Geraden liegt nun nach Lehrsatz 3. jedenfalls ein zweiter Curvenpunkt M_2, ebenso auf einer durch T zu n oder n′ parallel gezogenen Geraden ein zweiter Punkt N_2. Denken wir uns in Fig. 105. b. m statt a_1, n statt b_1, m_2 statt a_2, n_2 statt b_2 gesetzt, so folgt nach Lehrsatz 12., daß die Punkte $\mathfrak{N}_4$, N_1, M_3, $\mathfrak{M}_6$ auf einer durch T gehenden Geraden liegen müssen. Da nun $m \parallel m'$, $n \parallel n'$ ist, so ist das Viereck $S\mathfrak{N}_4S'N_1$ ein Parallelogramm, in welchem sich also die Diagonalen halbiren. Es muß demnach $(N_1 - \mathfrak{N}_4)$ durch den Mittelpunkt der Strecke SS′ gehen, und auf dieser Diagonale muß sich also auch T befinden. Da nun auf derselben der Strahl m_2 von n'_2 geschnitten wird, so kann er nicht auch von m'_2 auf $(N_1 - \mathfrak{N}_4)$ getroffen werden,

es kann also M_2 nicht auf $(N_1 - \mathfrak{N}_4)$ liegen; ebenso wenig kann N_2 auf ihr liegen. Es schneidet demnach die von T nach dem unendlich entfernten Punkt M_1 gezogene Gerade $(M_2 - M_1)$ sowohl, als die von T nach N_1 gezogene Gerade $(N_2 - N_1)$ die Strecke SS′ in einem von dem Mittelpunkt Γ′ verschiedenen Punkt A′, B′. Nach Lehrsatz 27. muß nun die Tangente an M_1 und N_1 die (S − S′) in einem solchen Punkt A, B treffen, daß Punktreihe (S − S′), SA′S′A und (S − S′) SB′S′B harmonisch ist. Da nun weder A′ noch B′ die Strecke SS′ halbiren kann, so folgt, daß A und B nicht in unendlicher Entfernung auf (S − S′) liegen können. Es muß demnach die Tangente sowohl an den unendlich entfernten Punkt M_1 als an N_1 die (S − S′) in einem bestimmten, im Endlichen gelegenen Punkt schneiden; keine von beiden kann daher in unendlicher Entfernung sich befinden.

Um in der Curve k_3, Fig. 115. die unendlich entfernten Punkte zu erhalten, haben wir nur einen der Punkte A′, B′, in das Unendliche zu versetzen. Nach Lehrsatz 28. aber muß dann der Durchschnittspunkt A, B der Tangente mit (S − S′) in einen solchen Punkt rücken, daß Punktreihe (S − S′), SA′SA harmonisch ist. Da nun A′ im Unendlichen liegt, muß A in den Mittelpunkt der Strecke SS′ rücken. Versetzen wir ebenso den Durchschnittspunkt von $(A_1 - A_2)$ mit (S − S′) nach links in das Unendliche, so erhalten wir gleichfalls den Mittelpunkt von SS′ als Durchschnittspunkt der an den zweiten unendlich entfernten Punkt der Curve gelegten Tangente. Es kann also auch k_3 keine unendlich ferne Tangente haben. Auf ganz gleiche Weise überzeugt man sich, daß dasselbe bei der Curve k_6 statt hat.

Es bleibt nun noch die Curve k_4 zu betrachten übrig. Es sei also die Curve k_4 von zwei Strahlbüscheln S und S′, Fig. 122., erzeugt; die Tangenten an S und S′ schneiden sich in T; g, g′ seien die entsprechenden nach dem unendlich entfernten Punkt der Curve gerichteten Strahlen. Nach Lehrsatz 4. ist hier g ∥ g′ (s. § 3. Lehrsatz 9.). Offenbar liegt nun auf einem durch S senkrecht auf g gezogenen Strahl ein Curvenpunkt $\mathfrak{s}'$; und wir können uns nach Lehrsatz 19. auch die Strahlbüschel S und $\mathfrak{s}'$ als die erzeugenden vorstellen. Der von $\mathfrak{s}'$ nach dem unendlich entfernten Punkt gerichtete, also mit g und g′ parallel laufende Strahl $\mathfrak{g}'$ muß dann [ebenso wie g′ im Büschel S′ die Beschaffenheit haben mußte, daß, wenn die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel in den Büscheln S und S′ bezüglich mit a, b; a′, b′, bezeichnet werden, ∠ ag = ∠ b′g′; ∠ bg = ∠ a′g′ ist, (s. §. 3. Lehrsatz 9.) wo man sich a und b statt s und t gesetzt denke] so beschaffen sein, daß, wenn die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel in den conformen Strahlbüscheln S und $\mathfrak{s}'$ bezüglich mit α, β; α′, β′, bezeichnet werden, ∠ αg = ∠ β′$\mathfrak{g}'$, ∠ βg = ∠ α′$\mathfrak{g}'$ ist. Der dem Strahl (S − S′) oder $\mathfrak{p}$ entsprechende heiße $\mathfrak{p}'$, der dem Strahl t an S entsprechende heiße $\mathfrak{t}'$; so ist also t die Tangente an S, $\mathfrak{p}'$ die Tangente an $\mathfrak{s}'$. Ihr Durchschnittspunkt $(t \cdot \mathfrak{p}')$ heiße T (so wie früher $(t \cdot p')$ mit T bezeichnet ward). Es ist also Strahlbüschel $\mathfrak{s}', \alpha' \mathfrak{g}' \beta' \mathfrak{p}' \mathfrak{t}'$

$\overline{\wedge}\ S,\alpha g\beta p t$; und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind Curvenpunkte. Nach Lehrsatz 12. geht nun die Gerade $[(\alpha\cdot\beta')-(\alpha'\cdot\beta)]$ oder $(N_1-\mathfrak{N}_4)$ durch T. Da nun $\angle\alpha'\mathfrak{g}'=\angle\beta g$, und $(S-\mathfrak{S}')$ senkrecht auf g und $\mathfrak{g}'$ ist, folgt, daß $\angle\alpha'\mathfrak{t}'=\angle\beta p$ ist; und da $\angle\alpha\beta=\angle\alpha'\beta'\ (=90^0)$ ist, daß auch $\angle\beta'\mathfrak{t}'=\angle\alpha p$ ist. Da nun im Viereck $S\mathfrak{N}_4\mathfrak{S}'N_1$ die Winkel $N_1S\mathfrak{N}_4$ und $N_1\mathfrak{S}'\mathfrak{N}_4$ rechte sind, so läßt sich um dasselbe ein Kreis beschreiben, dessen Centrum in der Mitte von $N_1\mathfrak{N}_4$ liegt, und es ist dann $\angle N_1\mathfrak{N}_4\mathfrak{S}'=\angle N_1S\mathfrak{S}'$ oder $=\angle\alpha p$, als Peripheriewinkel; ebenso ist $\angle N_1\mathfrak{N}_4S=\angle N_1\mathfrak{S}'S$ oder $=\angle\beta'\mathfrak{t}'$; da nun $\angle\beta'\mathfrak{t}'=\angle\alpha p$ war, so ist $\angle N_1\mathfrak{N}_4\mathfrak{S}'=\angle N_1\mathfrak{N}_4S$, also ist $\triangle\mathfrak{S}'\mathfrak{N}_4\Gamma'\cong\triangle S\mathfrak{N}_4\Gamma'$, wenn Γ' der Durchschnittspunkt von $(N_1-\mathfrak{N}_4)$ mit $(S-\mathfrak{S}')$ ist; es halbirt also $(N_1-\mathfrak{N}_4)$ die Strecke $S\mathfrak{S}'$ und steht auf ihr senkrecht. Da nun auch g und $\mathfrak{g}'$ senkrecht auf $S\mathfrak{S}'$ stehen, so ist also $(N_1-\mathfrak{N}_4)$ parallel zu g und $\mathfrak{g}'$ und daher nach dem unendlich entfernten Curvenpunkt gerichtet, der G_1 heißen mag. Nach Lehrsatz 28. muß nun die Tangente in G_1 die $(S-\mathfrak{S}')$ in einem solchen Punkt Γ schneiden, daß Punktreihe $(S-\mathfrak{S}')$, $S\Gamma'\mathfrak{S}'\Gamma$ harmonisch ist, es muß also, weil Γ' in der Mitte von $S\mathfrak{S}'$ liegt, Γ in unendlicher Ferne sich befinden. Es hat also die Tangente an G_1 zwei unendlich entfernte Punkte, den Berührungspunkt G_1 und den Durchschnittspunkt Γ mit $(S-\mathfrak{S}')$, sie liegt also ganz im Unendlichen. Eine zweite unendlich entfernte Tangente kann es nicht geben, da alle übrigen die Curve in einem endlichen Punkte berühren müssen.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so ergiebt sich das dem Lehrsatz 4. analoge Gesetz:

29. **Lehrsatz.** Die Curve K'_1 hat entweder keinen oder zwei unendlich entfernte Punkte.

Die Curve K'_2 hat stets zwei unendlich entfernte Punkte.

Die Curve K'_3 hat stets nur einen unendlich entfernten Punkt, nämlich den Berührungspunkt der unendlich entfernten Tangente.

Die von zwei parallelen Punktreihen erzeugte Curve, hat, wenn dieselben beide von links nach rechts, oder beide von rechts nach links verlaufen, stets zwei unendlich entfernte Punkte, nämlich die Berührungs-

29. **Lehrsatz.** Die Curven k_1, k_2, k_3, k_5, k_6 haben keine unendlich entfernte Tangente.

Die Curve k_4 hat eine unendlich entfernte Tangente, nämlich die Tangente des unendlich entfernten Curvenpunkts.

punkte der Strahlen (G—G') und (H—H') (s. § 3. Lehrsatz 9.); wenn eine von links nach rechts, die andere von rechts nach links verläuft, keinen unendlich entfernten Punkt.

Es mag hier noch für den letzterwähnten Fall parallel verlaufender Punktreihen, mögen sie einstimmig oder entgegengesetzt verlaufen, Fig. 120. a., Fig. 120. b. ein directer Beweis folgen, daß jede zwei Projectionsstrahlen von den übrigen conform getheilt werden, daß also der Satz 19. besteht. Da nämlich in diesem Falle s und s' parallel sind, hat man offenbar, wenn D, D' ein Paar entsprechender Punkte der Punktreihen s, s' sind:

$$\frac{AV}{A'V} = \frac{AD}{A'D'}; \quad \frac{AR}{A'R} = \frac{AC}{A'C'}; \quad \frac{BW}{B'W} = \frac{BD}{B'D'}; \quad \frac{BN}{B'N} = \frac{BC}{B'C'};$$

da nun Punktreihe s,ACBD $\overline{\wedge}$ s',A'C'B'D' ist, ist

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'};$$

oder:
$$\frac{AC}{BC} : \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AD}{BD} : \frac{A'D'}{B'D'};$$

oder:
$$\frac{AC}{A'C'} : \frac{BC}{B'C'} = \frac{AD}{A'D'} : \frac{BD}{B'D'};$$

oder:
$$\frac{AC}{A'C'} : \frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'} : \frac{BD}{B'D'}.$$

Setzt man hier für die Theilquotienten die obigen Werthe ein, so erhält man:

$$\frac{AR}{A'R} : \frac{AV}{A'V} = \frac{BN}{B'N} : \frac{BW}{B'W};$$

oder: Punktreihe a,ARA'V $\overline{\wedge}$ Punktreihe b,BNB'W,

oder: Punktreihe a,(a · s) (a · c) (a · s') (a · d) $\overline{\wedge}$
Punktreihe b,(b · s) (b · c) (b · s') (b · d).

Ist e ein fernerer Projectionsstrahl, so ergiebt sich ebenso
Punktreihe a,(a · s) (a · c) (a · s') (a · e) $\overline{\wedge}$
Punktreihe b,(b · s) (b · c) (b · s') (b · e),

also auch Punktreihe a,(a · s) (a · c) (a · s') (a · d) (a · e) $\overline{\wedge}$
Punktreihe b,(b · s) (b · c) (b · s') (b · d) (b · e).

Bezeichnet man den dem Punkt (a · b) der Reihe auf a entsprechenden Punkt auf a mit 𝔅, den dem Punkt (b · a) der Reihe auf b entsprechenden Punkt auf a mit 𝔄, so lassen sich die Sätze 20., 21. und 22. ganz so beweisen wie früher.

Dem Lehrsatz 29. zufolge führen wir jetzt für die Curven K' und k andere Bezeichnungen ein. Es ist nämlich offenbar, daß die

Curve K'_1 mit zwei unendlich entfernten Punkten nichts anderes sein kann, als die Curve K'_2. Denn erstere soll nach Lehrsatz 4., Erklärung 5. von zwei Tangenten in unendlich entfernten Punkten berührt werden, die Tangenten selbst aber im Endlichen liegen nach Lehrsatz 29., sie müssen daher Asymptoten sein. Sie mögen m, n, Fig. 123., heißen. Die unendlich entfernten Punkte von m und n sind also unendlich entfernte Curvenpunkte. Da sie sowohl auf der einen, als auf der andern Seite von m und n angenommen werden können, besteht also die Curve aus zwei durch die unendlich entfernten Berührungspunkte von m und n getrennten oder, wenn man will, verbundenen Aesten. Sind nun s, s', a, b, c, Tangenten der Curve, so ist nach Lehrsatz 19., 21., 22. und 23. Punktreihe $s, (s \cdot s')\,(s \cdot a)\,T(s \cdot b)\,(s \cdot c) \,\overline{\wedge}\,$ Punktreihe $s', P'(s' \cdot a)\,(s' \cdot s)\,(s' \cdot b)\,(s' \cdot c)$, ebenso aber auch nach denselben Sätzen Punktreihe $s, (s \cdot s')\,(s \cdot a)\,T(s \cdot b)\,(s \cdot c) \,\overline{\wedge}\,$ Punktreihe $b, (b \cdot s')\,(b \cdot a)\,(b \cdot s)\,\mathfrak{B}(b \cdot c)$. Es ist aber in Lehrsatz 19. nicht ausgesprochen worden, daß alle conformen Punktreihen auch einstimmig verliefen, wie es bei den die Curve K'_1 erzeugenden s und s' der Fall gewesen war. Und in der That, man sieht sogleich, daß die Punktreihen auf s und b, welche nach Lehrsatz 19. conform sind, der Erklärung 1. zufolge, entgegengesetzt verlaufen und daß allgemein jede zwei Punktreihen, welche, wie s und s', die Curve an demselben Ast berühren, einstimmig, jede zwei Punktreihen, welche, wie s und b, sie an verschiedenen Aesten berühren, entgegengesetzt verlaufen. Man kann sich aber auch die Curve von den Punktreihen s und b erzeugt denken. Da diese entgegengesetzt verlaufen, so wäre also dieselbe Curve, die wir, insofern wir sie uns von den einstimmigen Punktreihen s und s' hervorgebracht ansehen, mit K'_1 bezeichneten, auch mit K'_2 zu bezeichnen nach Erklärung 5. Es sind also unter der bisherigen Bezeichnung K'_1 zwei specifisch verschiedene Curvenarten enthalten, solche mit keinem unendlich entfernten Punkt und solche mit zwei unendlich entfernten Punkten. Jede der letzteren ist identisch mit einer der Curven K'_2 und umgekehrt muß, wie man sich sogleich überzeugt, K'_2 identisch sein mit derjenigen Unterart von K'_1, die zwei unendlich entfernte Punkte hat. Es erklärt sich demnach auch, wie die für die Curve K'_1 entwickelten Gesetze auch für K'_2 mit gelten mußten. — Ebenso muß die Curve k_2 identisch sein mit k_3. Denn erstere hat zwei Punkte im Unendlichen, wie k_3 nach Lehrsatz 4., Erklärung 5., die Durchschnittspunkte der entsprechenden Strahlen m und m'; n und n'; und weder k_2 noch k_3 hat eine unendlich entfernte Tangente nach Lehrsatz 29. Die Tangenten an den unendlich entfernten Punkten von k_2 und k_3 sind also Asymptoten, und jede, k_2 und k_3 besteht daher aus zwei durch diese Punkte getrennten, oder zusammenhängenden Aesten (vgl. Fig. 112, oder 121., wo nur der eine Ast verzeichnet ist). Nach Lehrsatz 19. und 23. ist nun in k_2, Fig. 124., Strahlbüschel $S, (S - S')\,(S - A)\,(S - B)\,(S - C)t \,\overline{\wedge}\,$ Strahlbüschel $S', p'(S' - A)\,(S' - B)\,(S' - C)\,(S' - S)$; aber auch, wenn $\mathfrak{b}$ die Tangente vom Punkte B ist, nach Lehrsatz 19., 21., 22.,

Strahlbüschel S,(S − S′) (S − A) (S − B) (S − C)t ⊼ Strahlbüschel B,(B − S′) (B − A) 𝔟(B − C) (B − S). Es ist aber nicht gesagt, daß alle diese conformen Strahlbüschel einstimmig verlaufen sollen. Und wirklich sieht man sogleich, daß die conformen Strahlbüschel S und B entgegengesetzt verlaufen nach Erklärung 1. Man hätte sich nun die Curve auch von S und B erzeugt denken können, und hätte sie demnach nach Erklärung 5. (vgl. Fig. 115.) durch k_3 bezeichnen müssen. Zugleich sieht man sofort, daß jede zwei conforme Strahlbüschel, deren Scheitel, wie S und S′ auf demselben Curvenast liegen, einstimmig, jede zwei Strahlbüschel, deren Scheitel, wie S und B auf verschiedenen Curvenästen liegen, entgegengesetzt verlaufen. Es ist also k_2 identisch mit k_3, und nur die verschiedene Auffassung, ob man sich die Curve von einstimmig, oder von entgegengesetzt verlaufenden Strahlbüscheln erzeugt denkt, würde eine verschiedene Bezeichnung begründen und rechtfertigen. Da nun auf eine solche, verschiedene, Auffassung im Folgenden nichts ankommt, so führen wir eine neue Bezeichnung ein, nämlich, wie folgt:

30. Erklärung. Diejenige, von einstimmig verlaufenden conformen Punktreihen erzeugte Curve, welche keinen Punkt im Unendlichen hat, soll im Folgenden durch E bezeichnet werden.

Diejenige von einstimmig verlaufenden conformen Punktreihen erzeugte Curve, welche zwei Punkte im Unendlichen hat, sowie die von entgegengesetzt verlaufenden conformen Punktreihen erzeugte Curve soll im Folgenden durch H bezeichnet werden.

Die von proportionalen Punktreihen erzeugte Curve mit einer unendlich entfernten Tangente, und einem unendlich entfernten Punkt soll im Folgenden durch P bezeichnet werden.

30. Erklärung. Diejenige, von einstimmig verlaufenden conformen Strahlbüscheln erzeugte Curve, welche keinen Punkt im Unendlichen hat, soll im Folgenden durch e bezeichnet werden.

Diejenige, von einstimmig verlaufenden conformen Strahlbüscheln erzeugte Curve, welche zwei Punkte im Unendlichen hat, sowie die von entgegengesetzt verlaufenden conformen Strahlbüscheln erzeugte Curve soll im Folgenden durch h bezeichnet werden.

Die von einstimmig verlaufenden conformen Strahlbüscheln erzeugte Curve mit einem unendlich entfernten Punkte und einer unendlich entfernten Tangente soll im Folgenden durch p bezeichnet werden.

Die von einstimmig verlaufenden gleichen Strahlbüscheln erzeugte Curve soll

im Folgenden durch e′ bezeichnet werden.

Die von entgegengesetzt verlaufenden gleichen Strahlbüscheln erzeugte Curve soll im Folgenden durch h′ bezeichnet werden.

Wegen der Sätze 19. bis 24. gilt, was von den Tangenten s, s′, a_1, a_2, b_1, b_2 der Curven E, H, P bewiesen war, von allen; was von den Curvenpunkten T, P′, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ gilt, von allen; denn man kann jedes beliebige Tangentenpaar als die conformen Punktreihen ansehen, welche die Curve erzeugt haben. Ebenso gilt, was von den Punkten S, S′, A_1, A_2, B_1, B_2 der Curven e, h, p, e′, h′ bewiesen war, von allen; was von den Tangenten t, p′, α_1, α_2, β_1, β_2 gilt, von allen. Nennen wir daher ein von 4 Tangenten einer Curve gebildetes vollständiges Vierseit „umgeschrieben“, ein von 4 Punkten einer Curve gebildetes vollständiges Viereck „eingeschrieben“, so können wir den Lehrsatz 17. so aussprechen:

31. Lehrsatz. Sind a_1, a_2, b_1, b_2 irgend vier Tangenten einer der Curven E, H, P und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ die Berührungspunkte bezüglich von a_1, a_2, b_1, b_2, so fallen die drei Diagonalen $[(a_1 \cdot b_1) - (a_2 \cdot b_2)]$; $[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$; $[(a_1 \cdot a_2) - (b_1 \cdot b_2)]$ des umgeschriebenen vollständigen Vierseits $a_1 b_1 a_2 b_2$ mit den drei Geraden zusammen, welche im eingeschriebenen vollständigen Viereck $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2$ die Durchschnittspunkte der Gegenseiten $[(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2) \cdot (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2)]$; $[(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1) \cdot (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2)]$; $[(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_2) \cdot (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_1)]$ mit einander verbinden; und die drei Durchschnittspunkte der Diagonalen $[(a_1 \cdot b_1) - (a_2 \cdot b_2)]$; $[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$; $[(a_1 \cdot a_2) - (b_1 \cdot b_2)]$ des umgeschriebenen vollständigen Vierseits fallen mit den drei Durchschnittspunkten $[(\mathfrak{A}_1$

31. Lehrsatz. Sind A_1 A_2, B_1, B_2 irgend vier Punkte einer der Curven e, h, p, e′, h′ und α_1, α_2, β_1, β_2 die Tangenten bezüglich an A_1, A_2, B_1, B_2, so fallen die drei Durchschnittspunkte $[(A_1 - B_1) \cdot (A_2 - B_2)]$; $[(A_1 - B_2) \cdot (A_2 - B_1)]$; $[A_1 - A_2) \cdot (B_1 - B_2)]$ der Gegenseiten des eingeschriebenen vollständigen Vierecks $A_1 B_1 A_2 B_2$ mit den drei Punkten zusammen, in denen sich die Diagonalen $[(\alpha_1 \cdot \alpha_2) - (\beta_1 . \beta_2)]$; $[(\alpha_1 \cdot \beta_1) - (\alpha_2 \cdot \beta_2)]$; $[(\alpha_1 \cdot \beta_2) - (\alpha_2 \cdot \beta_1)]$ im umgeschriebenen vollständigen Vierseit $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2$ schneiden; und die drei Geraden, welche die drei Durchschnittspunkte $[(A_1 - B_1) \cdot (A_2 - B_2)]$; $(A_1 - B_2) \cdot (A_2 - B_1)]$; $[(A_1 - A_2) \cdot (B_1 - B_2)]$ der Gegenseiten des eingeschriebenen vollständigen Vierecks verbinden, fallen zusammen mit den drei Diagonalen

$-\mathfrak{A}_2)\cdot(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B}_2)]$; $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{B}_1)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{B}_2)]$; $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{B}_2)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{B}_1)]$; der Gegenseiten des eingeschriebenen vollständigen Vierecks zusammen. Fig. 107.a.

$[(\alpha_1\cdot\alpha_2)-(\beta_1\cdot\beta_2)]$; $[(\alpha_1\cdot\beta_1)-(\alpha_2\cdot\beta_2)]$; $[(\alpha_1\cdot\beta_2)-(\alpha_2\cdot\beta_1)]$, des umgeschriebenen vollständigen Vierseits. Fig. 107. b.

Man sieht, daß beide Sätze identisch sind, und daß also die Curven e, h, p, e′, h′, die hier ausgesprochene Eigenschaft mit E, H, P gemein haben.

Nach Lehrsatz 6. ist nun Strahlbüschel $(a_1\cdot a_2)$, $a_1\alpha' a_2\tau$, und $(b_1\cdot b_2)$, $b_1\beta' b_2\tau$, also auch Punktreihe $\alpha,\mathfrak{A}_1(s\cdot s')\mathfrak{A}_2(\tau\cdot\alpha)$ und $\beta,\mathfrak{B}_1(s\cdot s')\mathfrak{B}_2(\tau\cdot\beta)$ harmonisch. Denken wir uns nun in Fig. 107. a. oder Fig. 125. a. durch denselben Punkt $(s\cdot s')$ noch eine Secante $(\mathfrak{S}_1-\mathfrak{S}_2)$ gezogen, und suchen den dem Punkt $(s\cdot s')$ zugeordneten harmonischen der Reihe $(\mathfrak{S}_1-\mathfrak{S}_2)$, $\mathfrak{S}_1(s\cdot s')\mathfrak{S}_2$. In dem vollständigen Viereck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{S}_2$ ist nun $(s\cdot s')$ der eine Durchschnittspunkt der Gegenseiten. In dem Durchschnittspunkt $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{S}_1)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{S}_2)]$ entsteht nun nach § 3. Lehrsatz 17. ein harmonischer Strahlbüschel, in welchem $(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{S}_1)$ und $(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{S}_2)$ das eine Paar zugeordneter Strahlen sind, und in welchem die Verbindungsgeraden mit den anderen beiden Durchschnittspunkten der Gegenseiten das andere Paar zugeordneter Strahlen ist. Der eine dieser Strahlen muß also durch $(s\cdot s')$ gehen. Da nun der dem $(s\cdot s')$ zugeordnete harmonische Punkt auf α der Punkt $(\tau\cdot\alpha)$ ist, so muß der Strahl, der den Punkt $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{S}_1)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{S}_2)]$ mit $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{S}_2)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{S}_1)]$ verbindet, durch $(\tau\cdot\alpha)$ gehen. Ebenso muß im vollständigen Viereck $\mathfrak{B}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{S}_2$ der den Punkt $[(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{S}_1)\cdot(\mathfrak{B}_2-\mathfrak{S}_2)]$ mit $[(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{S}_2)\cdot[(\mathfrak{B}_2-\mathfrak{S}_1)]$ verbindende Strahl durch $(\tau\cdot\beta)$ gehen; und beide Strahlen müssen sich auf $(\mathfrak{S}_1-\mathfrak{S}_2)$ in dem dem Punkt $(s\cdot s')$ zugeordneten harmonischen schneiden. Nach Lehrsatz 31. aber muß, wenn man c_1 und c_2 die in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ berührenden Tangenten nennt, die Diagonale $[(a_1\cdot a_2)-(c_1\cdot c_2)]$ mit der Verbindungsgeraden von $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{S}_1)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{S}_2)]$ und $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{S}_2)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{S}_1)]$ zusammenfallen, indem $a_1c_1a_2c_2$ das dem Viereck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{S}_2$ umgeschriebene Vierseit ist. Ebenso muß $[(b_1\cdot b_2)-(c_1\cdot c_2)]$ mit der Verbindungsgeraden von $[(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{S}_1)\cdot(\mathfrak{B}_2-\mathfrak{S}_2)]$ und $[(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{S}_2)\cdot(\mathfrak{B}_2-\mathfrak{S}_1)]$ zusammenfallen. Es muß also $(c_1\cdot c_2)$ sowohl auf der Verbindungsgeraden von $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{S}_1)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{S}_2)]$ mit $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{S}_2)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{S}_1)]$ als auf der Verbindungsgeraden von $[(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{S}_1)\cdot(\mathfrak{B}_2-\mathfrak{S}_2)]$ mit $[(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{S}_2)\cdot(\mathfrak{B}_2-\mathfrak{S}_1)]$ liegen. Demnach muß entweder $(c_1\cdot c_2)$ auf der Geraden $(\mathfrak{S}_1-\mathfrak{S}_2)$ innerhalb der Curve liegen, in dem Durchschnittspunkte dieser beiden Geraden, oder diese selbst müssen zusammenfallen. Ersteres ist unmöglich, da c_1 und c_2 Tangenten sind, mithin müssen die genannten beiden Geraden zusammenfallen. Da nun die eine derselben durch $(\tau\cdot\alpha)$, die andere durch $(\tau\cdot\beta)$ gehen muß, so müssen sie mit der Geraden $[(\tau\cdot\alpha)-(\tau\cdot\beta)]$,

oder $[(a_1 \cdot a_2) - (b_1 \cdot b_2)]$ oder τ zusammenfallen. Es liegt also $(c_1 \cdot c_2)$ auf τ; und folglich ist nach Lehrsatz 6. τ der Strahl, welcher der dem Strahl $[(c_1 \cdot c_2) - (s \cdot s')]$ zugeordnete harmonische ist. Es liegt also der dem Punkt $(s \cdot s')$ auf $(\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2)$ zugeordnete harmonische der Punktreihe $(\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2), \mathfrak{S}_1 (s \cdot s') \mathfrak{S}_2$ im Durchschnitte mit τ. Ein Gleiches läßt sich ebenso von jeder anderen durch $(s \cdot s')$ gehenden Secante zeigen. Ebenso ist nach Lehrsatz 6. Punktreihe $(A_1 - A_2)$, $A_1 A' A_2 T$, $(B_1 - B_2), B_1 B' B_2 T$, also auch Strahlbüschel $A, \alpha_1 (S - S') \alpha_2 (T - A)$; $B, \beta_1 (S - S') \beta_2 (T - B)$ harmonisch. Denken wir uns nun in Fig. 107. b. oder Fig. 125. b. von derselben Secante $(S - S')$ aus noch zwei Tangenten c_1, c_2 gezogen und suchen den dem Strahl $(S - S')$ zugeordneten harmonischen des Strahlbüschels $(c_1 \cdot c_2), c_1 (S - S') c_2$. Im vollständigen Vierseit $\alpha_1 c_1 \alpha_2 c_2$ ist $(S - S')$ eine Diagonale; jede der anderen beiden Diagonalen, z. B. $[(\alpha_1 \cdot c_1) - (\alpha_2 \cdot c_2)]$ wird nun nach § 3. Lehrsatz 17. harmonisch getheilt, und zwar sind $(\alpha_1 \cdot c_1)$ und $(\alpha_2 \cdot c_2)$ das eine Paar zugeordneter Punkte, die Durchschnittspunkte mit den anderen beiden Diagonalen das andere Paar. Der eine dieser Punkte liegt also auf $(S - S')$. Da nun der dem Strahl $(S - S')$ zugeordnete harmonische im Büschel A die Gerade $(A - T)$ ist, so muß der Durchschnittspunkt von $[(\alpha_1 \cdot c_1) - (\alpha_2 \cdot c_2)]$ mit $[(\alpha_1 \cdot c_2) - (\alpha_2 \cdot c_1)]$ auf $(A - T)$ liegen. Ebenso muß der Durchschnittspunkt von $[(\beta_1 \cdot c_1) - (\beta_2 \cdot c_2)]$ mit $[(\beta_1 \cdot c_2) - (\beta_2 \cdot c_1)]$ auf $(B - T)$ liegen. Beide Punkte müssen nun auf dem dem Strahl $(S - S')$ des Büschels $(c_1 \cdot c_2)$ zugeordneten harmonischen Strahl liegen. Nach Lehrsatz 31. aber muß im vollständigen Viereck $A_1 C_1 A_2 C_2$ der Durchschnittspunkt $[(A_1 - A_2) \cdot (C_1 - C_2)]$ mit dem Durchschnittspunkt von $[(\alpha_1 \cdot c_1) - (\alpha_2 \cdot c_2)]$ und $[(\alpha_1 \cdot c_2) - (\alpha_2 \cdot c_1)]$ zusammenfallen, und ebenso muß im vollständigen Viereck $B_1 C_1 B_2 C_2$ und vollständigen Vierseit $\beta_1 c_1 \beta_2 c_2$ der Durchschnittspunkt $[(B_1 - B_2) \cdot (C_1 - C_2)]$ mit dem Durchschnittspunkt von $[(\beta_1 \cdot c_1) - (\beta_2 \cdot c_2])$ und $[(\beta_1 \cdot c_2) - (\beta_2 \cdot c_1)]$ zusammenfallen. Also muß $(C_1 - C_2)$ entweder der vierte dem Strahl $(S - S')$ zugeordnete harmonische im Büschel $(c_1 \cdot c_2)$ sein, oder es müssen beide auf diesem Strahl liegende Durchschnittspunkte, nämlich $[(\alpha_1 \cdot c_1) - (\alpha_2 \cdot c_2)]$ mit $[(\alpha_1 \cdot c_2) - (\alpha_2 \cdot c_1)]$ und $[(\beta_1 \cdot c_1) - (\beta_2 \cdot c_2)]$ mit $[(\beta_1 \cdot c_2) - (\beta_2 \cdot c_1)]$ zusammenfallen. Letzteres ist allein möglich, da $(C_1 - C_2)$ eine Secante sein soll, und zwar müssen, da sowohl $(A - T)$ als $(B - T)$ durch die genannten zwei Durchschnittspunkte gehen soll, dieselben am Punkt $[(A - T) \cdot (B - T)]$, d. h. in T zusammenfallen. Es geht also der dem Strahl $(S - S')$ zugeordnete harmonische des Strahlbüschels $(c_1 \cdot c_2), c_1 (S - S') c_2$ durch T. Ein Gleiches läßt sich von jedem anderen Strahlbüschel zeigen. Man kann daher sagen:

32. Lehrsatz. Wenn man in den Curven E, H, P von irgend einem Durchschnittspunkte $(s \cdot s')$ zweier Tan-

32. Lehrsatz. Wenn man in den Curven e, h, p, e', h' auf irgend einer Verbindungsgeraden $(S - S')$ zweier

genten s, s' verschiedene, die Curve in zwei Punkten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$; $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$; $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$,.... schneidende Gerade α, β,.... zieht und in den auf α, β.... entstehenden Punktreihen $\alpha, \mathfrak{A}_1 (s \cdot s') \mathfrak{A}_2$; $\beta, \mathfrak{B}_1 (s \cdot s') \mathfrak{B}_2$;.... den dem Punkt $(s \cdot s')$ zugeordneten harmonischen sucht, so liegt derselbe für alle Gerade α, β.... auf einer und derselben Geraden τ, nämlich auf der Verbindungsgeraden der Berührungspunkte T, P' der Tangenten s, s'. Fig. 107a., 125a.

Curvenpunkte S, S' verschiedene Durchschnittspunkte A, B,.... je zweier Tangenten α_1, α_2, b_1, b_2, c_1, c_2;.... bestimmt und in den an A, B,.... entstehenden Strahlbüscheln $A, \alpha_1 (S-S') \alpha_2$; $B, b_1 (S-S') b_2$,.... den dem Strahl $(S-S')$ zugeordneten harmonischen sucht, so geht derselbe für alle Punkte A, B,.... durch einen und denselben Punkt T, nämlich durch den Durchschnittspunkt der an die Curvenpunkte S, S' gelegten Tangenten t, p'. Fig. 107b., 125b.

Mit Hülfe des Lehrsatzes 31. läßt sich nun noch ein dem Lehrsatz 32. analoger beweisen. In Fig. 107. a. haben wir uns die Punkte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ auf dem einen, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ auf dem anderen Aste einer Curve H zu denken (vgl. Fig. 115.). Was aber von einem Curvenpunkte gilt, gilt von allen; es bleiben also die an Fig. 107. a. nachgewiesenen Verhältnisse und Gesetze auch richtig, wenn wir alle vier Punkte auf einem und demselben Aste der Curve H, oder an einer Curve E oder P annehmen. Es seien also $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ so gewählt, daß der Durchschnittspunkt der Geraden $(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_2)$, $(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_1)$, also der Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ (nach Lehrsatz 17.) innerhalb der Curve E oder H oder P fällt. Vom Durchschnittspunkte der Geraden $(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2)$, $(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2)$, also vom Punkte $(\tau \cdot \gamma')$ (nach Lehrsatz 17) seien zwei Tangenten π_1, π_2 an die Curve gelegt, ihre Berührungspunkte heißen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, Fig. 126. a. Die Gegenseiten α, β des eingeschriebenen Vierecks schneiden sich also im Punkt $(s \cdot s')$, durch welchen die Tangenten s', s der Punkte P' und T gehen. Was nun in Fig. 107. a. und Lehrsatz 32. von einem Durchschnittspunkte $(s \cdot s')$ zweier Tangenten gilt, bleibt für den Durchschnittspunkt $(\pi_1 \cdot \pi_2)$ richtig. Es wird also nach Lehrsatz 32. die Gerade τ in den Punkten P', T, $(\tau \cdot \gamma')$ oder $(\pi_1 \cdot \pi_2)$ und demjenigen Punkte, in welchem die $(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)$ die τ trifft, harmonisch getheilt. Nach Lehrsatz 11. ist aber Strahlbüschel $(s \cdot s')$, $s \gamma s' \gamma'$, also Punktreihe $\tau, T (\tau \cdot \gamma) P' (\tau \cdot \gamma')$ harmonisch; es muß also $(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)$ durch $(\tau \cdot \gamma)$ gehen (vgl. Fig. 108. a.). Ferner fallen nach Lehrsatz 31. die drei Durchschnittspunkte der Diagonalen $[(s \cdot \pi_1) - (s' \cdot \pi_2)]$; $[(s \cdot \pi_2) - (s' \cdot \pi_1)]$; $[(s \cdot s') - (\pi_1 \cdot \pi_2)]$ des umgeschriebenen vollständigen Vierseits $s s' \pi_1 \pi_2$ mit den drei Durchschnittspunkten $[(T - \mathfrak{P}_1) \cdot (P' - \mathfrak{P}_2)]$; $[(T - \mathfrak{P}_2) \cdot (P' - \mathfrak{P}_1)]$; $[(T - P') \cdot (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)]$ des eingeschriebenen vollständigen Vierecks $T P' \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ zusammen; es muß also $(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)$ durch $(s \cdot s')$ gehen. Da demnach

die Gerade $(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)$ sowohl durch $(s \cdot s')$ als durch $(\tau \cdot \gamma)$ gehen muß, so fällt sie mit γ zusammen. Wir ziehen nun durch den Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ eine beliebige neue Secante, welche die Curve in $\mathfrak{A}'_2$ und $\mathfrak{B}'_1$ schneidet, sie heiße $\mathfrak{t}$; und suchen den in der Punktreihe $\mathfrak{t}, \mathfrak{A}'_2(\tau \cdot \gamma)\mathfrak{B}'_1$ dem Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ zugeordneten harmonischen zu bestimmen. Bezeichnen wir die Tangenten an $\mathfrak{A}'_2$ und $\mathfrak{B}'_1$ bezüglich mit a'_2 und b'_1, und denken uns in Lehrsatz 31. Vierseit $sa'_2s'b'_1$ statt $a_1b_1a_2b_2$, und Viereck $T\mathfrak{A}'_2P'\mathfrak{B}'_1$ statt $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ gesetzt, so sehen wir, daß diesem Lehrsatze zufolge, Fig. 126.a'. sich der Durchschnittspunkt $[(\mathfrak{A}'_2 - P') \cdot (T - \mathfrak{B}'_1)]$ im Durchschnittspunkte von $[(a'_2 \cdot s) - (b'_1 \cdot s')]$ und $[(a'_2 \cdot s') - (b'_1 \cdot s)]$, und daß sich ebenso der Durchschnittspunkt $[(T - \mathfrak{A}'_2) \cdot (\mathfrak{B}'_1 - P')]$ im Durchschnittspunkte von $[(s \cdot s') - (a'_2 \cdot b'_1)]$ und $[(a'_2 \cdot s') - (b'_1 \cdot s)]$ befindet. Die zwei letztgenannten Geraden $[(s \cdot s') - (a'_2 \cdot b'_1)]$; $[(a'_2 \cdot s') - (b'_1 \cdot s)]$ mögen bezüglich γ'' und τ' heißen. Nun muß offenbar γ'' durch den Punkt $(\tau \cdot \gamma')$ (s. Fig. 126. a.) gehen. Denn es entsteht bei $(\tau' \cdot \gamma'')$ im Vierseit $sa'_2s'b'_1$ ein harmonischer Strahlbüschel nach § 3. Lehrsatz 17. Drei seiner Strahlen treffen die Gerade $(T - P')$ oder τ je in T, $(\tau \cdot \gamma)$, P'. Da nun $(\tau \cdot \gamma')$ der dem Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ zugeordnete harmonische ist, so muß der dem Strahl τ' des Büschels $(\tau' \cdot \gamma'')$ zugeordnete harmonische γ'' durch $(\tau \cdot \gamma')$ gehen. Es geht aber auch γ'' durch $(s \cdot s')$; folglich haben γ'' und γ' die Punkte $(s \cdot s')$ und $(\tau \cdot \gamma')$ gemein, und daher muß γ'' mit γ' zusammenfallen. Es liegt demnach der dem Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ zugeordnete harmonische der Punktreihe $\mathfrak{t}, \mathfrak{A}'_2(\tau \cdot \gamma)\mathfrak{B}'_1$ auf γ'. Ein Gleiches läßt sich von jeder durch den Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ gehenden Secante zeigen. Zieht man also durch einen und denselben innerhalb der Curve gelegenen Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ beliebige Secanten τ, γ, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}$, und sucht auf jeder denjenigen Punkt, der in den Punktreihen $\tau, T(\tau \cdot \gamma)P'$; $\gamma, \mathfrak{P}_1(\tau \cdot \gamma)\mathfrak{P}_2$; $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{A}_1(\tau \cdot \gamma)\mathfrak{B}_2$; $\mathfrak{t}_2, \mathfrak{A}_2(\tau \cdot \gamma)\mathfrak{B}_1$; $\mathfrak{t}, \mathfrak{A}'_2(\tau \cdot \gamma)\mathfrak{B}'_1$ u. s. w. der dem Punkte $(\tau \cdot \gamma)$ zugeordnete harmonische ist, so liegen alle diese zugeordneten Punkte auf einer und derselben Geraden γ', Fig. 126. a., Fig. 126. a', denn von den Punkten auf $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ folgt dieß unmittelbar nach § 3. Lehrsatz 17. wenn man ihn auf das vollständige Vierseit $t_1t_2\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2$ (vgl. Fig. 108. a.) anwendet. Alle vollständigen Vierecke also, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$; $P'\mathfrak{B}'_1\mathfrak{A}'_2T$, u. s. w., in welchen der eine Durchschnittspunkt zweier gegenüberliegender Seiten nach demselben Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ fällt, haben dieselbe außerhalb der Curve liegende Gerade γ' zur Verbindungsgeraden der anderen beiden Durchschnittspunkte gegenüberliegender Seiten. Folglich liegen auch nach Lehrsatz 31. die Durchschnittspunkte jeder zwei Tangenten, welche die Curve in zwei solchen Punkten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_2$; $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$; P', T; $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{B}'_1$ u. s. w. berühren, deren Verbindungsgerade $(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_2)$; $(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_1)$; $(P' - T)$; $(\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{B}'_1)$ u. s. w. durch $(\tau \cdot \gamma)$ geht, auf dieser Geraden γ'. — Es seien ferner in einer der Curven e, h, p, e', h', Fig. 126. b. Π_1 und Π_2 (vgl. Fig. 107. b.) die beiden auf der Geraden $(\Gamma - \Gamma')$ befindlichen Curvenpunkte, und die die Curve in Π_1, Π_2 berührenden Tangenten ρ_1, ρ_2 gezogen. Die Gegenecken A, B des

umgeschriebenen vollständigen Vierseits $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2$ liegen nun auf $(S - S')$. Was aber im Lehrsatz 32. von der Verbindungsgeraden $(S - S')$ ausgesagt war, gilt auch von $(\Pi_1 - \Pi_2)$. Es ist also nach Lehrsatz 32. der Strahlbüschel, welcher entsteht, wenn man vom Punkt T die Geraden $p', t, (T - \Gamma')$ oder $(\Pi_1 - \Pi_2)$ und die Verbindungsgerade von T mit dem Durchschnittspunkte $(p_1 \cdot p_2)$ zieht, harmonisch, denn man braucht, um dieß einzusehen, im Lehrsatz 32. nur T an die Stelle von A, und $(\Pi_1 - \Pi_2)$ an die Stelle von $(S - S')$; p', t an die Stelle von α_1, α_2 zu setzen. Nach Lehrsatz 11. ist aber Punktreihe $(S - S')$, $S\Gamma S'T'$, also auch Strahlbüschel $T, t(T - \Gamma) p'(T - \Gamma')$ harmonisch. Es muß also der Durchschnittspunkt $(p_1 \cdot p_2)$ auf $(T - \Gamma)$ liegen. Ferner ist im vollständigen Vierseit $tp'p_1p_2$ nach § 3. Lehrsatz 17. die auf der Diagonale $[(t \cdot p') - (p_1 \cdot p_2)]$ von dem Durchschnitte der Diagonale $[(p' \cdot p_2) - (t \cdot p_1)]$, dem Punkte $(t \cdot p')$, dem Durchschnitte der Diagonale $[(t \cdot p_2) - (p' \cdot p_1)]$, dem Punkte $(p_1 \cdot p_2)$ gebildete Punktreihe harmonisch. Zugleich ist nach demselben Lehrsatz im vollständigen Viereck $S\Pi_1 S'\Pi_2$ der an Γ' entstehende Strahlbüschel, dessen Strahlen gebildet werden von der Verbindungsgeraden des Punkts Γ' mit dem Durchschnittspunkt der Gegenseiten $[(\Pi_1 - S') \cdot (\Pi_2 - S)]$, von der Verbindungsgeraden der Gegenecken Π_1, Π_2, $(\Pi_1 - \Pi_2)$, der Verbindungsgeraden von Γ' mit dem Durchschnittspunkt der Gegenseiten $[\Pi_1 - S) \cdot (\Pi_2 - S')]$, von der Verbindungsgeraden $(S - S')$ der Gegenecken S, S', harmonisch. Letzterer Strahlbüschel schneidet also auch die Gerade von $[(\Pi_1 - S') \cdot (\Pi_2 - S)]$ nach $[(\Pi_1 - S) \cdot (\Pi_2 - S')]$ harmonisch. Diese aber ist nach Lehrsatz 31. identisch mit der Diagonalen $[(t \cdot p') - (p_1 \cdot p_2)]$ und nach demselben Satze wird sie von den Geraden, die von Γ' nach $[(\Pi_1 - S') \cdot (\Pi_2 - S)]$, $[(\Pi_1 - S) \cdot (\Pi_2 - S')]$ gehen, bezüglich in dem Durchschnitte von $[(p' \cdot p_2) - (t \cdot p_1)]$, und $[(t \cdot p_2) - (p' \cdot p_1)]$ mit $[(t \cdot p') - (p_1 \cdot p_2)]$ getroffen, und nach der Annahme liegt $(t \cdot p')$ und der Durchschnittspunkt von $(\Pi_1 - \Pi_2)$ mit $[(t \cdot p') - (p_1 \cdot p_2)]$ zugleich in T; es muß also auch $(p_1 \cdot p_2)$ mit dem Durchschnitt von $[(t \cdot p') - (p_1 \cdot p_2)]$ und $(S - S')$ zusammenfallen. Es muß also $(p_1 \cdot p_2)$ auf $(S - S')$ liegen. Da $(p_1 \cdot p_2)$ demnach sowohl auf $(T - \Gamma)$, als auf $(S - S')$ sich befinden muß, kann es nur in Γ liegen. Wir ziehen nun von irgend einem Punkte $\mathfrak{T}$ der $(T - \Gamma)$ zwei neue Tangenten α'_2 und β'_1 an die Curve, und suchen den im Strahlbüschel $\mathfrak{T}, \alpha'_2 (T - \Gamma) \beta'_1$ dem Strahl $(T - \Gamma)$ zugeordneten harmonischen zu bestimmen. Bezeichnen wir nun die Berührungspunkte von α'_2 und β'_1 bezüglich mit A'_2 und B'_1 und denken uns in Lehrsatz 31. Viereck $SA'_2S'B'_1$ statt $A_1B_1A_2B_2$ und Vierseit $t\alpha'_2p'\beta'_1$ statt $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2$ gesetzt, so sehen wir, daß diesem Lehrsatze zufolge die Diagonale $[(\alpha'_2 \cdot p') - (t \cdot \beta'_1)]$ mit der Verbindungsgeraden von $[(S - S') \cdot (A'_2 - B'_1)]$ und $[(A'_2 - S) \cdot (B'_1 - S')]$, daß ebenso die Diagonale $[(t \cdot \alpha'_2)] - (\beta'_1 \cdot p')]$ mit der Verbindungsgeraden von $[(S - S') \cdot (A'_2 - B'_1)]$ und $[(A'_2 - S') \cdot (B'_1 - S)]$ und daß die Diagonale $[(\alpha'_2 \cdot \beta'_1) - (t \cdot p')]$ mit der Verbindungsgeraden von $[(S - B'_1) \cdot (S' - A'_2)]$ und $[(S - A'_2) \cdot (S' - B'_1)]$ zusammenfällt.

Die zwei Punkte $[(S-S')\cdot(A'_2-B'_1)]$, $[(A'_2-S')\cdot(B'_1-S)]$ mögen nun bezüglich mit Γ'' und T' bezeichnet werden. Nun muß jedenfalls Γ'' auf $(T-\Gamma')$ liegen. Denn nach § 3. Lehrsatz 17. wird im Vierseit $t\alpha'_2 p'\mathfrak{b}'_1$ die Diagonale $[(p'\cdot\mathfrak{b}'_1)-(t\cdot\alpha'_2)]$ oder die Gerade $(T'-\Gamma'')$ harmonisch getheilt in den Punkten $(t\cdot\alpha'_2)$, T', $(p'\cdot\mathfrak{b}'_1)$, Γ''. Da nun durch die erstgenannten Punkte die Strahlen t, $(T-\Gamma)$, p' des harmonischen Strahlbüschels $T,t(T-\Gamma)\,p'(T-\Gamma')$ gehen, so muß der vierte Strahl $(T-\Gamma')$ dieses Büschels durch Γ'' gehen. Es muß also Γ'' auf $(T-\Gamma')$ liegen. Der Definition nach liegt es aber auch auf $(S-S')$, es muß also mit Γ' zusammenfallen. Es geht demnach der dem Strahl $(T-\Gamma)$, oder $(\mathfrak{S}-\Gamma)$ zugeordnete harmonische des Büschels $\mathfrak{S},\alpha'_2(T-\Gamma)\mathfrak{b}'_1$ durch Γ'. Ein Gleiches läßt sich von jedem Strahlbüschel zeigen, dessen Scheitel auf $(T-\Gamma)$ liegt. Während wir also in Lehrsatz 31. sahen, daß, wenn wir den Scheitel eines harmonischen Strahlbüschels auf einer die Curve schneidenden Geraden $(S-S')$ in A oder B annehmen, der eine Strahl immer durch denselben Punkt T außerhalb der Curve geht, so sehen wir jetzt, daß, wenn wir den Scheitel eines harmonischen Strahlbüschels auf einer ganz außerhalb der Curve liegenden Geraden $(T-\Gamma)$ annehmen, der eine Strahl immer durch denselben Punkt Γ' innerhalb der Curve geht. Nimmt man also den Scheitel beliebig in T, Γ, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}$ an, und sucht in den Strahlbüscheln $T,t(T-\Gamma)p'$; $\Gamma,\mathfrak{p}_1(T-\Gamma)\mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{S}_1,\alpha_1(T-\Gamma)\mathfrak{b}_2$; $\mathfrak{S}_2,\alpha_2(T-\Gamma)\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{S},\alpha'_2(T-\Gamma)\mathfrak{b}'_1$ u. s. w. den dem Strahl $(T-\Gamma)$ zugeordneten harmonischen, so gehen alle diese zugeordneten Strahlen durch einen und denselben Punkt Γ'. Alle vollständigen Vierseite also $\alpha_1\mathfrak{b}_1\alpha_2\mathfrak{b}_2$, $p'\mathfrak{b}'_1\alpha'_2 t$ u. s. w., welche dieselbe Gerade $(T-\Gamma)$ zur Diagonale haben, haben denselben Punkt Γ' zum Durchschnittspunkt der anderen beiden Diagonalen. Folglich gehen nach Lehrsatz 32. die Verbindungsgeraden jeder zwei Berührungspunkte, in denen die Curve von zwei solchen Geraden α_1, $\mathfrak{b}_2$; α_2, $\mathfrak{b}_1$; p', t; α'_2, $\mathfrak{b}'_1$ u. s. w. berührt wird, deren Durchschnittspunkte $(\alpha_1\cdot\mathfrak{b}_2)$; $(\alpha_2\cdot\mathfrak{b}_1)$; $(p'\cdot t)$; $(\alpha'_2\cdot\mathfrak{b}'_1)$ u. s. w. auf $(T-\Gamma)$ liegen, durch diesen Punkt Γ'. Wir erhalten also den Satz:

33. Lehrsatz. *a.* Wenn man in einer der Curven E, H, P durch einen und denselben innerhalb liegenden Punkt $(\tau\cdot\gamma)$ beliebige verschiedene Secanten, τ, γ, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}$ zieht, und auf den so entstehenden Punktreihen $\tau,T(\tau\cdot\gamma)P'$; $\gamma,\mathfrak{P}_1(\tau\cdot\gamma)\mathfrak{P}_2$; $\mathfrak{t}_1,\mathfrak{A}_1(\tau\cdot\gamma)\mathfrak{B}_2$; $\mathfrak{t}_2,\mathfrak{A}_2(\tau\cdot\gamma)\mathfrak{B}_1$; $\mathfrak{t},\mathfrak{A}'_2(\tau\cdot\gamma)\mathfrak{B}'_1$; .... den dem Punkte $(\tau\cdot\gamma)$ zugeordneten harmonischen sucht, so liegen

33. Lehrsatz. *a.* Wenn man an eine der Curven e, h, p, e', h', von verschiedenen Punkten T, Γ, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}$ einer und derselben außerhalb liegenden Geraden $(T-\Gamma)$ aus an dieselbe Tangentenpaare legt, und in den so entstehenden Strahlbüscheln $T,t(T-\Gamma)p'$; $\Gamma,\mathfrak{p}_1(T-\Gamma)\mathfrak{p}_2$; $\mathfrak{S}_1,\alpha_1(T-\Gamma)\mathfrak{b}_2$; $\mathfrak{S}_2,\alpha_2(T-\Gamma)\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{S},\alpha'_2(T-\Gamma)\mathfrak{b}'_1$; .... den dem Strahl $(T-\Gamma)$ zu-

alle diese zugeordneten Punkte auf einer und derselben außerhalb der Curve liegenden Geraden γ'.

β Zugleich liegen die Durchschnittspunkte $(s \cdot s')$, $(\pi_1 \cdot \pi_2)$; $(a_1 \cdot b_2)$; $(a_2 \cdot b_1)$; $(a'_2 \cdot b'_1)$.... jeder zwei solcher Tangenten, deren Berührungssehne durch denselben Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ geht, alle auf derselben Geraden γ'. Fig. 126. a., 126. a'.

geordneten harmonischen sucht, so gehen alle diese zugeordneten Strahlen durch einen und denselben innerhalb der Curve liegenden Punkt Γ'.

β Zugleich gehen die Verbindungsgeraden $(S - S')$; $(\Pi_1 - \Pi_2)$; $(A_1 - B_2)$; $(A_2 - B_1)$; $(A'_2 - B'_1)$; .... jeder zwei solcher Berührungspunkte, deren Tangenten sich auf derselben Geraden $(T - \Gamma)$ schneiden, durch denselben Punkt Γ'. Fig. 126. b.

In etwas anderer Form stellt man die Sätze 31. und 33. auch so dar:

34. Lehrsatz. α Zieht man durch einen und denselben festliegenden, **außerhalb** der Curven E, H, P befindlichen Punkt $(s \cdot s')$ beliebige Gerade $\alpha, \beta, \ldots$, welche die Curve schneiden, und sucht auf jeder den dem festliegenden Punkte $(s \cdot s')$ zugeordneten harmonischen, indem man allemal die zwei Durchschnittspunkte als das andere Paar zugeordneter harmonischer Punkte annimmt, so liegen alle diese dem Punkt $(s \cdot s')$ zugeordneten harmonischen Punkte auf einer und derselben festen Geraden γ, welche die Curve **schneidet**. Sie ist allemal die Verbindungsgerade der Berührungspunkte T, P' der von dem Punkte $(s \cdot s')$ an die Curve gelegten Tangenten s, s'. Fig. 107. a.

β Zieht man durch einen und denselben, festliegenden, **innerhalb** der Curven E, H, P

34. Lehrsatz. α Nimmt man auf einer und derselben, festliegenden, die Curven e, h, p, e', h' **schneidenden** Geraden $(S - S')$ beliebige Punkte A, B, ... als Scheitel von Strahlbüscheln an, und sucht in jedem den dem festliegenden Strahl $(S - S')$ zugeordneten harmonischen, indem man allemal die zwei Tangenten als das andere Paar zugeordneter harmonischer Strahlen annimmt, so gehen alle diese dem Strahl $(S - S')$ zugeordneten harmonischen Strahlen durch einen und denselben **außerhalb** der Curve liegenden festen Punkt T. Dieser ist allemal der Durchschnittspunkt der in den Durchschnittspunkten S, S' der $(S - S')$ an die Curve gelegten Tangenten t, p'. Fig. 107. b.

β Nimmt man auf einer und derselben, festliegenden, die Curven e, h, p, e', h'

befindlichen Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ beliebige Gerade $\tau, \gamma, t_1, t_2, t, \ldots$ welche also die Curve schneiden, und sucht auf jeder den dem festliegenden Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ zugeordneten harmonischen, indem man allemal die zwei Durchschnittspunkte als das andere Paar zugeordneter harmonischer Punkte annimmt, so liegen alle diese dem Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ zugeordneten harmonischen Punkte auf einer und derselben festen Geraden γ', welche die Curve **nicht schneidet.** Auf ihr liegen allemal auch die Durchschnittspunkte jeder zwei Tangenten, welche die Curve in solchen Punkten berühren, daß die Verbindungsgerade der Berührungspunkte durch den Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ geht. Fig. 126. a., 126. a'.

nicht schneidenden Geraden $(T - \Gamma)$ beliebige Punkte $T, \Gamma, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}, \ldots$ als Scheitel von Strahlbüscheln an, und sucht in jedem den dem festliegenden Strahl $(T - \Gamma)$ zugeordneten harmonischen, indem man allemal die zwei Tangenten als das andere Paar zugeordneter harmonischer Strahlen annimmt, so gehen allemal diese dem Strahl $(T - \Gamma)$ zugeordneten harmonischen Strahlen durch einen und denselben festen Punkt Γ' **innerhalb** der Curve. Durch ihn gehen allemal auch die Verbindungsgeraden jeder zwei Curvenpunkte, deren Tangenten sich auf der Geraden $(T - \Gamma)$ schneiden. Fig. 126. b.

Es ist übrigens leicht zu sehen, daß die hier für die Curven e, h, p, e', h' ausgesprochenen Sätze auch für E, H, P, und daß die für letztere Curven ausgesprochenen auch für e, h, p, e', h' gelten. Denn nach Lehrsatz 6. ist, wenn s, s' zwei Tangenten an eine Curve E, H, P, und $(T - P')$ oder τ ihre Berührungssehne, a_1, a_2; b_1, b_2; π_1, π_2 etc. irgend ein Paar auf τ sich schneidender Tangenten sind, Strahlbüschel $(a_1 . a_2), a_1 \alpha' a_2 \tau$; $(b_1 \cdot b_2), b_1 \beta' b_2 \tau$; $(\pi_1 \cdot \pi_2), \pi_1 \gamma' \pi_2 \tau \ldots$ (s. Fig. 107. a., 108. a.) harmonisch; es geht also der dem Strahl τ zugeordnete stets durch $(s \cdot s')$. Ebenso ist nach Lehrsatz 6., wenn A_1, A_2; B_1, B_2; $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ irgend zwei Curvenpunkte einer der Linien e, h, p, e', h' sind, welche je auf einer Geraden liegen, die durch den Durchschnittspunkt T oder $(t \cdot p')$ der Tangenten t, p' an den Punkten S, S' gehen, die Punktreihe $(A_1 - A_2), A_1 A' A_2 T$; $(B_1 - B_2), B_1 B' B_2 T$; $(\Pi_1 - \Pi_2), \Pi_1 \Gamma' \Pi_2 T \ldots$ harmonisch (s. Fig. 107. b., 108. b.); es liegt also der dem Punkt T zugeordnete harmonische stets auf $(S - S')$. Man sieht also, daß der Satz 34. α. rechts, wenn man τ oder $(T - P')$ statt $(S - S')$ und $(s \cdot s')$ statt T oder $(t \cdot p')$ setzt, auch für die Curven E, H, P gültig ist; und daß der Satz 34. α. links, wenn man T oder $(t \cdot p')$ statt $(s \cdot s')$ und $(S - S')$ statt τ oder $(T - P')$ setzt, auch für die Curven e, h, p, e', h' gilt. Ferner hat offenbar der Lehrsatz 33. β. eine Umkehrung. Denn ist γ' eine außerhalb der Curve E, H, P verlaufende

Gerade, Fig. 126. a., 126. a', so müssen alle auf ihr sich schneidenden Tangentenpaare s, s'; π_1, π_2; a'_2, b'_1, ... die Curve in solchen Punkten berühren, daß die Berührungssehnen durch denselben Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ gehen, denn man kann, indem man eine Secante sich stetig um den festen Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ drehen läßt und an ihre Durchschnittspunkte Tangenten legt, alle beliebigen Punkte der γ' in stetiger Folge erhalten. Außer den beiden Tangenten aber, deren Berührungssehne durch $(\tau \cdot \gamma)$ geht, kann es von keinem Punkte der γ' noch eine Tangente geben, nach Lehrsatz 25. Zieht man also von einem Punkt $(s \cdot s')$ der γ' aus Tangenten an die Curve, die in T, P' berühren, und ebenso von $(a_2 \cdot b_1)$ auf γ' aus ein Paar in $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{B}'_1$; von $(\pi_1 \cdot \pi_2)$ aus ein Paar in $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ berührende u. s. w., so gehen nach dem eben Gesagten die Geraden $(T - P')$, $(\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{B}'_1)$, $(\mathfrak{P}'_1 - \mathfrak{P}_2)$ u. s. w. durch denselben Punkt $(\tau \cdot \gamma)$. Nach Lehrsatz 31. aber fallen in dem vollständigen Vierseit $ss'a'_2b'_1$ die Durchschnittspunkte der Diagonalen mit den Durchschnittspunkten der Gegenseiten des Vierecks $T\mathfrak{B}'_1P'\mathfrak{A}'_2$ zusammen. Es liegt also der Durchschnittspunkt von $[(s \cdot a'_2) - (s' \cdot b'_1)]$ mit $[(s \cdot b'_1) - (s' \cdot a'_2)]$ in $(\tau \cdot \gamma)$ und zugleich fällt nach Lehrsatz 31. die Diagonale γ' des Vierseits zusammen mit der Verbindungsgeraden von $[(T - \mathfrak{B}'_1) \cdot (\mathfrak{A}'_2 - P')]$ mit $[(T - \mathfrak{A}'_2) \cdot (\mathfrak{B}'_1 - P')]$. Da nun nach § 3. Lehrsatz 17. die Diagonale $[(s \cdot a'_2) - (s' \cdot b'_1)]$ in $(s \cdot a'_2)$, im Durchschnittspunkt mit γ', in $(s' \cdot b'_1)$, $(\tau \cdot \gamma)$ harmonisch getheilt wird, so muß der dem Strahl γ' zugeordnete harmonische des Strahlbüschels $(a'_2 \cdot b'_1)$, $a'_2\gamma'b'_1$ durch $(\tau \cdot \gamma)$ gehen. Ebenso überzeugt man sich mit Hülfe des Vierseits $ss'\pi_1\pi_2$, daß auch im Strahlbüschel $(\pi_1 \cdot \pi_2)$, $\pi_1\gamma'\pi_2$ der γ' zugeordnete harmonische Strahl durch $(\tau \cdot \gamma)$ gehen muß, und ebenso bleibt der Beweis für jedes andere Vierseit ss'..., dessen dritte und vierte Seite irgend ein Paar auf γ' sich schneidende Tangenten sind. Es gilt also der Lehrsatz 34. β. rechts auch für E, H, P. Deßgleichen überzeugt man sich leicht, daß der Lehrsatz 33. β. rechts eine Umkehrung hat. Denn gehen, Fig. 126. b., die Verbindungsgeraden $(S - S')$, $(\Pi_1 - \Pi_2)$, $(A'_2 - B'_1)$ u. s. w. jeder zwei solcher Berührungspunkte, deren Tangenten sich auf derselben Geraden $(T - \Gamma)$ schneiden, durch Γ', so muß also der Durchschnittspunkt der Tangenten jeder zwei Curvenpunkte S, S'; Π_1, Π_2; A'_2, B'_1 u. s. w., deren Verbindungsgerade durch Γ' geht, auf derselben Geraden $(T - \Gamma)$ sich befinden. Legt man durch einen Punkt Γ' innerhalb einer Curve e, h, p, e', h' eine Secante $(S - S')$, eine andere $(A'_2 - B'_1)$, $(\Pi_1 - \Pi_2)$...., und an ihre Durchschnittspunkte Tangenten, die sich nach der Umkehrung von Lehrsatz 33. β. auf $(T - \Gamma)$ schneiden, so fallen nach Lehrsatz 31. im vollständigen Viereck $SS'A'_2B'_1$ die Verbindungsgeraden von $[(S - A'_2) \cdot (S' - B'_1)]$ mit $[(S - B'_1) \cdot (S' - A'_2)]$ nach $(T - \Gamma)$, und zugleich fällt im Viereck der Durchschnittspunkt Γ' mit dem Durchschnittspunkt von $[(t \cdot \mathfrak{b}'_1) - (\mathfrak{a}'_2 \cdot p')]$ mit $[(t \cdot \mathfrak{a}'_2) - (\mathfrak{b}'_1 \cdot p')]$ zusammen. Da nun nach § 3. Lehrsatz 17. im Punkte $[(S' - A'_2) \cdot (S - B'_1)]$ als Scheitel ein harmonischer Strahl-

büschel entsteht mit den Strahlen $(S'-A'_2)$, der Verbindungsgeraden mit Γ', mit $(S-B'_1)$, $(T-\Gamma)$, so muß der dem Punkt Γ' zugeordnete harmonische der Punktreihe $(A'_2-B'_1), A'_2\Gamma'B'_1$ auf $(T-\Gamma)$ liegen. Deßgleichen beweist sich mit Hülfe des Vierecks $SS'\Pi_1\Pi_2$, daß auch in der Punktreihe $(\Pi_1-\Pi_2), \Pi_1\Gamma'\Pi_2$ der dem Γ' zugeordnete Punkt auf $(T-\Gamma)$ liegen muß, und ganz ebenso bleibt der Beweis wenn zur dritten und vierten Ecke des vollständigen Vierseits SS'.... irgend zwei Curvenpunkte genommen werden, deren Tangenten sich auf $(T-\Gamma)$ schneiden. Es gilt also der Satz 34. β. links auch für e, h, p, e′, h′. Man sieht demnach:

35. Lehrsatz. Die in Lehrsatz 34. α. und β. über die Curven e, h, p, e′, h′ aufgestellten Lehrsätze gelten auch für die Curven E, H, P.

35. Lehrsatz. Die in Lehrsatz 34. α. und β. über die Curven E, H, P aufgestellten Lehrsätze gelten auch für die Curven e, h, p, e′, h′.

Zugleich sieht man, daß beide Sätze dasselbe aussagen. Denn wir sahen (Lehrsatz 34. α. links,), wenn man, Fig. 108. a., eine Secante sich um den Punkt $(s \cdot s')$ drehen läßt, so liegt stets der dem $(s \cdot s')$ zugeordnete harmonische Punkt auf τ; und nach Lehrsatz 35. geht, wenn man den Scheitel eines harmonischen Strahlbüschels sich auf τ hinbewegen läßt, der dem τ zugeordnete harmonische Strahl durch $(s \cdot s')$; lassen wir (Lehrsatz 34. β. links), Fig. 126. a., 126. a′., eine Secante sich um den Punkt $(\tau \cdot \gamma)$ drehen, so liegt der dem $(\tau \cdot \gamma)$ zugeordnete harmonische auf γ', und lassen wir den Scheitel eines harmonischen Strahlbüschels auf γ' hinrücken, so geht nach Lehrsatz 35. der dem Strahl γ' zugeordnete harmonische stets durch $(\tau \cdot \gamma)$. Ganz Analoges gilt von Fig. 108. b., 126. b.; nur haben wir hier die großen Buchstaben mit kleinen, „Durchschnittspunkt" mit „Verbindungsgerade", „Scheitel eines Strahlbüschels" mit „Secante", „Secante" mit „Scheitel eines Strahlbüschels", „drehen" mit „fortrücken", „fortrücken" mit „drehen" zu vertauschen. Man sieht demnach:

36. Lehrsatz. Gilt in Bezug auf eine der Curven E, H, P; e, h, p, e′, h′ von einem Punkte $(s \cdot s')$ und einer Geraden τ (Fig. 108. a.) oder von einem Punkte T und einer Geraden $(S-S')$ (Fig. 108. b.) der Satz 34. α. links, so gilt von demselben Punkt und derselben Geraden auch der Satz 34. α. rechts, und umgekehrt; und

Gilt in Bezug auf eine der Curven E, H, P; e, h, p, e′, h′ von einem Punkte $(\tau \cdot \gamma)$ und einer Geraden γ' (Fig. 126. a., 126. a′.) oder von einem Punkt Γ' und einer Geraden $(T-\Gamma)$ (Fig. 126. b.) der Satz 34. β. links, so gilt von demselben Punkt und derselben Geraden auch der Satz 34. β. rechts; und umgekehrt.

Wir stellen daher die Erklärung auf:

37. Erklärung. Haben in einer der Curven E, H, P; e, h, p, e′, h′ ein Punkt T und eine Gerade τ eine solche Lage, daß, wenn man eine Gerade σ um den festliegenden Punkt T sich drehen läßt, und die Durchschnittspunkte mit der Curve durch A_1, A_2 bezeichnet, der dem Punkt T zugeordnete harmonische Punkt Γ der Punktreihe $\sigma, TA_1\Gamma A_2$ sich auf der festliegenden Geraden τ fortbewegt; oder daß, wenn man den Scheitel Σ eines Strahlbüschels auf der festliegenden Geraden τ fortrücken läßt, und die von Σ an die Curve gelegten Tangenten mit a_1, a_2 bezeichnet, der dem Strahle τ zugeordnete harmonische Strahl γ des Strahlbüschels $\Sigma, \tau a_1 \gamma a_2$ durch den festliegenden Punkt T geht; so soll die Gerade τ die **Polare** des Punkts T, der Punkt T der **Pol** der Geraden τ genannt werden. Liegt T außer-, zum Theil innerhalb der Curve, Fig 127. a., so soll T der äußere, τ die innere Polare, liegt T innerhalb der Curve, τ ganz außerhalb derselben, Fig. 127b., so soll T der innere Pol, τ die äußere Polare genannt werden.

Es erhellt sofort aus dem Vorigen, daß es zu jedem Punkt T nur eine einzige Polare, und zu jeder Geraden τ nur einen einzigen Pol geben kann. Denn gäbe es zu einem Punkte T, Fig. 127. noch eine Polare τ', so müßte jeder durch T gehende Strahl σ sowohl in $A_2, (\tau \cdot \sigma), A_1, T$, als in $A_2, (\tau' \cdot \sigma), A_1, T$ harmonisch getheilt werden, was unmöglich ist. Ebenso überzeugt man sich von der Behauptung, daß es für eine Gerade nur einen Pol geben kann. Denn gäbe es noch einen Pol T′, so müßte, wenn man die Gerade (T—T′) oder σ zöge, sowohl Punktreihe $\sigma, A_2(\tau \cdot \sigma)A_1T$, als $\sigma, A_2(\tau \cdot \sigma)A_1T'$ harmonisch sein, was unmöglich ist.

Wir sahen nun in Lehrsatz 32., daß, wenn τ die Berührungssehne der Tangenten s, s′ an einer der Curven E, H, P ist, auf jeder beliebigen Geraden, α, β, Fig. 107. a. oder 126. a., die durch (s · s′) geht, die Punktreihe $\alpha, \mathfrak{A}_1(s \cdot s')\mathfrak{A}_2(\alpha \cdot \tau)$, $\beta, \mathfrak{B}_1(s \cdot s')\mathfrak{B}_2(\beta \cdot \tau)$ harmonisch ist. Construirt man nun das vollständige Viereck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$, so entsteht nach § 3. Lehrsatz 17. im Durchschnittspunkt der Gegenseiten $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{B}_1)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{B}_2)]$ ein harmonischer Strahlbüschel, dessen eines Paar zugeordneter Strahlen $(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{B}_1)$, $(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{B}_2)$ sind, dessen anderes Paar die Verbindungsgeraden mit den anderen beiden Durchschnittspunkten der Gegenseiten, also mit $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_2)\cdot(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B}_2)]$ oder (s . s′) und $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{B}_2)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{B}_1)]$ ist. Da nun $(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{A}_2)$ oder α und $(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B}_2)$ oder β in $(\alpha \cdot \tau)$ und $(\beta \cdot \tau)$ ihren vierten harmonischen Punkt haben, so muß also der Strahl, welcher $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{B}_1)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{B}_2)]$ mit $[(\mathfrak{A}_1-\mathfrak{B}_2)\cdot(\mathfrak{A}_2-\mathfrak{B}_1)]$ verbindet, durch $(\alpha \cdot \tau)$ und durch $(\beta \cdot \tau)$ gehen, also mit τ zusammenfallen. Es liegen also zwei Durchschnittspunkte der Gegenseiten auf der Polaren und der dritte im Pol; folglich müssen hier auch nach Lehrsatz 31. die Durchschnittspunkte der

Diagonalen im umgeschriebenen vollständigen Vierseit sich befinden. Und umgekehrt kann man auch, wenn man weiß, daß (s · s′) ein Durchschnittspunkt der Gegenseiten im eingeschriebenen Viereck $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$, und τ die Verbindungsgerade der anderen beiden ist, und wenn man zugleich weiß, daß (s · s′) außerhalb der Curve liegt, schließen, daß die von (s · s′) an dieselbe gelegten Tangenten sie in den Durchschnittspunkten mit τ berühren müssen. Denn träfen die Tangenten in zwei anderen Punkten, deren Berührungssehne τ' heiße, so ließe sich ebenso, wie im Früheren bis zu Lehrsatz 32., darthun, daß τ' die Polare von (s · s′) wäre, und daß der dem (s · s′) zugeordnete harmonische Punkt auf α in $(\alpha \cdot \tau')$, der auf β in $(\beta \cdot \tau')$ läge, was gegen die Voraussetzung stritte, daß dieselben auf der Verbindungsgeraden von $[(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1) \cdot (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2)]$ mit $[(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_2) \cdot (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_1)]$ liegen, so lange nicht τ' mit dieser zusammenfällt. Zugleich sieht man, daß Fig. 126. a. der Durchschnittspunkt $[(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_2) \cdot (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_1)]$ der innere Pol der äußeren Geraden ist, welche die beiden anderen Durchschnittspunkte der Gegenseiten verbindet; denn man kann ebenso, wie zur Aufstellung des Lehrsatz 33. geschah, zeigen, daß jede andere durch diesen Punkt gehende Gerade auf γ' ihren zugeordneten Punkt hat. Construirt man ein der Curve E, H, P umgeschriebenes vollständiges Vierseit $a_1 b_1 a_2 b_2$, so hat man aus Lehrsatz 10., 32. und 33. unmittelbar den Beweis, daß die Durchschnitte der Diagonalen, einer im Pole, die anderen beiden auf der Polaren liegen, und man kann rückwärts schließen, daß die Tangenten, welche die Curve in den Durchschnittspunkten von $[(a_1 . a_2) - (b_1 \cdot b_2)]$ berühren, durch den Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen gehen müssen. Denn schnitten sie sich in einem anderen Punkte, so würde, wenn man sie mit f, f′ bezeichnet, sich für (f · f′) ebenso, wie für (s · s′) der Lehrsatz 10. beweisen lassen, daß hier der Durchschnittspunkt von $[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$ und $[(a_1 \cdot b_1) - (a_2 \cdot b_2)]$ liege, was gegen die Voraussetzung wäre. — Construirt man um eine der Curven e, h, p, e′, h′ ein umgeschriebenes Vierseit $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2$, Fig. 107. b., 126. b., so entsteht nach § 3. Lehrsatz 17. auf der Diagonale $[(\alpha_1 \cdot \beta_2) - (\alpha_2 \cdot \beta_1)]$ eine harmonische Punktreihe, deren eines Paar zugeordneter Punkte $(\alpha_1 \cdot \beta_2)$ und $(\alpha_2 \cdot \beta_1)$ sind, und deren anderes Paar die Durchschnittspunkte mit den übrigen beiden Diagonalen $[(\alpha_1 \cdot \alpha_2) - (\beta_1 \cdot \beta_2)]$ oder (S − S′) und $[(\alpha_1 \cdot \beta_1) - (\alpha_2 \cdot \beta_2)]$ ist. Da nun im Strahlbüschel A und B die Strahlen (A − T) und (B − T) die dem Strahl (S − S′) zugeordneten harmonischen sind, so muß der Durchschnittspunkt von $[(\alpha_1 \cdot \beta_2) - (\alpha_2 \cdot \beta_1)]$ mit $[(\alpha_1 \cdot \beta_1) - (\alpha_2 \cdot \beta_2)]$ in T liegen. Es gehen also zwei Diagonalen durch den Pol, die dritte fällt mit der Polaren zusammen; folglich muß dieß auch nach Lehrsatz 31. mit den Verbindungsgeraden der Durchschnittspunkte der Gegenseiten im eingeschriebenen Viereck $A_1 B_1$ $A_2 B_2$ der Fall sein. Umgekehrt folgt hieraus auch, wenn man weiß, daß (S − S′) die Curve schneidet, daß die Tangenten an S und S′ durch T gehen müssen, weil sonst ebenso, wie im Vorigen folgen würde,

daß noch ein anderer Punkt T′ so gelegen wäre, daß Strahlbüschel $A, \alpha_1 (S-S') \alpha_2 (A-T')$ und $B, \beta_1 (S-S') \beta_2 (B-T')$ harmonisch wären, gegen die Voraussetzung. Deßgleichen folgt, daß, Fig. 126. b., $[(\alpha_1 \cdot \beta_2) - (\alpha_2 \cdot \beta_1)]$ die äußere Polare des Durchschnittspunkts der anderen beiden Diagonalen ist; denn man kann ebenso, wie zum Beweise von Lehrsatz 33. geschehen war, beweisen, daß der dem Strahl $[(\alpha_1 \cdot \beta_2) - (\alpha_2 \cdot \beta_1)]$ zugeordnete harmonische jedes mit seinem Scheitel auf demselben liegenden Strahlbüschels durch Γ′ geht. Geht man von dem der Curve eingeschriebenen vollständigen Viereck $A_1 B_1 A_2 B_2$ aus, so geben die Sätze 10., 32., 33. unmittelbar den Beweis, daß von den Verbindungsgeraden der Durchschnittspunkte der Gegenseiten eine die Polare, der Durchschnittspunkt der beiden anderen der Pol ist. Man hat also bei den Curven e, h, p, e′, h′ denselben Satz, wie bei E, H, P, nämlich:

38. Lehrsatz. Ist in einer der Curven E, H, P, e, h, p, e′, h′: Σ_1 der Pol von σ_1, oder Σ_2 der Pol von σ_2, oder Σ_3 der Pol von σ_3 und ist α) der Pol der Durchschnittspunkt zweier Diagonalen irgend eines umgeschriebenen vollständigen Vierseits $a_1 b_1 a_2 b_2$, so fällt die dritte Diagonale mit der Polaren dieses Pols zusammen. β) Ist die Polare die eine Diagonale eines umgeschriebenen vollständigen Vierseits, so fällt der Pol dieser Polaren mit dem Durchschnittspunkt der anderen beiden Diagonalen zusammen. Dieß gilt, mag der Pol ein äußerer, seine Polare eine innere, oder der Pol ein innerer, seine Polare eine äußere sein. Fig. 128.

38. Lehrsatz. Ist in einer der Curven E, H, P; e, h, p e′, h′: σ_1 die Polare von Σ_1, oder σ_2 die Polare von Σ_2, oder σ_3 die Polare von Σ_3, und ist α) die Polare die Verbindungsgerade zweier Durchschnittspunkte der Gegenseiten irgend eines eingeschriebenen vollständigen Vierecks $A_1 B_1 A_2 B_2$, so fällt der dritte Durchschnittspunkt der Gegenseiten mit dem Pol dieser Polaren zusammen. β) Ist der Pol der eine Durchschnittspunkt der Gegenseiten eines eingeschriebenen vollständigen Vierecks, so fällt die Polare dieses Pols mit der Verbindungsgeraden der anderen beiden Durchschnittspunkte der Gegenseiten zusammen. Dieß gilt, mag die Polare eine innere, ihr Pol ein äußerer, oder die Polare eine äußere, ihr Pol ein innerer sein. Fig. 128.

Es seien nun Σ_1, Σ_2 zwei äußere Pole einer der Curven, σ_1, σ_2 ihre Polaren, also innere, so kann der Durchschnittspunkt $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ oder Σ_3 derselben entweder innerhalb, oder außerhalb der Curve liegen.

Liegt er innerhalb, Fig. 129. a., oder außerhalb, Fig. 129. b., so ist in beiden Fällen Σ_3 ein Durchschnittspunkt der Gegenseiten im eingeschriebenen Viereck $A_1 B_1 A_2 B_2$; nach Lehrsatz 38. β) fällt nun die Verbindungsgerade der anderen beiden Durchschnittspunkte der Gegenseiten mit der Polaren des Punkts Σ_3 zusammen. Nach Lehrsatz 31. fällt aber auch die Verbindungsgerade der Durchschnittspunkte $[(A_1 - B_2) \cdot (A_2 - B_1)]$ und $[(A_1 - B_1) \cdot (A_2 - B_2)]$ mit der Diagonale $[(a_1 \cdot a_2) - (b_1 \cdot b_2)]$ des umgeschriebenen Vierseits $a_1 b_1 a_2 b_2$ zusammen. Diese ist aber $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$; es ist also $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ die Polare σ_3 des Pols Σ_3. Sind Fig. 129. c. Σ_1, Σ_2 zwei innere Pole zweier äußeren Polaren σ_1, σ_2 einer der Curven, so ist Σ_1 ein Durchschnittspunkt der Gegenseiten $(S - S')$, $(A_1 - A_2)$ des eingeschriebenen Vierecks $SA_1S'A_2$, dessen andere zwei Durchschnittspunkte der Gegenseiten nach Lehrsatz 38.β) auf σ_1 liegen. Nach Lehrsatz 31. fällt aber hierhin zugleich die Diagonale $[(a_1 \cdot a_2) - (s \cdot s')]$ des umgeschriebenen Vierseits $sa_1s'a_2$; ebenso fällt mit σ_2 die Diagonale $[(b_1 \cdot b_2) - (s \cdot s')]$ des umgeschriebenen Vierseits $sb_1s'b_2$ zusammen. Es muß also $(s \cdot s')$ sowohl auf σ_1, als auf σ_2 liegen, folglich muß dieser Punkt $(s \cdot s')$ im Durchschnittspunkt $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$, d. h. in Σ_3 liegen. Es ist also nach Lehrsatz 34. α. und Lehrsatz 35. $(s \cdot s')$ oder Σ_3 der Pol von $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$, oder $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ ist die Polare σ_3 des Pols Σ_3. Man sieht also:

39. Lehrsatz. Der Durchschnittspunkt der Polaren σ_1, σ_2 zweier äußeren Pole Σ_1, Σ_2, einer der Curven E, H, P; e, h, p, e', h' kann entweder innerhalb (Fig. 129. a.) oder außerhalb (Fig. 129. b.) derselben liegen. Der Durchschnittspunkt zweier äußeren Polaren muß immer außerhalb (Fig. 129. c.) derselben liegen.

In allen Fällen ist der Durchschnittspunkt $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ der beiden Polaren der Pol der Verbindungsgeraden $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ der beiden Pole.

39. Lehrsatz. Die Verbindungsgerade der Pole Σ_1, Σ_2 zweier inneren Polaren σ_1, σ_2, einer der Curven E, H, P; e, h, p, e', h' kann entweder ganz außerhalb (Fig. 129. a.) oder zum Theil innerhalb (Fig. 129. b.) derselben liegen. Die Verbindungsgerade zweier inneren Pole muß immer zum Theil innerhalb (Fig. 129. c.) derselben liegen.

In allen Fällen ist die Verbindungsgerade $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$ der beiden Pole die Polare des Durchschnittspunkts $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ der beiden Polaren.

Da nach Lehrsatz 19. jede zwei Tangenten von jeden beliebigen vier anderen conform getheilt werden, in den Curven E, H, P, so schneiden sich die Verbindungsgeraden g, h, k der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Ecke eines der Curve E, H, P, umgeschriebenen Sechsseits abcdef, Fig. 130. a., nach § 5. Lehrsatz 6. in einem und demselben Punkte X. Zieht man die Sehnen $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$

oder 𝔞, (ℬ − 𝒞) oder 𝔟, (𝒞 − 𝒟) oder 𝔠, ... (ℱ − 𝒜) oder 𝔣, so ist nach Lehrsatz 31. A der Pol von 𝔞, B der von 𝔟, u. s. w. Nach Lehrsatz 39. ist also (𝔞·𝔡) oder 𝒢 der Pol von (A−D) oder g, (𝔟·𝔢) oder ℋ der Pol von (B − E) oder h, (𝔠·𝔣) oder 𝒦 der Pol von (C − F) oder k. Nach Lehrsatz 39. liegt nun der Pol von (𝒢 − ℋ) im Durchschnittspunkt (g · h), der Pol von (ℋ − 𝒦) im Durchschnittspunkt (h · k). Es schneiden sich aber g, h, k, in einem und demselben Punkte X; es muß demnach X sowohl der Pol von (𝒢 − ℋ) als von (ℋ − 𝒦) sein, oder, es muß sowohl (𝒢 − ℋ) als (ℋ − 𝒦) die Polare von X sein. Da nun der Natur der Sache nach ein Punkt nur eine einzige Polare haben kann (denn es müßte sonst auf einer durch X gehenden Secante zwei dem X zugeordnete harmonische Punkte geben), und diese eine gerade Linie ist, so müssen 𝒢, ℋ, 𝒦 in derselben Geraden x liegen. Es müssen also im eingeschriebenen Sechseck 𝒜ℬ𝒞𝒟ℰℱ nach § 5. Lehrsatz 7. die Strahlbüschel (sie sollen hier wieder so bezeichnet werden, daß hinter den Scheitel die Punkte gesetzt werden, nach denen die einzelnen Strahlen gerichtet sind) 𝒜,ℬ𝒞𝒟ℱ und ℰ,ℬ𝒞𝒟ℱ conform sein. Denken wir uns ferner das eingeschriebene vollständige Viereck ℰ𝒜ℬ𝒟 construirt, so liegt nach Lehrsatz 31. der Durchschnittspunkt (e · a) oder V von e und a auf der Verbindungsgeraden der Punkte [(ℰ − 𝒟) · (𝒜 − ℬ)] und [(ℰ − ℬ) · (𝒜 − 𝒟)]. Letzterer (der in der Figur nicht verzeichnet ist), heiße 𝒫, ersterer ist der Punkt 𝒢 der Figur. Die Verbindungsgerade (ℰ − 𝒜) schneide nun die (𝒫 − 𝒢) in einem Punkte, der 𝒬 heiße; so entsteht eine Punktreihe (𝒫 − 𝒢), 𝒫V𝒬𝒢. Nun ist offenbar $\frac{\mathcal{P}V}{\mathcal{Q}V} : \frac{\mathcal{P}\mathcal{G}}{\mathcal{Q}\mathcal{G}} = \frac{\mathcal{G}\mathcal{Q}}{V\mathcal{Q}} : \frac{\mathcal{G}\mathcal{P}}{V\mathcal{P}}$, oder Punktreihe (𝒫 − 𝒢), 𝒫V𝒬𝒢 ⊼ Punktreihe (𝒫 − 𝒢), 𝒢𝒬V𝒫 (vgl. die in § 1. aufgestellte Tabelle VI. 4.), folglich ist Strahlbüschel 𝒜,𝒫V𝒬𝒢 ⊼ Strahlbüschel ℰ,𝒢𝒬V𝒫 oder: Strahlbüschel 𝒜,ℬaℰ𝒟 ⊼ Strahlbüschel ℰ,ℬ𝒜e𝒟. Betrachtet man ebenso das eingeschriebene vollständige Viereck ℰ𝒜ℬ𝒞, so ergiebt sich ganz auf dieselbe Weise auch: Strahlbüschel 𝒜,ℬaℰ𝒞 ⊼ Strahlbüschel ℰ,ℬ𝒜e𝒞. Aus dieser und der vorigen Conformitätsgleichung folgt aber: Strahlbüschel 𝒜,aℬ𝒞𝒟ℰ ⊼ Strahlbüschel ℰ,𝒜ℬ𝒞𝒟e und aus dieser und der obigen Conformitätsgleichung 𝒜,ℬ𝒞𝒟ℱ ⊼ ℰ,ℬ𝒞𝒟ℱ ergiebt sich sogleich: Strahlbüschel 𝒜,aℬ𝒞𝒟ℰℱ ⊼ Strahlbüschel ℰ,𝒜ℬ𝒞𝒟eℱ. Ein Gleiches läßt sich ebenso beweisen, wenn man irgend ein Paar andere Punkte, als 𝒜 und ℰ zu Scheiteln nimmt, und nach irgend welchen anderen Punkten als ℬ, 𝒞, 𝒟, ℱ Strahlen zieht. Man sieht also, daß die Curven E, H, P dieselbe Eigenschaft haben, welche die Linien e, h, p, e′, h′ charakterisirt; daß also jede der ersteren mit einer der letzteren identisch sein muß. Da ferner, wenn man in einem Sechseck, welches einer der Curven e, h, p, e′, h′ eingeschrieben ist, z. B. in ABCDEF, Fig. 130. b. von je zwei Ecken nach den vier übrigen Gerade zieht, die Strahlbüschel, die entstehen, nach Lehrsatz 19. conform sind, so müssen nach § 5. Lehrsatz 6. die Durch-

schnittspunkte der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Ecke, G, H, K auf derselben Geraden x liegen. Zieht man nun an die Curvenpunkte A, B, ... F die Tangenten 𝔞, 𝔟, ... 𝔣, und bestimmt ihre Durchschnittspunkte (𝔞·𝔟) oder 𝔄, (𝔟·𝔠) oder 𝔅, ... (𝔣·𝔞) oder 𝔉; so ist nach Lehrsatz 34. a die Polare von 𝔄, b die von 𝔅 u. s. w. Nach Lehrsatz 39. ist also (𝔄—𝔇) oder 𝔤 die Polare von (a·d) oder G, (𝔅—𝔈) oder 𝔥 die von (b·c) oder H, (ℭ—𝔉) oder 𝔨 die von (c·f) oder K. Nach Lehrsatz 39. fällt ferner die Polare von (𝔤·𝔥) mit der Verbindungsgeraden (G—H), die Polare von (𝔥·𝔨) mit der Verbindungsgeraden (H—K) zusammen. Da nun (G—H) und (H—K) eine und dieselbe Gerade x sind, so muß, weil eine Gerade nur einen Pol haben kann, (𝔤·𝔥) mit (𝔥·𝔨) zusammenfallen. Es schneiden sich also in dem umgeschriebenen Sechsseit 𝔞𝔟𝔠𝔡𝔢𝔣 die Diagonalen der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Ecke in einem und demselben Punkt X. Folglich sind nach § 5. Lehrsatz 7. die Punktreihen 𝔞,(𝔞·𝔟) (𝔞·𝔠) (𝔞·𝔡) (𝔞·𝔣) und 𝔢,(𝔢·𝔟) (𝔢·𝔠) (𝔢·𝔡) (𝔢·𝔣) conform. In dem umgeschriebenen vollständigen Vierseit 𝔢𝔞𝔟𝔡 geht nun nach Lehrsatz 31. die Verbindungsgerade (E—A) oder 𝔳 durch den Durchschnittspunkt der Geraden [(𝔢·𝔡)—(𝔞·𝔟)] oder 𝔤 und [(𝔢·𝔟)—(𝔞·𝔡)] oder 𝔭. Die Verbindungsgerade von (𝔢·𝔞) mit (𝔭·𝔤) heiße nun 𝔮. Dann entsteht ein Strahlbüschel (𝔭·𝔤), 𝔭𝔮𝔳𝔤. Da nun offenbar (𝔭·𝔤), 𝔭𝔮𝔳𝔤 $\overline{\wedge}$ (𝔭·𝔤), 𝔤𝔳𝔮𝔭 ist, so ist auch Punktreihe 𝔞,(𝔞·𝔭) (𝔞·𝔮) (𝔞·𝔳) (𝔞·𝔤) $\overline{\wedge}$ 𝔢,(𝔢·𝔤) (𝔢·𝔳) (𝔢·𝔮) (𝔢·𝔭) oder Punktreihe 𝔞,(𝔞.𝔡) (𝔞·𝔢)A(𝔞·𝔟) $\overline{\wedge}$ Punktreihe 𝔢,(𝔢·𝔡)E (𝔢·𝔞) (𝔢·𝔟). Ebenso beweist sich auch: Punktreihe 𝔞,(𝔞·𝔠) (𝔞·𝔢)A(𝔞·𝔟) $\overline{\wedge}$ Punktreihe 𝔢,(𝔢·𝔠)E(𝔢·𝔞) (𝔢·𝔟). Es ist also auch Punktreihe 𝔞,A(𝔞·𝔟) (𝔞·𝔠) (𝔞·𝔡) (𝔞·𝔢) $\overline{\wedge}$ Punktreihe 𝔢,(𝔢·𝔞) (𝔢·𝔟) (𝔢·𝔠) (𝔢·𝔡)E; und da wir vorhin sahen, daß auch 𝔞,(𝔞·𝔟) (𝔞·𝔠) (𝔞·𝔡) (𝔞·𝔣) $\overline{\wedge}$ 𝔢,(𝔢·𝔟) (𝔢·𝔠) (𝔢·𝔡) (𝔢·𝔣) ist, so folgt: Punktreihe 𝔞,A(𝔞·𝔟) (𝔞·𝔠) (𝔞·𝔡) (𝔞·𝔢) (𝔞·𝔣) $\overline{\wedge}$ Punktreihe 𝔢,(𝔢·𝔞) (𝔢·𝔟) (𝔢·𝔠) (𝔢·𝔡) E(𝔢·𝔣). Es hat also jede der Curven e, h, p, e′, h′ auch die Eigenschaft, welche die Curven E, H, P charakterisirte. Jede der Linien e, h, p, e′ h′ muß demnach zugleich eine der Linien E ,H, P sein. Zugleich ist aus Erklärung 30. klar, daß E nur mit e oder e′, H nur mit h oder h′, P nur mit p identisch sein kann, weil E, e, e′ keinen, H, h, h′ zwei, P, p einen unendlich entfernten Punkt haben. Man sieht daher zunächst im Allgemeinen:

40. Lehrsatz. Die Curven E,H,P, deren charakteristische Eigenschaft es ist, daß sie von den Projectionsstrahlen projectivisch liegender conformer Punktreihen berührt werden, haben zugleich die Eigenschaft, daß man, wenn

40. Lehrsatz. Die Curven e, h, p, e′, h′, deren charakteristische Eigenschaft es ist, daß ihre Punkte von den Projectionspunkten projectivisch liegender conformer Strahlbüschel gebildet werden, haben zugleich die

man irgend zwei ihrer Curvenpunkte mit beliebigen anderen durch Gerade verbindet, stets zwei projectivisch liegende conforme Strahlbüschel erhält. Und zwar sind die Tangenten a, e, der beiden Scheitel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$, allemal die der Verbindungsgeraden ($\mathfrak{A} - \mathfrak{E}$) der Scheitel entsprechenden Strahlen. Fig. 130. a.

Eigenschaft, daß man, wenn man irgend zwei ihrer Tangenten durch beliebige andere schneidet, stets zwei projectivisch liegende conforme Punktreihen erhält. Und zwar sind die Berührungspunkte A, E, der beiden Tangenten α, ϵ, allemal die dem Durchschnittspunkte ($\alpha \cdot \epsilon$) der Tangenten entsprechenden Punkte. Fig. 130b.

Man bemerkt sogleich, daß jeder dieser beiden Sätze die Umkehrung des andern ist. Ferner ergiebt sich also:

41. Lehrsatz. Die Curve E ist identisch mit e oder e′; die Curve H ist identisch mit h oder h′; die Curve P ist identisch mit p.

Hieraus folgt weiter:

42. Lehrsatz. Von **jeder** der Curven E, H, P oder e, h, p, e′, h′, gelten sowohl die Vorigen links, als die rechts aufgestellten Sätze **zugleich**.

Ferner sahen wir an Fig. 130. a. und 130. b.:

43. Lehrsatz. Wird einer der Curven E, H, P, oder e, h, p, e′, h′ irgend ein Sechsseit abcdef umgeschrieben, so schneiden sich die Diagonalen g, h, k der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Ecke in einem und demselben Punkte X. Fig. 130. a.

43. Lehrsatz. Wird einer der Curven E, H, P, oder e, h, p, e′, h′ irgend ein Sechseck ABCDEF eingeschrieben, so liegen die Durchschnittspunkte G, H, K der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Seite auf einer und derselben Geraden x. Fig. 130. b.

Es sei nun σ die Polare eines Punkts Σ, sei er ein äußerer, wie in Fig. 131. a., oder ein innerer, wie in Fig. 131. b. Taf. XVIII. Durch Σ seien die Secanten $(A_1 - A_2)$, $(B_1 - B_2)$, $(C_1 - C_2)$ gelegt und die eingeschriebenen vollständigen Vierecke $A_1B_1A_2B_2$, $A_1C_1A_2C_2$, $B_1C_1B_2C_2$ construirt. In jedem schneidet sich also ein Paar Gegenseiten $(A_1 - A_2)$ und $(B_1 - B_2)$; $(A_1 - A_2)$ und $(C_1 - C_2)$; $(B_1 - B_2)$ und $(C_1 - C_2)$ im Pole Σ. Es liegen also die anderen beiden Durchschnittspunkte der Gegenseiten nach Lehrsatz 38. β) rechts (vgl. Lehrsatz 10. rechts) auf der Polaren σ. Zugleich fällt nach Lehrsatz 31. auch eine Diagonale $[(a_1 \cdot a_2) - (b_1 \cdot b_2)]$; $[(a_1 \cdot a_2) - (c_1 \cdot c_2)]$; $[(b_1 \cdot b_2) - (c_1 \cdot c_2)]$ der umgeschriebenen vollständigen Vierseite $a_1b_1a_2b_2$,

$a_1c_1a_2c_2$, $b_1c_1b_2c_2$ mit σ zusammen, die andern beiden Diagonalen jedes Vierseits gehen bezüglich durch Γ', Γ, Σ; Δ', Δ, Σ; E', E, Σ. Nun ist nach § 3. Lehrsatz 17. harmonisch:

im Vierseit $a_1b_1a_2b_2$ Punktreihe $\sigma, A\Gamma B\Gamma'$;
" " $a_1c_1a_2c_2$ " $\sigma, A\Delta\Theta\Delta'$;
" " $b_1c_1b_2c_2$ " $\sigma, BE\Theta E'$.

Ferner ist, weil nach § 3. Lehrsatz 17. in den vollständigen Vierecken harmonische Strahlbüschel an Σ entstehen, im Viereck $A_1B_1A_2B_2$ Strahlbüschel $\Sigma,(\Sigma-\Gamma)(\Sigma-A')(\Sigma-\Gamma')(\Sigma-B')$, im Viereck $A_1C_1A_2C_2$ Strahlbüschel $\Sigma,(\Sigma-\Delta)(\Sigma-A')(\Sigma-\Delta')(\Sigma-\Theta')$, im Viereck $B_1C_1B_2C_2$ Strahlbüschel $\Sigma,(\Sigma-E)(\Sigma-B')(\Sigma-E')(\Sigma-\Theta')$ harmonisch. Es ist also auch harmonisch:

im Viereck $A_1B_1A_2B_2$ Punktreihe $\sigma, A'\Gamma B'\Gamma'$;
" " $A_1C_1A_2C_2$ " $\sigma, A'\Delta\Theta'\Delta'$;
" " $B_1C_1B_2C_2$ " $\sigma, B'E\Theta'E'$.

Es ist also, da die Theilung sowohl in dem Vierseit als in dem Viereck harmonisch ist:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Punktreihe } \sigma, A'\Gamma'B'\Gamma & \overline{\wedge} & \text{Punktreihe } \sigma, A\Gamma B\Gamma'; \\ \quad " \quad \sigma, A'\Delta'\Theta'\Delta & \overline{\wedge} & \quad " \quad \sigma, A\Delta\Theta\Delta'; \\ \quad " \quad \sigma, B'E'\Theta'E & \overline{\wedge} & \quad " \quad \sigma, BE\Theta E'. \end{array}\right\} \quad *)$$

Nach Lehrsatz 19. und 22. ist nun

Strahlbüschel $A_1, a_1B_1C_1C_2B_2A_2 \;\overline{\wedge}$
Strahlbüschel $A_2, A_1B_1C_1C_2B_2a_2$,

also auch

Punktreihe $\sigma, A\Gamma\Delta\Delta'\Gamma'A' \;\overline{\wedge}\;$ Punktreihe $\sigma, A'\Gamma'\Delta'\Delta\Gamma A$. †)

Nach *) aber ist, wenn wir die rechte Seite zur linken nehmen, Punktreihe $\sigma, A\Gamma B\Gamma' \;\overline{\wedge}\; \sigma, A'\Gamma'B'\Gamma$. In den letzten beiden Conformitätsgleichungen sind nun dieselben drei Punkte A, A'; Γ, Γ'; Γ', Γ, entsprechende, es müssen also auch B und B' entsprechende Punkte in †) sein; also ist auch:

Punktreihe $\sigma, A\Gamma B\Delta\Delta'\Gamma'A' \;\overline{\wedge}\;$ Punktreihe $\sigma, A'\Gamma'B'\Delta'\Delta\Gamma A$.

Zugleich ist nach *) Punktreihe $\sigma, \Gamma A'\Gamma'B' \;\overline{\wedge}\; \sigma, \Gamma'A\Gamma B$. In dieser Punktreihe und in †) sind nun ebenfalls Γ, Γ'; A', A; Γ', Γ, entsprechende Punkte; es müssen also auch B' und B entsprechende Punkte in der Conformitätsgleichung †) sein. Also ist auch

Punktreihe $\sigma, A\Gamma B\Delta\Delta'B'\Gamma'A' \;\overline{\wedge}\;$ Punktreihe $\sigma, A'\Gamma'B'\Delta'\Delta B\Gamma A$.

Nach *) ist ferner, wenn wir die rechte Seite zur linken nehmen, Punktreihe $\sigma, A\Delta\Theta\Delta' \;\overline{\wedge}\; \sigma, A'\Delta'\Theta'\Delta$. Es sind also auch Θ und Θ' entsprechende Punkte dieser Conformitätsgleichung. Zugleich ist nach *) Punktreihe $\sigma, \Delta A'\Delta'\Theta' \;\overline{\wedge}\; \sigma, \Delta'A\Delta\Theta$. Es sind also auch Θ' und Θ entsprechende Punkte; folglich hat man:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punktreihe } \sigma, \mathrm{A\Gamma B\Delta\Theta\Theta'\Delta'B'\Gamma'A'} \barwedge \\ \text{Punktreihe } \sigma, \mathrm{A'\Gamma'B'\Delta'\Theta'\Theta\Delta B\Gamma A}.\end{array}\right\} \dagger\dagger)$$

Ferner ist nach Lehrsatz 19. und 22. Strahlbüschel $B_1, A_1 b_1 C_1 C_2 B_2 A_2 \barwedge B_2, A_1 B_1 C_1 C_2 b_2 A_2$, also auch

$$\text{Punktreihe } \sigma, \mathrm{\Gamma BEE'B'\Gamma'} \barwedge \text{Punktreihe } \sigma, \mathrm{\Gamma'B'E'EB\Gamma}.$$

Diese Reihe hat mit der in ††) die Punkte Γ, Γ'; B, B'; $B'\,B$; Γ', Γ, als entsprechende gemein. Es ist also auch:

$$\text{Punktreihe } \sigma, \mathrm{A\Gamma B\Delta E\Theta\Theta'E'\Delta'B'\Gamma'A'} \barwedge$$
$$\text{Punktreihe } \sigma, \mathrm{A'\Gamma'B'\Delta'E'\Theta'\Theta E\Delta B\Gamma A}.$$

Ist σ eine innere Polare, Fig. 131. a., so ist A' der Pol von $(A_1 - A_2)$, B der von $(B_1 - B_2)$, Θ der von $(C_1 - C_2)$, also ist Punktreihe $\sigma, ASA'S'$; $\sigma, BSB'S'$; $\sigma, \Theta S\Theta'S'$ harmonisch, also nach § 4. Lehrsatz 17., Punktreihe $\sigma, AB\Theta S\Theta'B'A'S'$ involutorisch mit den Hauptpunkten S, S'. Die Punkte außer S und S' sind aber nichts anderes als die Punkte der letzten Gleichung. Es sind also S und S' die Hauptpunkte der in derselben angeführten Involution, die offenbar nichts anderes enthält, als das schon in Lehrsatz 15. aufgestellte Gesetz. Ist aber σ eine äußere Polare, Fig. 131. b., so verlaufen auf ihr die die Involution erzeugenden Punkte einstimmig, und dieselbe hat keinen Hauptpunkt. Denkt man sich von Σ die Strahlen nach den Punkten der Involution σ gezogen und bezeichnet sie mit denselben Buchstaben, wie ihre Durchschnittspunkte mit σ, nur mit kleinen Buchstaben, so sieht man sogleich, daß in Fig. 131. a. an Σ ein Strahlbüschel mit entgegengesetzter Involution, dessen Hauptstrahlen die Tangenten s und s' an S und S' sind, und daß in Fig. 131. b. an Σ ein einstimmig involutorischer Strahlbüschel entsteht; was sich auch ebenso direct hätte zeigen lassen. Man hat also für einen außerhalb liegenden Pol, Fig. 131. a.:

$$\text{Punktreihe } \sigma, \mathrm{S'A\Gamma B\Delta E\Theta S\Theta'E'\Delta'B'\Gamma'A'} \barwedge$$
$$\text{Punktreihe } \sigma, \mathrm{S'A'\Gamma'B'\Delta'E'\Theta'S\Theta E\Delta B\Gamma A};$$
$$\text{Strahlbüschel } \Sigma, \mathrm{s'}\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon\vartheta \mathrm{s}\vartheta'\varepsilon'\delta'\beta'\gamma'\alpha' \barwedge$$
$$\text{Strahlbüschel } \Sigma, \mathrm{s'}\alpha'\gamma'\beta'\delta'\varepsilon'\vartheta' \mathrm{s}\vartheta\varepsilon\delta\beta\gamma\alpha;$$

für einen innerhalb liegenden Pol, Fig. 131. b.:

$$\text{Punktreihe } \sigma, \mathrm{AE\Theta'\Gamma\Delta BA'E'\Theta\Gamma'\Delta'B'} \barwedge$$
$$\text{Punktreihe } \sigma, \mathrm{A'E'\Theta\Gamma'\Delta'B'AE\Theta'\Gamma\Delta B};$$
$$\text{Strahlbüschel } \Sigma, \alpha\varepsilon\vartheta'\gamma\delta\beta\alpha'\varepsilon'\vartheta\gamma'\delta'\beta' \barwedge$$
$$\text{Strahlbüschel } \Sigma, \alpha'\varepsilon'\vartheta\gamma'\delta'\beta'\alpha\varepsilon\vartheta'\gamma\delta\beta.$$

Verbindet man nun die Punkte A_1, A_2 mit den Punkten der involutorischen Reihe auf σ, außer mit $E, E', B, B', \Theta, \Theta'$, und bedenkt, daß $(A_1 - \Gamma')$ nach B_2, $(A_1 - \Delta')$ nach C_2, u. s. w. geht, und daß $(A_1 - A)$ die Tangente a_1, $(A_2 - A)$ die Tangente a_2 ist, so ist zunächst in Fig. 130. a.:

$$\text{Strahlbüschel } A_1, S'A\Gamma\Delta S\Delta'\Gamma'A' \;\overline{\wedge}\; \text{Strahlbüschel } A_2, S'A\Gamma\Delta S\Delta'\Gamma'A'$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Strahlbüschel } A_1, S'a_1B_1C_1SC_2B_2A_2 \;\overline{\wedge} \\ \text{Strahlbüschel } A_2, S'a_2B_2C_2SC_1B_1A_1;\end{array}\right\} \quad X)$$

und in Fig. 131. b. ist

$$\text{Strahlbüschel } A_1, A\Gamma\Delta A'\Gamma'\Delta' \;\overline{\wedge}\; \text{Strahlbüschel } A_2, A\Gamma\Delta A'\Gamma'\Delta',$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Strahlbüschel } A_1, a_1B_1C_1A_2B_2C_2 \;\overline{\wedge} \\ \text{Strahlbüschel } A_2, a_2B_2C_2A_1B_1C_1.\end{array}\right\} \quad X)$$

Ebenso hat man, wenn man die Tangenten a_1, a_2 mit den Strahlen des involutorischen Strahlbüschels an Σ, außer mit ε, ε', β, β', ϑ, ϑ' schneidet, und bedenkt, daß der Punkt $(a_1 \cdot \alpha')$ der Berührungspunkt A_1, $(a_2 \cdot \alpha')$ der Punkt A_2 ist, in Fig. 131. a.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punktreihe } a_1, A_1(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot s)(a_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot b_2) \\ \qquad (a_1 \cdot c_2)(a_1 \cdot s') \;\overline{\wedge} \\ \text{Punktreihe } a_2, A_2(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot c_2)(a_2 . s)(a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot b_1) \\ \qquad (a_2 \cdot c_1)(a_2 \cdot s');\end{array}\right\} \quad XX)$$

und in Fig. 136. b.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Punktreihe } a_1, A_1(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot b_2)(a_1 \cdot c_2) \;\overline{\wedge} \\ \text{Punktreihe } a_2, A_2(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot a_1)(a_2 \cdot b_1)(a_2 \cdot c_1).\end{array}\right\} \quad XX)$$

Man kann sich demnach die Curve als in zwei collinearen Systemen liegend vorstellen, deren eines von dem Strahlbüschel A_1 und Σ, deren anderes von dem Strahlbüschel A_2 und Σ erzeugt wird, und die also perspectivisch liegen, weil sie einen Strahlbüschel Σ gemein haben, und weil A_1 und A_2 für σ als Projectionsaxe perspectivisch liegen (s. § 7. Lehrsatz 26., 27., Erklärung 38.). Oder man kann sich das eine System von den Punktreihen a_1 und σ, das andere von a_2 und σ erzeugt denken, und bemerkt, da a_1 und a_2 für das Projectionscentrum Σ perspectivisch liegen, nach denselben früheren Lehrsätzen und Erklärungen, daß beide Systeme sich in perspectivischer Lage befinden. Man hätte natürlich ebenso gut statt A_1, A_2; a_1, a_2 auch B_1, B_2; b_1, b_2; C_1, C_2; c_1, c_2 etc. nehmen können. Es folgt indessen aus dem obigen noch mehr. Bezeichnen wir das System, welches vom Strahlbüschel A_1 und Σ erzeugt wird, als System I., das von A_2 und Σ erzeugte als System II., so ist offenbar homolog

dem Punkt des ersten Systems B_1; C_1; C_2; B_2;

der Punkt des zweiten Systems B_2; C_2; C_1; B_1;

denn dem Strahl $(A_1 - B_1)$ entspricht nach der Conformitätsgleichung X) sowohl in Fig. 131. a. als in Fig. 131. b. der Strahl $(A_2 - B_2)$, dem Strahl $(A_1 - B_2)$ der Strahl $(A_2 - B_1)$ u. s. w. Es ist also dem Punkt B_1 des Systems I. der Punkt B_2 des

Systems II., dem Punkt B_2 des Systems I. der Punkt B_1 des Systems II., u. s. w. homolog. Ebenso ist offenbar homolog

der Geraden des ersten Systems b_1; c_1; c_2; b_2;

die Gerade des zweiten Systems b_2; c_2; c_1; b_1.

Es ist also der Geraden b_1 des Systems I., die b_2 des Systems II.; der b_2 des Systems I., die b_1 des Systems II. u. s. w. homolog. Man sieht also nach § 9. Erklärung 15., daß beide Systeme nicht bloß perspectivisch, sondern auch involutorisch liegen. Es ist also unsere Curve eine sich selbst homologe Linie zweier involutorischen Systeme I. und II.; denn jedem Punkt, z. B. B_1 der Curve in dem einen System ist ein anderer Punkt B_2 derselben Curve in dem anderen System homolog. Liegt ferner, wie in Fig. 130. a. das Involutionscentrum Σ außerhalb der Curve, so schneidet dieselbe die Involutionsaxe σ in zwei Punkten S, S'; und jeder derselben ist also ein sich selbst homologer Punkt beider Systeme. Man erhält also den

44. Lehrsatz. Jede der Curven E, H, P, oder e, h, p, e', h' ist eine sich selbst homologe Curve zweier involutorischen Systeme. Das Involutionscentrum ist irgend ein beliebiger, nicht auf der Peripherie der Curve liegender Punkt Σ, Fig. 131. a., 131. b., die Involutionsaxe seine Polare σ. Ist das Involutionscentrum Σ ein äußerer Pol, und also die Involutiosaxe σ eine innere Polare, Fig. 131. a., so bilden die Involutionspunkte (s. §. 9. Erklärung 17.) eine entgegengesetzte Involution mit den Durchschnittspunkten der Involutionsaxe und der Curve, als Hauptpunkten, und die Involutionsstrahlen (s. § 9. Erklärung 17.) bilden ebenfalls eine entgegengesetzte Involution mit den Tangenten vom Involutionscentrum an die Curve, als Hauptstrahlen. Ist das Involutionscentrum Σ ein innerer Pol, und also die Involutionsaxe σ eine äußere Polare, Fig. 131. b., so bilden die Involutionspuukte und die Involutionsstrahlen eine einstimmige Involution ohne Hauptpunkte und ohne Hauptstrahlen. Die entsprechenden Punkte A, A'; Γ, Γ'; B, B'; E, E', etc. der Involution auf σ sind immer so beschaffen, daß der eine auf der Polaren des anderen liegt. Die entsprechenden Strahlen α, α'; γ, γ'; β, β'; ε, ε', etc. der Involution an Σ sind so beschaffen, daß immer der eine durch den Pol des anderen geht.

Die letztere Bemerkung ergiebt sich sofort aus Lehrsatz 31. und 38. Es war nun Strahlbüschel $A_1, S'B_1C_1SC_2B_2$ oder $A_1, S'\Gamma\Delta S\Delta\Gamma'$ involutorisch, weil die Punktreihe auf σ diese Eigenschaft hatte. Verbinden wir nun irgend einen Curvenpunkt, er heiße Π, mit den Punkten S', B_1, C_1, S, C_2, B_2, so ist nach Lehrsatz 19. Strahlbüschel

$\Pi, S'B_1C_1SC_2B_2 \barwedge A_1, S'B_1C_1SC_2B_2$. Da nun der letztere involutorisch ist, so muß dieß auch mit dem ersteren der Fall sein, und zwar müssen $(\Pi - S)$ und $(\Pi - S')$ die Hauptstrahlen sein in Fig. 130. a., während im Falle 131. b. der involutorische Strahlbüschel Π deren ebenso wenig hat, als A_1. Denn nach Lehrsatz 19. muß $\Pi, S'B_1C_1SC_2B_2 \barwedge A_1, S'B_1C_1SC_2B_2$ und $\Pi, S'B_2C_2SC_1B_1 \barwedge A_1, S'B_2C_2SC_1B_1$ sein. Ist nun $A_1, S'B_1C_1SC_2B_2 \barwedge A_1, S'B_2C_2SC_1B_1$, so muß auch $\Pi, S'B_1C_1SC_2B_2 \barwedge \Pi, S'B_2C_2SC_1B_1$ sein. Ferner war Punktreihe $a_1, (a_1 \cdot s')\,(a_1 \cdot b_1)\,(a_1 \cdot c_1)\,(a_1 \cdot s)\,(a_1 \cdot c_2)\,(a_1 \cdot b_2)$ oder $a_1, (a_1 \cdot s')\,(a_1 \cdot \gamma)\,(a_1 \cdot \delta)\,(a_1 \cdot s)\,(a_1 \cdot \delta')\,(a_1 \cdot \gamma')$ involutorisch, weil der Strahlbüschel Σ diese Eigenschaft besitzt. Ziehen wir nun irgend eine andere Tangente π, so ist nach Lehrsatz 19. Punktreihe $\pi, (\pi \cdot s')\,(\pi \cdot b_1)\,(\pi \cdot c_1)\,(\pi \cdot s)\,(\pi \cdot c_2)\,(\pi \cdot b_2) \barwedge a_1, (a_1 \cdot s')\,(a_1 \cdot b_1)\,(a_1 \cdot c_1)\,(a_1 \cdot s)\,(a_1 \cdot c_2)\,(a_1 \cdot b_2)$. Da nun letztere involutorisch ist, muß dasselbe auch bei ersterer statt haben; giebt es zwei Tangenten s, s′, die auf der letzteren a_1 Hauptpunkte bilden, so müssen dieselben Tangenten auch auf π Hauptpunkte bilden. Man sieht also:

45. Lehrsatz. Entsteht ein involutorischer Strahlbüschel, wenn man eine Anzahl von Punkten, $B_1, C_1, C_2, B_2, \ldots$ einer der Curven E, H, P, oder e, h, p, e′, h′, mit einem anderen Curvenpunkte A_1 verbindet, so entsteht auch allemal ein involutorischer Strahlbüschel, wenn man dieselben Punkte mit einem beliebigen anderen Curvenpunkte Π verbindet. Ist die Involution des Büschels A_1 einstimmig oder entgegengesetzt gewesen (Fig. 131. b., Fig. 131. a.); so ist es auch die des Büschels Π. Dieselben Punkte S, S′, die durch ihre Verbindung mit A_1 die Hauptstrahlen des Büschels A_1 bilden, bilden auch durch ihre Verbindung mit Π die Hauptstrahlen des Büschels Π.

45. Lehrsatz. Entsteht eine involutorische Punktreihe, wenn man eine Anzahl von Tangenten, $b_1, c_1, c_2, b_2, \ldots$ einer der Curven E, H, P, oder e, h, p, e′, h′, mit einer anderen Tangente a_1 schneidet, so entsteht auch allemal eine involutorische Punktreihe, wenn man dieselben Tangenten mit einer beliebigen anderen Tangente π schneidet. Ist die Involution der Reihe a_1 einstimmig oder entgegengesetzt gewesen (Fig. 131. b., Fig. 131. a.); so ist es auch die der Reihe π. Dieselben Tangenten s, s′, die durch ihren Durchschnitt mit a_1 die Hauptpunkte der Reihe a_1 bilden, bilden auch durch ihren Durchschnitt mit π die Hauptpunkte der Reihe π.

Es sei nun Taf. XVII. Fig. 132. a. eine der Curven e oder e′ gegeben, Σ der Durchschnittspunkt zweier an dieselbe gelegten Tangenten, σ die Berührungssehne, also die Polare von Σ, und durch Σ sei eine

die Sehne SS' halbirende Secante gezogen, welche die Curve in $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, schneidet. Ziehen wir nun die Tangenten an $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, so schneiden sich dieselben nach Lehrsatz 28. rechts, (indem wir $\mathcal{A}$ für A_1, $\mathcal{B}$ für A_2, Σ für T setzen) in einem Punkt Σ' der σ, und es ist Punktreihe $\sigma, \Sigma' SNS'$ harmonisch. Da aber N die Mitte von SS' ist, so müssen die Tangenten an $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ parallel σ sein. Ziehen wir nun eine Secante $(\mathcal{A}' - \mathcal{B}')$ oder σ' parallel σ, welche die Sehne $\mathcal{A}\mathcal{B}$ in M halbirt, und legen in $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$ Tangenten an die Curve, so kommt $(\mathcal{A}' - \mathcal{B}')$ von dem unendlich entfernten Punkt Σ' der Secante σ, es ist also nach Lehrsatz 32. Punktreihe $\sigma', \Sigma' \mathcal{A}' M \mathcal{B}'$ harmonisch, und, da Σ' im Unendlichen liegt, so muß M in der Mitte von $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$ sich befinden. Da nun M auch die Mitte von $\mathcal{A}\mathcal{B}$ ist, so ist das einfache Viereck $\mathcal{A}\mathcal{A}'\mathcal{B}\mathcal{B}'$ ein Parallelogramm, oder im vollständigen Viereck $\mathcal{A}\mathcal{A}'\mathcal{B}\mathcal{B}'$ liegt der eine Durchschnittspunkt der Gegenseiten in M, die anderen beiden Durchschnittspunkte der Gegenseiten $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$ und $(\mathcal{B} - \mathcal{B}')$; $(\mathcal{A} - \mathcal{B}')$ und $(\mathcal{A}' - \mathcal{B})$ im Unendlichen. Es ist also nach Lehrsatz 38. β) rechts die Polare des Punkts M unendlich entfernt. Zieht man also irgend eine Secante durch M, so wird dasjenige Stück derselben, welches Sehne ist, von M halbirt, denn der dem Punkt M entsprechende harmonische liegt nach Lehrsatz 34. β) auf der Polaren, und da diese unendlich entfernt ist, liegt M in der Mitte der Sehne. Es wird also jede Sehne in M halbirt. Es sei ferner Fig. 132. b. eine der Curven h oder h' gegeben. Dieselbe hat zwei unendlich entfernte Punkte, aber nach Lehrsatz 29. keine unendlich entfernte Tangente. Sie hat also zwei Asymptoten, wenn man unter Asymptote eine angebbare Tangente versteht, deren Berührungspunkt sich im Unendlichen befindet. Es seien r und q die beiden Asymptoten, und durch ihren Durchschnittspunkt $(r \cdot q)$ oder M eine beliebige Sehne oder Secante σ'' gezogen, welche die Curve in $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ schneidet. Da die Berührungssehne der beiden unendlich entfernten Curvenpunkte, in denen r, q berühren, im Unendlichen liegt, also nach Lehrsatz 32. M der Pol einer unendlich entfernten Polare ist, so liegt der Durchschnittspunkt N von $(\mathcal{A} - \mathcal{B})$ mit derselben ebenfalls im Unendlichen. Es ist nun nach Lehrsatz 32. Punktreihe $\sigma'', M\mathcal{A}N\mathcal{B}$ harmonisch, und da N im Unendlichen liegt, muß M die Strecke $\mathcal{A}\mathcal{B}$ halbiren. Ein Gleiches läßt sich von jeder durch M gehenden Sehne ebenso zeigen. Dagegen ist sogleich zu sehen, daß in der Curve P oder p ein angebbarer Punkt von gleicher Beschaffenheit wie M in e und e', h und h', nicht existiren kann. Denn gäbe es einen Punkt M, der alle durch ihn gehende Sehnen halbirte, so müßte jedenfalls derselbe innerhalb des von der Curve $\mathcal{A}SS'\mathcal{B}$ Fig. 122. abgegrenzten Theils der Ebene liegen, es müßte also eine durch ihn parallel mit g oder g' gezogene Gerade nach dem unendlich entfernten Punkt der Curve gehen, und zugleich müßte dieselbe die Curve zum zweiten Male in einem endlichen Punkte schneiden. Wäre nun M so beschaffen, daß alle durch ihn gehenden Sehnen halbirt würden, so müßte auch diejenige Sehne halbirt werden, deren einen Durch-

schnittspunkt mit der Curve p der unendlich entfernte Punkt bildete. Da aber die Länge dieser Sehne unendlich ist, so müßte M selbst in unendlicher, also nicht angebbarer, Entfernung sich befinden. Man sieht also, wenn man definirt:

46. Erklärung. Derjenige Punkt M Fig. 132. a., Fig. 132. b. einer Curve, der jede durch ihn gehende Sehne halbirt, heißt: **Mittelpunkt** der Curve.

Jede durch den Mittelpunkt M gehende Sehne heißt: ein **Durchmesser** der Curve.

daß das Gesetz gilt:

47. Lehrsatz. Die Curven e und e′ haben einen innerhalb liegenden Mittelpunkt, Fig. 132. a. Die Curven h und h′ haben einen außerhalb liegenden Mittelpunkt, nämlich den Durchschnittspunkt der beiden Asymptoten, Fig. 132. b. Die Curven e, e′, h, h′ haben unzählig viele Durchmesser. Die Curve p hat einen in unendlicher Ferne liegenden Mittelpunkt und keinen in vollständiger Größe angebbaren Durchmesser.

Da also der Mittelpunkt M jeden Durchmesser halbirt, so muß seine Polare im Unendlichen liegen. Nach Lehrsatz 34. β. müssen sich aber auf der Polaren von M die Tangenten jeder Sehne schneiden, die durch M geht. Es müssen demnach, da diese Polare im Unendlichen liegt, jede zwei Tangenten, deren Berührungspunkte die Endpunkte eines Durchmessers sind, parallel sein. Es können aber auch nur solche zwei Tangenten parallel sein. Denn wären die Tangenten α_1, β_1 an zwei Punkten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, deren Berührungssehne nicht durch den Mittelpunkt geht, parallel, so brauchte man von $\mathfrak{A}_1$ nur eine Gerade durch den Mittelpunkt zu ziehen, und den anderen Endpunkt $\mathfrak{B}_2$ dieses Durchmessers zu suchen, so müßte, wie eben gezeigt wurde, auch die Tangente β_2 in $\mathfrak{B}_2$ parallel α_1 sein. Es müßte also $\alpha_1 \parallel \beta_1 \parallel \beta_2$ sein, oder es müßte vom unendlich entfernten Punkte in der Richtung α_1 drei Tangenten an die Curve geben, was gegen Lehrsatz 25. ist. Von der Curve p kann natürlich ein solches nicht behauptet werden, denn sie hat keinen Mittelpunkt. Auch ist sogleich zu sehen, daß überhaupt an ihr keine zwei in endlicher Entfernung liegende Tangenten parallel sein können. Denn nach Lehrsatz 27. sind jede zwei Tangenten proportional getheilt, d. h. es sind die unendlich entfernten Punkte entsprechend. Lägen nun ein Paar Tangenten parallel, so fielen also in ihrem (unendlich entfernten) Durchschnittspunkt ein Paar entsprechende Punkte zusammen, sie lägen also perspectivisch, und alle ihre Projectionsstrahlen schnitten sich in einem und demselben Punkte (was sich auch durch eine planimetrische Betrachtung leicht beweisen läßt), gegen Lehrsatz 19. Man erhält also den

48. Lehrsatz. In den Curven e, e′, h, h′ sind jede zwei an die Endpunkte eines Durchmessers gelegten Tangenten

parallel, aber auch nur diese. In der Curve p können keine zwei in endlicher Entfernung liegende Tangenten einander parallel sein.

Nach Lehrsatz 44. entsteht nun im Mittelpunkt M Fig. 132. a. der Curven e, e′ ein involutorischer Strahlbüschel, in welchem, da M eben der Mittelpunkt ist, auf allen Strahlen, mithin auch auf jeden zwei entsprechenden Strahlen der Involution (z. B. auf γ, γ' vergl. Fig. 131. b.) Durchmesser entstehen. Nach demselben Lehrsatz aber sind jede zwei solche Strahlen der Involution entsprechend, von denen einer durch den Pol des anderen geht. Es ist also dem Strahl σ' derjenige durch M gehende Strahl zugeordnet, der durch den Pol von σ' geht. Dieser Pol von σ' liegt aber, da nach Lehrsatz 48. die Tangenten an $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ parallel sind, im Unendlichen. Es muß also der dem Strahl σ' entsprechende Strahl σ'' der Involution parallel den Tangenten in $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ sein. Da nun der Pol von σ' im Unendlichen liegt, so muß jede zu diesen Tangenten α', $\mathfrak{b}'$ parallele Sehne durch die Sehne $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ halbirt werden. Zugleich muß, da σ' und σ'' entsprechende Strahlen der Involution sind, σ' durch den Pol von σ'' gehen. Der Pol von σ'' liegt aber im Unendlichen, da nach Lehrsatz 48. die Tangenten an $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ parallel sind; es ist also σ' parallel α, $\mathfrak{b}$, und demnach muß jede parallel zu σ' gezogene Sehne von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ halbirt werden. Da in den Curven h, h′ der Punkt M außen liegt, und nach Lehrsatz 44. die Asymptoten r, q Fig. 132. b. die Hauptstrahlen des involutorischen Büschels sind, jede zwei entsprechenden Strahlen aber von den Hauptstrahlen harmonisch getheilt werden, nach § 4. Lehrsatz 15., so muß, wenn der eine Strahl in dem spitzen Winkel rq liegt, der entsprechende Strahl der Involution in dem stumpfen Winkel 180^0 — rq sich befinden. Es haben also die Curven h, h′ die Eigenthümlichkeit, daß der jedem Durchmesser σ'' entsprechende Strahl σ' des involutorischen Büschels M die Curve gar nicht trifft, da dieselbe sich nur innerhalb der von den Asymptoten begrenzten Winkelfläche befindet. Der Pol eines jeden solchen durch M gehenden Strahls, der die Curve nicht schneidet, muß im Unendlichen liegen. Denn, um den Pol von σ' z. B. zu finden, haben wir nach Lehrsatz 34. β. rechts, oder 38. links von zwei Punkten der σ' Tangenten an die Curve zu legen, so schneiden sich ihre Berührungssehnen im Pole von σ'. Ziehen wir nun von irgend einem Punkte s der σ' zwei Tangenten α''', $\mathfrak{b}'''$, welche die Curve in $\mathfrak{A}'''$, $\mathfrak{B}'''$ berühren, so ist die eine Berührungssehne ($\mathfrak{A}'''-\mathfrak{B}'''$). Ein anderes Paar Tangenten sind bei jeder durch M gehenden Geraden die Asymptoten r, q, deren Berührungssehne im Unendlichen liegt. Es ist also der Durchschnittspunkt dieser unendlich entfernten Berührungssehne mit ($\mathfrak{A}'''-\mathfrak{B}'''$) der Pol von σ', oder der Pol von σ' liegt in der Richtung ($\mathfrak{A}'''-\mathfrak{B}'''$) in unendlicher Ferne. Zieht man nun durch M eine Sehne ($\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$) oder σ'' parallel ($\mathfrak{A}'''-\mathfrak{B}'''$), so geht dieselbe durch den Pol von σ' und es ist leicht zu sehen, daß Strahlbüschel M, σ'rσ''q harmonisch, also

σ'' der dem Strahl σ' entsprechende der Involution sein muß. Denn nach Lehrsatz 19. und 22. ist Punktreihe $r, MR'\infty S' \,\overline{\wedge}\, q, \infty RMS$; also $\frac{MR'}{MS'} = \frac{MS}{MR}$, also auch $\frac{MR'}{MS} = \frac{MS'}{MR}$; also ist $(R'-S) \parallel (R-S')$. Nach demselben Lehrsatze ist auch Punktreihe $\alpha''', \mathfrak{S}R\mathfrak{A}'''R' \,\overline{\wedge}\, \beta''', \mathfrak{B}'''\mathfrak{S}S'$; also $\frac{\mathfrak{S}R}{\mathfrak{A}'''R} : \frac{\mathfrak{S}R'}{\mathfrak{A}'''R'} = \frac{\mathfrak{B}'''S}{\mathfrak{S}S} : \frac{\mathfrak{B}'''S'}{\mathfrak{S}S'}$ oder $\frac{\mathfrak{S}R}{\mathfrak{S}R'} : \frac{\mathfrak{A}'''R}{\mathfrak{A}'''R'} = \frac{\mathfrak{S}S'}{\mathfrak{S}S} : \frac{\mathfrak{B}'''S'}{\mathfrak{B}'''S}$. Da nun $(R'-S) \parallel (R-S')$ ist, so ist $\frac{\mathfrak{S}R}{\mathfrak{S}R'} = \frac{\mathfrak{S}S'}{\mathfrak{S}S}$; also haben wir $\frac{\mathfrak{A}'''R}{\mathfrak{A}'''R'} = \frac{\mathfrak{B}'''S'}{\mathfrak{B}'''S}$. Es muß also auch $(\mathfrak{A}'''-\mathfrak{B}''') \parallel (R'-S) \parallel (R-S')$ sein. Es verhält sich also $XR' : XS = Y\mathfrak{A}''' : Y\mathfrak{B}'''$. Weil aber $(\mathfrak{A}'''-\mathfrak{B}''')$ durch den unendlich entfernten Pol von σ' geht, so wird die Strecke $\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''$ in Y halbirt, es ist also $Y\mathfrak{A}''' = Y\mathfrak{B}'''$, also auch $XR' = XS$; also auch $YV = YW$. Es halbirt also σ' nicht nur die Strecke $\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''$, sondern auch VW; und da $(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})$ oder σ'' parallel zu $(\mathfrak{A}'''-\mathfrak{B}''')$ oder $(V-W)$ gezogen war, ist Strahlbüschel $M, \sigma' r \sigma'' q$ harmonisch nach § 1. Lehrsatz 28. Es sind also σ' und σ'' entsprechende Strahlen der Involution. Zieht man in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Tangenten α, β, so sind sie parallel σ'. Denn nach Lehrsatz 19. und 22. ist, wenn wir den Durchschnittspunkt $(q \cdot \alpha)$ mit P, $(q \cdot \beta)$ mit Q, $(r \cdot \alpha)$ mit P', $(r \cdot \beta)$ mit Q' bezeichnen, Punktreihe $q, MP\infty Q \,\overline{\wedge}\, r, \infty P'MQ'$. Also $MP : MQ = MQ' : MP'$, oder $MP : MQ' = MQ : MP'$. Es ist also $(P-Q') \parallel (P'-Q)$ [$(P-Q')$ und $(P'-Q)$ sind in der Figur nicht gezogen]. Nach Lehrsatz 48. ist nun Tangente α parallel β, ihr Durchschnittspunkt unendlich entfernt; also ist nach Lehrsatz 19. und 22. auch Punktreihe $\alpha, \mathfrak{A}P\infty P' \,\overline{\wedge}\, \beta, \infty Q\mathfrak{B}Q'$; folglich $\mathfrak{A}P : \mathfrak{A}P' = Q'\mathfrak{B} : Q\mathfrak{B}$. Es muß also auch $(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) \parallel (P-Q') \parallel (P'-Q)$ sein; also ist Viereck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}QP'$ ein Parallelogramm; also $P'Q = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Da nun $(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) \parallel (R'-S)$ war, so ist auch $(P'-Q) \parallel (R'-S)$, also wird auch $P'Q$ von σ' halbirt in Z; es ist demnach $P'Z = \mathfrak{A}M$, also auch Viereck $\mathfrak{A}MZP'$ ein Parallelogramm und $\alpha \parallel \sigma'$; ebenso $\beta \parallel \sigma'$; es geht also σ' durch den unendlich entfernten Durchschnittspunkt der Tangenten α und β, d. h. durch den Pol von σ''. Man kann demnach auch in diesem speciellen Fall sagen: Von zwei entsprechenden Strahlen σ' und σ'' der Involution im Büschel M geht jeder durch den Pol des anderen. Zieht man nun Sehnen parallel zu σ', z. B. $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, so werden sie von σ'' halbirt, da der Pol von σ'' im Unendlichen liegt; zieht man Secanten parallel zu σ'', z. B. $\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''$, so werden sie von σ' halbirt, da der Pol von σ' auch im Unendlichen sich befindet. Die Curve p hat nach Lehrsatz 47. weder einen Mittelpunkt noch einen Durchmesser. Es läßt sich jedoch ein ähnlicher Satz, wie von h, h' zeigen. Es sei, Fig. 132. c., Σ der Durchschnittspunkt irgend zweier Tangenten, α, β, $(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})$ oder σ'' die Berührungssehne; dieselbe sei

von Σ aus durch die Gerade σ' halbirt, und im Durchschnittspunkt $\mathfrak{A}'$ von σ' mit der Curve die Tangente α' gezogen, so muß dieselbe nach Lehrsatz 28. parallel zu σ'' sein. Nehmen wir an, die σ' schnitte die Curve zum zweiten Male in einem endlich bestimmten Punkt, dessen Tangente also auch angebbar wäre, und mit β' bezeichnet werde, so müßten sich nach Lehrsatz 28. α' und β' auf σ'' in dem dem Mittelpunkt N von $\mathfrak{AB}$ zugeordneten harmonischen Punkt schneiden, d. h. es müßten α und β parallel zu σ'' sein, da der dem N zugeordnete Punkt im Unendlichen liegt. Nach Lehrsatz 48. aber kann der Tangente α keine angebbare Tangente parallel sein, es kann also nur die unendlich entfernte als mit ihr auf σ'' sich schneidend angenommen werden. Es muß also σ' nach dem unendlich entfernten Punkt der Curve gehen, denn nur dieser hat eine unendlich entfernte Tangente. Es ist demnach der in der Richtung von σ'' unendlich entfernt liegende Punkt der Pol von σ', und also wird jede parallel zu σ'' gezogene Sehne von σ' halbirt. Wird umgekehrt irgend eine Sehne $\mathfrak{AB}$ in N halbirt, und durch N eine Gerade σ' nach dem unendlich entfernten Punkt gezogen, so müssen sich die Tangenten α, β auf σ' schneiden. Denn läge $(\alpha \cdot \beta)$ nicht auf σ', so müßte, wie eben gezeigt wurde, die Verbindungsgerade von $(\alpha \cdot \beta)$ mit N durch den unendlich entfernten Punkt gehen. Es müßte also zwei durch N nach dem unendlich entfernten Punkt gehende Gerade geben, was nicht möglich ist. Da Σ der Pol von σ'' ist, so geht also σ' durch den Pol von σ'', und zieht man durch Σ eine Parallele σ zu σ'', so geht diese durch den Pol von σ'. Zugleich ist auch Strahlbüschel $\Sigma,\sigma\alpha\sigma'\beta$ harmonisch, also sind auch hier σ und σ', da α und β die Hauptstrahlen des bei Σ entstehenden involutorischen Büschels sind, entsprechende Strahlen der Involution. Stellen wir also die Erklärung auf:

49. Erklärung. Solche Gerade $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}')$ in den Curven e, e', h, h', deren Richtungen σ'', σ' entsprechende Strahlen des am Mittelpunkt M gebildeten involutorischen Strahlbüschels sind, heißen **conjugirte Durchmesser**, und der eine Durchmesser heißt: „dem anderen **conjugirt.**"

so sehen wir nach dem Vorigen sogleich, da die Curve p keinen Mittelpunkt hat, also auch der Definition zufolge keinen conjugirten Durchmesser haben kann:

50. Lehrsatz. Die Curven e, e', h, h' haben unzählig viele conjugirte Durchmesser.

Von jeden zwei conjugirten Durchmessern geht jeder durch den Pol des ihm conjugirten Durchmessers.

a) In den Curven e, e' schneiden von jedem Paar conjugirter Durchmesser beide die Curve wirklich. Jede zu dem einen von zwei conjugirten Durchmessern σ', σ''

parallel gezogene Sehne wird von dem ihm conjugirten Durchmesser σ'', σ' halbirt. Die Tangenten α', β'; α, β in denjenigen Curvenpunkten, in denen je zwei conjugirte Durchmesser σ', σ'' die Curve schneiden, sind parallel dem anderen conjugirten Durchmesser σ'', σ'. Fig. 132. a.

β) In den Curven h, h′ schneidet von jedem Paar conjugirter Durchmesser nur der eine die Curve wirklich, der andere liegt ganz außerhalb derselben. Jede zu dem einen von zwei conjugirten Durchmessern σ', σ'' parallel gezogene Sehne wird von dem ihm conjugirten Durchmesser σ'', σ' halbirt. Die von dem wirklichen Durchmesser σ'' halbirten Sehnen $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ verbinden Punkte desselben Curvenastes, die von dem andern Durchmesser σ' halbirten Sehnen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ verbinden Punkte der beiden verschiedenen Curvenäste. Die Tangenten α, β in denjenigen Curvenpunkten, in denen der die Curve wirklich schneidende Durchmesser dieselbe trifft, sind parallel dem conjugirten Durchmesser σ'. Jede zwei conjugirten Durchmesser σ', σ'' sind zugeordnete harmonische Strahlen eines Strahlbüschels M, dessen anderes Paar zugeordneter harmonischer Strahlen die Asymptoten r, q der Curve sind. Fig. 132. b.

γ) Werden an der Curve p irgend zwei Tangenten α, β, und von ihrem Durchschnittspunkte Σ eine Gerade σ' nach dem unendlich entfernten Curvenpunkte gezogen, welche die p zum zweiten Male im endlichen Punkt $\mathfrak{A}'$ trifft, so ist die Tangente α' im Punkt $\mathfrak{A}'$ parallel der Sehne $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$, und die σ' halbirt alle Sehnen, die der Tangente α' im Durchschnittspunkte $\mathfrak{A}'$ von σ' mit der Curve parallel sind. Werden umgekehrt irgend zwei endliche Tangenten α, β, an die Curve p gelegt, die in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ berühren, so liegt der Durchschnittspunkt Σ von α und β allemal auf einer durch den Mittelpunkt N der Sehne $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nach dem unendlich entfernten Punkte gehenden Geraden σ'. Wird durch den Punkt Σ eine Gerade σ parallel der Tangente α' gezogen, so sind σ und σ' zugeordnete harmonische Strahlen eines Strahlbüschels Σ, dessen anderes Paar zugeordneter harmonischer Strahlen die Tangenten α, β sind. Fig. 132. c.

Nach Lehrsatz 44. ist bei den Curven e, e′ der am Mittelpunkt M entstehende involutorische Strahlbüschel ein einstimmig verlaufender. Nach § 4. Lehrsatz 8. stehen nun in jedem einstimmigen involutorischen Strahlbüschel entweder jede zwei entsprechende Strahlen auf einander

senkrecht, und die Involution ist dann nach § 4. Erklärung 9. eine rechtwinklige, oder es stehen zwei entsprechende Strahlen der Involution auf einander senkrecht, nicht mehr und nicht weniger. Im ersteren sowohl, wie im letzten Falle müssen dann diese beiden Strahlen, da sie nach Erklärung 49. ein Paar conjugirte Durchmesser sind, nach Lehrsatz 50. α) die Curve, jeder in zwei Punkten schneiden, Fig. 133. a., wodurch ein Paar senkrecht auf einander stehende Durchmesser AB, A'B', die im Allgemeinen von ungleicher Länge sein werden, entstehen; da nach demselben Satze die Tangenten in A und B, also a und b parallel (A'−B') sind, so stehen sie also senkrecht auf (A−B), ebenso die Tangenten a', b' an A', B' senkrecht auf (A'−B'). Ist die Involution des Strahlbüschels M im speciellen Falle rechtwinklig, so kann man zu jedem beliebigen Durchmesser den conjugirten suchen, und da dieser dann auf ihm senkrecht steht, und die Tangenten in den Durchschnittspunkten des ersteren dem letzteren parallel sein müssen, so sieht man, daß die an den Endpunkten eines jeden beliebigen Durchmessers gezogenen Tangenten in diesem Falle auf dem Durchmesser senkrecht stehen müssen. Bei den Curven h, h' verläuft die Involution des Strahlbüschels M, da dieser außerhalb der Curve liegt, nach Lehrsatz 44. entgegengesetzt; es kann daher, aber es muß auch stets ein Paar entsprechender Strahlen geben, die auf einander senkrecht stehen; es sind dieß nämlich die Normalstrahlen der Involution, nach § 4. Lehrsatz 8., Erklärung 5. Fig. 133. b. Da diese nach Erklärung 49. zugleich conjugirte Durchmesser sind, so kann nach Lehrsatz 50. β) nur einer von ihnen die Curve wirklich in A und B schneiden. Zugleich sind nach demselben Satze die Tangenten a, b in A, B dem conjugirten Durchmesser parallel, folglich, da dieser senkrecht auf (A−B) steht, so steht auch a und b senkrecht auf (A−B). Da ferner nach Lehrsatz 44. die Tangenten an den unendlich entfernten Punkten, also die Asymptoten r, q die Hauptstrahlen des involutorischen Strahlbüschels M sind, und nach § 4. Lehrsatz 7. die beiden Hauptstrahlen von jedem Normalstrahl gleichweit abstehen, oder mit ihm gleiche Winkel bilden, so ist also $\angle rs = \angle qs$; $\angle rt = \angle qt$. In der Curve p muß es, wie auch schon an Fig. 122. gezeigt wurde, eine Richtung der Sehnen geben, die senkrecht auf der Verbindungsgeraden irgend eines Curvenpunkts mit dem unendlich entfernten steht, und zwar kann es nur eine einzige solche Richtung geben. Ist Fig. 133. c. $\mathcal{A}'$ irgend ein Curvenpunkt, σ' die von ihm nach dem unendlich entfernten gezogene Gerade und man zieht irgend eine Gerade senkrecht zu σ', so erhält man eine solche Sehne. Nach Lehrsatz 50. γ) schneiden sich nun die Tangenten α, β in einem Punkte der durch den Halbirungspunkt N der Sehne $\mathcal{A}\mathcal{B}$ nach dem unendlichen entfernten Curvenpunkt gezogenen Geraden s, und zugleich werden nach demselben Satze alle zu ($\mathcal{A}-\mathcal{B}$) parallelen Sehnen von s halbirt, die Tangenten an den Endpunkten jeder derselben schneiden sich auf s, nach Lehrsatz 50. γ); und die Tangente a

im Durchschnittspunkt der s mit der Curve steht senkrecht auf s. Man erhält also den

51. Lehrsatz. α) In den Curven e, e′ ist entweder der im Mittelpunkt M entstehende involutorische Strahlbüschel rechtwinklig. In diesem Falle stehen die Tangenten an den Endpunkten **jedes** Durchmessers auf demselben senkrecht. Oder es giebt in dem involutorischen Strahlbüschel **ein einziges** Paar conjugirter Durchmesser, s, t, deren einer auf dem anderen senkrecht steht. Die Tangenten an den Endpunkten eines jeden dieser beiden Durchmesser AB, A′B′ stehen auf ihm senkrecht. Fig. 133. a.

β) In den Curven h, h′ giebt es in dem im Mittelpunkte M entstehenden involutorischen Strahlbüschel stets nur **ein einziges** Paar conjugirter Durchmesser s, t, deren einer auf dem anderen senkrecht steht. Es sind dieß die Normalstrahlen des involutorischen Strahlbüschels M, dessen Hauptstrahlen die Asymptoten r, q sind. Der eine, s, der auf einander senkrecht stehenden conjugirten Durchmesser halbirt stets den Asymptotenwinkel rq, der andere, t, dessen Nebenwinkel. Der eine, s, schneidet die Curve in zwei Punkten A, B, deren Tangenten a, b, senkrecht auf s stehen, der andere, t, trifft die Curve nirgends. Fig. 133. b.

γ) In der Curve p giebt es stets **eine einzige** Gerade s, die einen im Endlichen liegenden Punkt mit dem im Unendlichen liegenden der Curve verbindet, und welche zugleich alle auf sie senkrecht gezogenen Sehnen 𝔄𝔅 halbirt. Auf ihr schneiden sich zugleich die Tangenten von den Endpunkten jeder von ihr halbirten Sehne. Die Tangente a in dem auf s liegenden endlichen Curvenpunkt A steht senkrecht auf s. Fig. 133. c.

52. Erklärung. α) In den Curven e, e′ heißen die beiden Durchmesser AB, A′B′, deren Richtungen s, t die beiden auf einander senkrechten conjugirten Durchmesser (s. Lehrsatz 51. α) bilden, die größere die große, die kleinere die kleine **Axe der Curve**, ihre Hälften AM oder BM, A′M oder B′M, je nachdem sie auf der großen oder kleinen Axe liegen, die große oder kleine **Halbaxe der Curve**; die Endpunkte der großen Axe heißen die **Scheitel der Curve**, die die Curve in A und B berührenden Tangenten a, b, heißen die **Scheiteltangenten der Curve**. Fig. 133. a.

β) In den Curven h, h′ heißt derjenige Durchmesser AB, dessen Richtung s senkrecht steht auf der des ihm conjugirten Durchmessers t, (s. Lehrsatz 51. β)) die große **Axe der Curve**; seine Endpunkte A, B heißen die **Scheitel der Curve**;

die die Curve in A und B berührenden Tangenten a, b heißen die **Scheiteltangenten der Curve**, das auf einer Scheiteltangente durch die beiden Asymptoten abgegrenzte endliche Stück CD heißt die kleine Axe der Curve; die Hälfte AM oder BM; CB oder DB der Axen heißt, je nachdem sie auf der großen oder kleinen Axe liegt, die große oder kleine **Halbaxe der Curve**. Fig. 133, b.

γ) In der Curve p heißt diejenige, einen endlichen mit dem unendlich entfernten Curvenpunkt verbindende Sehne s, welche alle zu ihr senkrechten halbirt (s. Lehrsatz 51. γ)), die **Axe der Curve**, ihr im Endlichen liegender Endpunkt A heißt der **Scheitel der Curve**, die die Curve in A berührende Tangente a heißt die **Scheiteltangente der Curve**. Fig. 133. c.

Betrachten wir zunächst eine der beiden Curven, die durch gleiche Strahlbüschel erzeugt werden, z. B. die durch einstimmig verlaufende gleiche Strahlbüschel gebildete Curve e′. Um nun die Natur von e′ zu erforschen, bedenken wir, daß die Scheitel A, B, der großen Axe AB Fig. 134. zugleich die Scheitel conformer Strahlbüschel sind, und daß nach Lehrsatz 22. dem Strahl s des Büschels A die Tangente b des Büschels B, dem Strahl s des Büschels B die Tangente a des Büschels A entspricht. (Man denke sich z. B. in Fig. 105. b. A statt S′, B statt S, a statt p′, b statt t gesetzt und T im Unendlichen.) Ein Paar entsprechender Strahlen c, c′ schneiden sich in P, so ist also P ein Curvenpunkt. Da zugleich die Endpunkte A′, B′ der kleinen Halbaxe Curvenpunkte sind, so sind auch (B−A′), (A−A′) oder d, d′ entsprechende Strahlen. Es ist also Strahlbüschel B,bcds $\overline{\wedge}$ Strahlbüschel A,sc′d′a. Nach Erklärung 52. α) und Lehrsatz 51. α) ist nun $\angle bs = \angle as = 1R$, da ferner in der Curve e′ nach Lehrsatz 27. jede zwei Strahlbüschel, deren Strahlen durch dieselben Curvenpunkte gehen, nicht nur conform, sondern auch gleich sind, so ist $\angle bc = \angle sc'$, $\angle bd = \angle sd'$, $\angle sd = \angle ad'$, $\angle sc = \angle ac'$, $\angle cd = \angle c'd'$. Es ist aber auch, da $MB = MA$, $MA' = MA'$, $\angle BMA' = \angle AMA' = 1R$ ist, $\triangle BMA' \cong \triangle AMA'$, also $\angle MBA' = \angle MAA'$ oder $\angle sd = \angle sd'$. Da nun $\angle sd' + \angle ad' = 1\,R$ ist, und sowohl sd′ als $ad' = \angle sd$ ist, so ist $\angle 2 \cdot sd = 1R$, also $\angle sd = \frac{1}{2}R$, also auch $\angle bd = \frac{1}{2}R$, ebenso $\angle sd' = \frac{1}{2}R$, $\angle ad' = \frac{1}{2}R$. Es ist also $\angle sc = \frac{1}{2}R + \angle cd$; $\angle sc' = \frac{1}{2}R - \angle c'd'$ oder, da $\angle c'd' = \angle cd$ ist, $\angle sc' = \frac{1}{2}R - \angle cd$. Es folgt hieraus $\angle sc + \angle sc' = 1R$. Es muß daher in dem Dreieck APB auch $\angle APB = 1R$ sein. Fällen wir also von P ein Loth auf die Axe AB, und bezeichnen die Strecke MN durch x, das Loth NP durch y, die Halbaxe $MA = MB$ durch a, (welcher Buchstabe hier nicht zu verwechseln ist mit dem die eine Scheiteltangente bezeichnenden) so verhält sich in den ähnlichen Dreiecken ANP und PNB: $a + x : y = y : a - x$; woraus folgt $a^2 - x^2 = y^2$,

oder $$x^2 + y^2 = a^2 \text{ oder } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1.$$

Es ist aber $x^2 + y^2 = MP^2$, also ist $\overline{MP}^2 = a^2$,

folglich $$MP = a.$$

Man sieht also, ein jeder beliebige Punkt P der Curve hat denselben Abstand a vom Mittelpunkt M. Es ist also die Curve e' ein Kreis mit dem Halbmesser a. Zugleich sieht man sogleich, daß beim Kreise im Mittelpunkte M eine rechtwinklige Involution entsteht. Denn construirt man ein Viereck APBQ, dessen eines Paar Diagonalen sich in M schneiden, so erhält man ein Paar entsprechende Strahlen γ, γ' der Involution, wenn man den Punkt M mit den Durchschnittspunkten von AP und BQ, und von BP und AQ verbindet (vergl. Fig. 131. b. das Viereck $A_1B_1A_2B_2$ und die entsprechenden Strahlen γ, γ'). Da aber AP $\parallel$ BQ ist, so ist $\gamma \parallel AP \parallel BQ$, und da BP $\parallel$ AQ ist, so ist $\gamma' \parallel BP \parallel AQ$. Nun ist aber $\angle APB = 1R$, also $AP \perp BP$, also auch $\gamma \perp \gamma'$. Da ferner auch s und t ein Paar entsprechende Strahlen der Involution sind, und auch senkrecht auf einander stehen, so muß dieß nach § 4. Lehrsatz 8. mit jedem Paar entsprechender Strahlen der Fall sein. Daß umgekehrt in jedem Kreise ein Paar gleiche, einstimmig verlaufende Strahlbüschel erhalten werden, wenn man irgend zwei Punkte der Peripherie mit beliebigen anderen verbindet, ergiebt sich sogleich aus der von der Planimetrie bekannten Eigenschaft des Kreises, daß die Peripheriewinkel auf demselben Bogen gleich sind, und daß eine Tangente mit einer Sehne einen Winkel einschließt gleich dem über dieser Sehne stehenden Peripheriewinkel. Sind nämlich A, B, A', P, Q beliebige Punkte des Kreisumfanges (sie brauchen nicht so zu liegen, daß AB, PQ Durchmesser sind), so ist $\angle cd = \angle c'd'$, $\angle bc = sc'$, $bd = \angle sd'$, $\angle sd = \angle ad'$, $\angle de = \angle d'e'$, wenn man § 1. Erklärung 22. festhält, also Strahlbüschel B,sdcbe gleich, also auch conform Strahlbüschel A,ad'c'se'; und zugleich sieht man sofort, daß dieselben einstimmig verlaufen. Aus Lehrsatz 40. rechts folgt zugleich, daß daher auch jedes Paar Tangenten am Kreise von den übrigen conform getheilt wird; was sich übrigens auch leicht hätte direkt beweisen lassen. Man kann also sagen:

53. Lehrsatz. Die Curve e' ist ein Kreis. Am Mittelpunkt entsteht eine rechtwinklige Involution. Umgekehrt:

In jedem Kreise entstehen zwei einstimmig verlaufende gleiche Strahlbüschel, wenn man irgend zwei Punkte des Umfangs mit beliebigen anderen verbindet, und zwei einstimmige, conform getheilte Punktreihen, wenn man irgend zwei Tangenten durch beliebige andere schneidet.

Um die Natur der Curve e zu erkennen, bedenken wir, daß nach Lehrsatz 44. sowohl diese als der Kreis als eine sich selbst homologe

Linie in zwei involutorischen Systemen angesehen werden kann. Es sei nun die Größe der großen Halbaxe der noch unbekannten Curve e gleich a, also $MA = MB = a$. Fig. 135. Ueber der großen Axe AB beschreiben wir einen Kreis mit dem Halbmesser a. Nach Erklärung 52. α) und Lehrsatz 51. α) stehen nun sowohl beim Kreise, als bei der Curve e die Tangenten in den Scheiteln A, B auf der Axe AB senkrecht. Es hat also die Curve e mit dem Kreise die Tangenten a und b gemein. Nun ist nach Lehrsatz 44. (man denke sich in Fig. 131. a. $\mathfrak{A}_1$ statt A_1, $\mathfrak{A}_2$ statt A_2, $\mathfrak{B}_1$ statt B_1, $\mathfrak{B}_2$ statt B_2, a statt s', b statt s, A statt S', B statt S gesetzt) die Curve e für den unendlich entfernten Durchschnittspunkt von a und b sich selbst collinear; ebenso der Kreis. Man ziehe nun irgend einen Strahl vom Involutionscentrum aus, so muß derselbe, da sich dieses im unendlich entfernten Durchschnittspunkt von a und b befindet, parallel a und b, mithin senkrecht auf (A—B) sein. Zwei solche Strahlen seien α' und β', und auf ihnen die Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ der Curve e gelegen, so schneiden sich nach § 9. Lehrsatz 24., sowie auch dem Wesen der involutorischen Collineation zufolge die Geraden ($\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1$) und ($\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2$), sowie ($\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_2$) und ($\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_1$) auf der Involutionsaxe, in Γ und Γ'. Es schneidet nun der Involutionsstrahl α' den Kreis in $\mathfrak{A}'_1$ und $\mathfrak{A}'_2$ der Strahl β' denselben in $\mathfrak{B}'_1$ und $\mathfrak{B}'_2$, und es ist leicht zu sehen, nach Lehrsatz 44. und nach § 9. Lehrsatz 24., daß sich auch ($\mathfrak{A}'_1 - \mathfrak{B}'_1$) und ($\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{B}'_2$) in Γ, ($\mathfrak{A}'_1 - \mathfrak{B}'_2$) und ($\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{B}'_1$) in Γ' schneiden. Es läßt sich dieß auch so beweisen: Ziehen wir durch Γ' eine Sehne, welche die Curve e in $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ schneidet, und legen an diese die Tangenten $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, so müssen nach Lehrsatz 28. dieselben sich auf s, und zwar in einem solchen Punkte schneiden, daß er der dem Punkt Γ' zugeordnete harmonische der Punktreihe s,AΓ'B ist. Nach Lehrsatz 11. und Erklärung 10. ist aber s,AΓ'BΓ harmonisch; es liegt also ($\mathfrak{c}_1 \cdot \mathfrak{c}_2$) in Γ. Sind nun $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}'_2$ die auf γ' liegenden Punkte des Kreises, $\mathfrak{c}'_1$, $\mathfrak{c}'_2$ ihre Tangenten, so müssen sich nach demselben Lehrsatz 28., der auch für e', d. h. für den Kreis, gilt, $\mathfrak{c}'_1$, $\mathfrak{c}'_2$ ebenfalls in dem dem Punkt Γ' zugeordneten harmonischen der Reihe s,AΓ'B schneiden, es muß also auch ($\mathfrak{c}_1' \cdot \mathfrak{c}'_2$) in Γ liegen. Ebenso muß auch ($\alpha'_1 \cdot \alpha'_2$) mit ($\alpha_1 \cdot \alpha_2$), ($\mathfrak{b}'_1 \cdot \mathfrak{b}'_2$) mit ($\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2$), etc. zusammenfallen. Dieser Umstand läßt schon die Richtigkeit der obigen Behauptung für wahrscheinlich erkennen. Zur Gewißheit wird sie, wenn wir uns erinnern, daß nach Lehrsatz 44. sowohl die Curve e, als der Kreis, jede für den Durchschnittspunkt der Tangenten a, b (in Fig. 131. a. s und s') als Involutionscentrum sich selbst involutorisch collinear sein muß. Da nun ($a \cdot b$) im Unendlichen liegt, so müssen die Involutionsstrahlen α', γ', β' parallel sein, also senkrecht zu s. Es müssen daher die mit dem Strahlbüschel am Involutionscentrum die Involution bildenden Strahlbüschel $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_1$ und $\mathfrak{A}'_2$ (A_1 und A_2 in Fig. 131. a.) auf einem zu s senkrechten Strahle liegen. Zieht man nun von einem solchen Punkte $\mathfrak{A}'_1$ des Kreises nach einem beliebigen Punkte Γ' der

Axe s, die Gerade $(\mathcal{A}'_1 - \Gamma')$, von $\mathcal{A}'_2$ die Gerade $(\mathcal{A}'_2 - \Gamma')$, bestimmt auf s einen solchen Punkt Γ, daß Punktreihe s,$\mathrm{A}\Gamma'\mathrm{B}\Gamma$ harmonisch ist, und zieht $(\mathcal{A}'_1 - \Gamma)$ und $(\mathcal{A}'_2 - \Gamma)$, so erhält man nach Lehrsatz 44., als Durchschnitt von $(\mathcal{A}'_1 - \Gamma)$ mit $(\mathcal{A}'_2 - \Gamma')$ einen Punkt $\mathcal{B}'_1$ des Kreises, und als Durchschnitt von $(\mathcal{A}'_2 - \Gamma)$ mit $(\mathcal{A}'_1 - \Gamma')$ den ihm homologen Curvenpunkt $\mathcal{B}'_2$ der Involution. Zugleich muß $(\mathcal{B}'_1 - \mathcal{B}'_2)$, da man ein sich selbst involutorisches System als einen speciellen Fall zweier perspectivisch liegender collinearer ansehen kann (s. § 9. Erklärung 15.) nach § 9. Lehrsatz 16. und § 8. Lehrsatz 4. durch das Involutionscentrum (a · b) gehen, d. h. es muß $(\mathcal{B}'_1 - \mathcal{B}'_2)$ senkrecht auf s stehen. Schneidet nun α' die Curve e in $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, und zieht man $(\mathcal{A}_1 - \Gamma')$, $(\mathcal{A}_2 - \Gamma')$, $(\mathcal{A}_1 - \Gamma)$, $(\mathcal{A}_2 - \Gamma)$, so erhält man als Durchschnitt von $(\mathcal{A}_1 - \Gamma')$ und $(\mathcal{A}_1 - \Gamma)$ einen Punkt $\mathcal{B}_2$, als Durchschnitt von $(\mathcal{A}_2 - \Gamma')$ und $(\mathcal{A}_1 - \Gamma)$ den homologen Curvenpunkt $\mathcal{B}_1$ der Involution auf der Curve e; und es muß $(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2)$ aus denselben Gründen wie $(\mathcal{B}'_1 - \mathcal{B}'_2)$ auf s senkrecht stehen. Es muß aber auch $(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2)$ mit $(\mathcal{B}'_1 - \mathcal{B}'_2)$ zusammenfallen. Denn die Vierecke $\mathcal{A}'_1\mathcal{A}'_2\mathcal{B}'_2\mathcal{B}'_1$ und $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1$ haben der Construction zufolge die Punkte A′, Γ′, Γ gemein, und der Durchschnittspunkt von $(\mathcal{B}'_1 - \mathcal{B}'_2)$ sowie der von $(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2)$ muß in beiden der dem Punkt A′ zugeordnete harmonische der Punktreihe s,$\mathrm{A}'\Gamma'\Gamma$ sein. Da es nun bloß einen einzigen solchen Punkt B′ geben kann, und sowohl $(\mathcal{B}'_1 - \mathcal{B}'_2)$ als $(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2)$ auf s senkrecht stehen, so müssen sie zusammenfallen. Es ist also die Curve e mit dem Kreise e′ perspectivisch collinear, da Strahlbüschel $\mathcal{A}_1$ perspectivisch, folglich auch conform Strahlbüschel $\mathcal{A}'_1$ ist, indem man sich erstere als von dem Strahlbüschel $\mathcal{A}_1$ und dem unendlich entfernten Strahlbüschel (a · b), α', γ', β' ...., letzteren als von dem Strahlbüschel $\mathcal{A}'_1$ und (a · b), $\alpha'\gamma'\beta'$ erzeugt vorstellen kann. Statt $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}'_1$ kann man auch $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}'_2$, oder $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}'_2$ oder $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}'_1$ oder $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}'_1$, etc. wählen. Es sind also der Kreis und die Curve e homologe Linien in zwei collinearen Systemen, die einen Strahlbüschel (a · b), $\alpha'\gamma'\beta'$.... gemein haben. Diese Systeme sind also nach § 7. Erklärung 38. in perspectivischer Lage, und da das Collineationscentrum (a · b) im Unendlichen liegt, sind beide Systeme, wie an Fig. 87. a. und 87. b. gezeigt wurde, *affin*, in perspectivischer Lage für die Affinitätsaxe s. Es ist also nach § 8. Lehrsatz 28. das Verhältniß

$$\frac{\mathrm{A}'\mathcal{A}_1}{\mathrm{A}'\mathcal{A}'_1} = \frac{\Gamma'\mathcal{C}_1}{\Gamma'\mathcal{C}'_1} = \frac{\mathrm{B}'\mathcal{B}_1}{\mathrm{B}\mathcal{B}'_1} = \ldots.$$

constant. Bezeichnen wir nun die Länge der kleinen Halbaxe MA′ = MB′ (s. Erklärung 52. α)) der Curve e mit b, und bedenken, daß MA″ = MB″ = MA = MB = a ist (wobei a und b also eine andere Bedeutung haben, als die Tangenten von A und B zu bezeichnen), so ist demnach:

$$\frac{A'\mathfrak{A}_1}{A'\mathfrak{A}'_1} = \frac{\Gamma'\mathfrak{C}_1}{\Gamma'\mathfrak{C}'_1} = \frac{B'\mathfrak{B}_1}{B'\mathfrak{B}'_1} = \ldots\ldots = \frac{b}{a}.$$

Für jeden Punkt des Kreises, also auch für $\mathfrak{B}_1$ gilt nun, wenn wir MB' mit x, $B'\mathfrak{B}'_1$ mit y bezeichnen, das Gesetz, daß $x^2 + y^2 = a^2$, also $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ist. Nennen wir also die halbe Sehne der Curve e, die ebenfalls um die Strecke x von M absteht, also $B'\mathfrak{B}_1$, y', so ist

$$\frac{y'}{y} = \frac{b}{a}, \text{ folglich } y' = \frac{b}{a} \cdot y,$$

oder
$$y' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

oder
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1.$$

Man sieht aus der Gleichung $y' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, daß die Curve e für die große Axe AB, wie für die kleine Axe A'B' symmetrisch liegt. Legen wir nun an das eine Ende der kleinen Axe, z. B. an A' eine Tangente, ziehen von ihren Durchschnittspunkten mit dem Kreise Parallele zur kleinen Axe, und bezeichnen ihre Durchschnittspunkte mit der großen Axe durch F_1, F_2, Fig. 136., so ist sogleich zu sehen, daß $MF_1 = MF_2$ sein muß. Es werde nun MF_1 und MF_2 durch e (hier nicht zu verwechseln mit der bisherigen Bezeichnung der noch unbekannten Curve e) bezeichnet, und wir suchen den Durchschnitt D_1 der Polaren des Punktes F_1 und den Durchschnitt D_2 der Polaren des Punktes F_2 mit der Richtung der großen Axe. Daß diese Polare d_1 senkrecht zur großen Axe stehen muß, ist sogleich einzusehen, da der Durchschnittspunkt der in F_1 senkrecht auf AB stehenden Sehne $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ der dem Punkt F_1 zugeordnete harmonische sein muß, diese Sehne aber nach Lehrsatz 51. α) in F_1 halbirt wird, also ihr Durchschnitt mit der Polaren im Unendlichen sich befinden muß. Ein Gleiches gilt von d_2. Um nun den Punkt D_1 zu finden, kann man entweder davon ausgehen, daß hier die Tangenten an $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, zugleich aber auch die Kreistangenten an $\mathfrak{F}'_1$ und $\mathfrak{F}'_2$ sich schneiden müssen. Da nun beim Kreise die Tangenten senkrecht zum Halbmesser stehen, so läßt sich aus den ähnlichen Dreiecken $MF_1\mathfrak{F}'_1$ und $\mathfrak{F}'_1F_1D_1$, die Strecke F_1D_1 und also auch BD_1 finden; oder man setzt, da d_1 die Polare von F_1, also Punktreihe s, AF_1BD_1 harmonisch ist, die Proportion an:

$$AF_1 : BF_1 = AD_1 : BD_1$$

d. h., da also $MA = MB = a$, $MF_1 = e$ ist:

$$a + e : a - e = 2a + BD_1 : BD_1,$$

oder
$$2e : a - e = 2a \quad : BD_1,$$

also, da offenbar $AD_2 = BD_1$ sein muß, weil $AF_2 = BF_1$ ist,

$$AD_2 = BD_1 = \frac{a}{e}(a - e).$$

Ziehen wir nun durch irgend einen Punkt T_1 der Polaren d_1 eine Parallele zu s, welche die Curve in zwei Punkten, P und Q schneidet, ziehen durch einen derselben, z. B. durch P eine Senkrechte auf AB, und verbinden ihn mit F_1 und F_2 durch die Geraden F_1P und F_2P oder ρ_1 und ρ_2, so ist:

$$F_1P^2 = F_1N^2 + NP^2$$

oder, da $NP = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - MN^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (e + F_1N)^2}$ ist,

$$\rho_1^2 = F_1N^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}(e + F_1N)^2$$

$$= F_1N^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}\cdot(e^2 + 2eF_1N + F_1N^2)$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2}F_1N^2 - 2\frac{b^2}{a^2}\cdot eF_1N + \frac{a^2 - e^2}{a^2}\cdot b^2.$$

Nun ist

$a^2 - b^2 = M\mathfrak{F}_1'^2 - MA'^2 = A'\mathfrak{F}'^2 = MF_1^2 = e^2$, und daher

$a^2 - e^2 = b^2$, also

$$\rho_1^2 = \frac{e^2}{a^2}\cdot F_1N^2 - 2\frac{b^2}{a^2}eF_1N + \frac{b^4}{a^2}$$

$$= \left(\frac{e}{a}\cdot F_1N - \frac{b^2}{a}\right)^2,$$

also $$\rho_1 = \pm\left(\frac{e}{a}\cdot F_1N - \frac{b^2}{a}\right) = \pm\frac{eF_1N - b^2}{a}.$$

Ferner ist $T_1P = BD_1 + NB = \frac{a}{e}\cdot(a - e) + (a - e) - F_1N$

$$= \frac{(a + e)(a - e)}{e} - F_1N = \frac{a^2 - e^2}{e} - F_1N = \frac{b^2}{e} - F_1N$$

$$= \frac{b^2 - e\cdot F_1N}{e}.$$

Da nun T_1P positiv sein muß, so sieht man aus dieser letzten Gleichung, daß $b^2 - eF_1N$ positiv ist; es ist also, da auch ρ_1 positiv sein muß, in dem Ausdrucke für ρ_1 das —Zeichen zu nehmen. Daher hat man die Gleichungen:

$$\rho_1 = \frac{b^2 - e\cdot F_1N}{a};\ T_1P = \frac{b^2 - e\cdot F_1N}{e};$$

also $\rho_1 : T_1P = e : a,$

oder: $\rho_1 : T_1P = \frac{e}{a} : 1.$

Da nun $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, also $< a$ ist, so ist $\frac{e}{a}$ ein ächter Bruch, also $\rho_1 < T_1P$. Es ist ebenso auch

$$\begin{aligned}\rho_2^{\,2} &= F_2N^2 + NP^2 \\ &= F_2N^2 + \frac{b^2}{a^2}[a^2 - (F_2N - e)^2] \\ &= F_2N^2 + \frac{b^2}{a^2}[a^2 - e^2 + 2eF_2N - F_2N^2] \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a^2} F_2N^2 + 2\frac{b^2}{a^2} \cdot eF_2N + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - e^2) \\ &= \frac{e^2}{a^2} F_2N^2 + 2\frac{b^2}{a^2} \cdot eF_2N + \frac{b^4}{a^2} \\ &= \left(\frac{b^2 + eF_2N}{a}\right)^2;\end{aligned}$$

folglich $\rho_2 = \frac{b^2 + e \cdot F_2N}{a}$;

und $T_2P = AD_2 + AN = \frac{a}{e}(a - e) + (a - e) + F_2N$

$$= \frac{a^2 - e^2}{e} + F_2N = \frac{b^2 + e \cdot F_2N}{e};$$

also $\rho_2 : T_2P = e : a$

oder $\rho_2 : T_2P = \frac{e}{a} : 1.$

Wir haben also:

$$\rho_1 = \frac{e}{a} \cdot T_1P; \quad \rho_2 = \frac{e}{a} \cdot T_2P;$$

also: $\rho_1 + \rho_2 = \frac{e}{a}(T_1P + T_2P)$;

$$= \frac{e}{a}(AB + 2BD_1) = \frac{e}{a}\left(2a + 2\frac{e}{a}(a - e)\right)$$

$$= 2 \cdot e \cdot \frac{e + a - e}{e} = 2a.$$

Es ist also $\rho_1 + \rho_2 = 2a.$

Es ist also, da 2a eine constante Größe ist, die Summe der von den beiden Punkten F_1, F_2, ausgehenden Leitstrahlen constant, und zwar gleich der großen Axe. Dieß ist aber die Eigenschaft der unter dem Namen „Ellipse" bekannten Curve. Umgekehrt kann man auf bekanntem Wege aus der Eigenschaft, daß die Summe der Leitstrahlen $\gamma_1 + \rho_2$ constant, $= 2a$, sein soll, das Gesetz ableiten, daß für jeden Punkt P der durch diese Bedingung bestimmten Curve, wenn man F_1F_2 durch 2e, $\sqrt{a^2 - e^2}$ mit b, MN mit x, NP mit y' bezeichnet, die Gleichung bestehen muß $y' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Man sieht also, daß, wenn man über der großen Axe der Ellipse als Durchmesser einen Kreis beschreibt,

$$\frac{A'\mathfrak{A}_1}{A'\mathfrak{A}'_1} = \frac{\Gamma'\mathfrak{S}_1}{\Gamma'\mathfrak{S}'_1} = \frac{B'\mathfrak{B}_1}{B'\mathfrak{B}'_1} = \ldots. = \frac{b}{a}$$

Fig. 135. sein muß. Zieht man nun im Kreise irgend eine Sehne $\mathfrak{A}'_1\mathfrak{B}'_2$, welche die s in Γ' schneidet, und von $\mathfrak{A}_1$ der Ellipse die Sehne $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2$, wenn $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ solche Ellipsenpunkte sind, die mit $\mathfrak{A}'_1$ und $\mathfrak{B}'_2$ auf derselben Senkrechten zur großen Axe stehen, und bestimmt ihren Durchschnittspunkt mit s, so läßt sich sogleich zeigen, daß der Durchschnittspunkt von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2$ mit der großen Axe AB mit Γ' zusammenfallen muß. Denn man hat im Kreise $\triangle \Gamma'A'\mathfrak{A}'_1 \sim \triangle \Gamma'B'\mathfrak{B}'_2$, also verhält sich $\Gamma'A' : \Gamma'B' = A'\mathfrak{A}'_1 : B'\mathfrak{B}'_2$. Nennen wir den noch unbekannten Durchschnittspunkt von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2$ mit AB: Γ'', so muß, da in der Ellipse $\triangle \Gamma''A'\mathfrak{A}_1 \sim \triangle \Gamma''B'\mathfrak{B}_2$ ist, sich verhalten $\Gamma''A' : \Gamma''B' = A'\mathfrak{A}_1 : B'\mathfrak{B}_2$. Da aber $\frac{A'\mathfrak{A}_1}{A'\mathfrak{A}'_1} = \frac{b}{a}$, und auch $\frac{B'\mathfrak{B}}{B'\mathfrak{B}'_2} = \frac{b}{a}$ ist, so folgt $\frac{A'\mathfrak{A}_1}{B'\mathfrak{B}_2} = \frac{A'\mathfrak{A}'_1}{B'\mathfrak{B}'_2}$, oder $A'\mathfrak{A}_1 : B'\mathfrak{B}_2 = A'\mathfrak{A}'_1 : B'\mathfrak{B}'_2$; man hat also auch $\Gamma'A' : \Gamma'B' = \Gamma''A' : \Gamma''B'$, folglich $\Gamma'A' : \Gamma'A' + \Gamma'B' = \Gamma''A' : \Gamma''A' + \Gamma''B'$ oder $\Gamma'A' : A'B' = \Gamma''A' : A'B'$, also $\Gamma''A' = \Gamma'A'$. Es muß demnach Γ'' mit Γ' zusammenfallen; ebenso läßt sich von den Sehnen $\mathfrak{A}'_1\mathfrak{B}'_1$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ zeigen, daß sie die Axe in demselben Punkte Γ schneiden. Es entstehen also bei $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}'_1$ zwei perspectivische, also auch conforme, Strahlbüschel. Man erkennt daher sogleich, daß der mit dem Radius a beschriebene Kreis der Ellipse mit der großen Halbaxe a perspectivisch collinear für ein unendlich entferntes Collineationscentrum, also perspectivisch affin ist. Da nun im Kreise jede zwei Strahlbüschel, die entstehen, wenn man zwei Punkte der Peripherie mit beliebigen anderen verbindet, gleich, also auch conform sind, so folgt nach § 7. Lehrsatz 9., daß auch in der Ellipse die homologen Strahlbüschel, wenn auch nicht gleich, doch im Allgemeinen conform sind. Es ist z. B. im Kreise, wenn man sich etwa nach Sehne $\mathfrak{A}'_1\mathfrak{C}'_2$, und $\mathfrak{B}'_1\mathfrak{C}'_2$ gezogen denkt, $\angle A\mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}'^2 = \angle \mathfrak{A}'_1\mathfrak{B}'_1\mathfrak{A}'_2$, da $(A - \mathfrak{A}'_1)$ die Tangente, $\angle \mathfrak{A}'_1\mathfrak{B}'_1\mathfrak{A}'_2$ ein Peripheriewinkel über der Sehne $\mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}'_2$ ist, $\angle \mathfrak{A}'_2\mathfrak{A}'_1\mathfrak{C}'_2 = \angle \mathfrak{A}'_2\mathfrak{B}'_1\mathfrak{C}'_2$, $\angle \mathfrak{C}'_2\mathfrak{A}'_1\mathfrak{B}'_2 = \angle \mathfrak{C}'_2\mathfrak{B}'_1\mathfrak{B}'_2$ als Peripheriewinkel, $\angle \mathfrak{B}'_2\mathfrak{A}'_1\mathfrak{B}'_1 = \angle \mathfrak{B}'_2\mathfrak{B}'_1 B$ u. s. w., also Strahlbüschel $\mathfrak{A}'_1, A\mathfrak{A}'_2\mathfrak{C}'_2\mathfrak{B}'_2\mathfrak{B}'_1 =$ Strahlbüschel $\mathfrak{B}'_1, \mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}'_2\mathfrak{C}'_2\mathfrak{B}'_2 B$; also dem angezogenen Lehrsatz zufolge, in der Ellipse Strahlbüschel $\mathfrak{A}_1, A\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_1 \overline{\wedge}$ Strahlbüschel $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{B}_2 B$ etc. Ebenso läßt sich dieß von jedem anderen Paar Strahlbüschel zeigen. Da nun nach § 10. Lehrsatz 3. auch die Tangenten an jedem Paar homologer Curvenpunkte ein Paar homologer Linien der collinearen oder affinen Systeme sind, und nach Lehrsatz 53. im Kreise z. B. auf den Tangenten $\mathfrak{a}'_1$ und $\mathfrak{b}'_1$ die conformen Punktreihen $\mathfrak{a}'_1, \mathfrak{A}'_1(\mathfrak{a}'_1 \cdot \mathfrak{a}'_2)(\mathfrak{a}'_1 \cdot \mathfrak{c}'_2)(\mathfrak{a}'_1 \cdot \mathfrak{b}'_2)(\mathfrak{a}'_1 \cdot \mathfrak{b}'_1) \overline{\wedge} \mathfrak{b}'_1, (\mathfrak{b}'_1 \cdot \mathfrak{a}'_1)(\mathfrak{b}'_1 \cdot \mathfrak{a}'_2)(\mathfrak{b}'_1 \cdot \mathfrak{c}'_2)(\mathfrak{b}'_1 \cdot \mathfrak{b}'_2)\mathfrak{B}_1$ entstehen, so muß auch an der Ellipse Punktreihe $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{A}_1(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2)(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{c}_2)(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_2)(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_1) \overline{\wedge} \mathfrak{b}_1, (\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{a}_1)(\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{a}_2)(\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{c}_2)(\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2)\mathfrak{B}_1$ sein, und so bei jedem anderen Paare. Man er-

hält demnach, da man auch hier sogleich sieht, daß Punktreihen und Strahlbüschel einstimmig verlaufen, den

54. **Lehrsatz. Die Curve e ist eine Ellipse. Und umgekehrt:**

In jeder Ellipse entstehen zwei einstimmig verlaufende conforme Strahlbüschel, wenn man irgend zwei Punkte des Umfangs mit beliebigen anderen verbindet, und zwei einstimmig verlaufende conforme Punktreihen, wenn man irgend zwei Tangenten durch beliebige andere schneidet.

Um die Natur der Curven h, h' zu erforschen, halten wir uns auch hier wieder zunächst an die einfachere h'. Es war bereits an Fig. 117. zum Behufe des Beweises von Lehrsatz 27. gezeigt worden, daß, wenn zwei gleiche entgegengesetzt verlaufende Strahlbüschel S, S' Fig. 117. die Curve h' beschreiben, die Tangenten t, p' an S, S' parallel sind, deren Durchschnittspunkt T also im Unendlichen liegt. Denken wir uns nun durch T eine Sehne, deren Richtung parallel t, oder p' oder $(A_1 - A_2)$ ist, die aber in unendlicher Ferne liegt, durch die Curve gezogen, so muß sie dieselbe in den beiden unendlich entfernten Punkten schneiden, und auch durch den unendlich entfernten Punkt von (S−S') gehen. Die Tangenten an die beiden unendlich entfernten Curvenpunkte müssen sich nun nach Lehrsatz 28. auf (S − S'), und zwar in einem solchen Punkte schneiden, der dem unendlich entfernten Punkte von (S − S') in der Punktreihe (S − S'), S ∞ S' harmonisch zugeordnet ist. Es muß also der Durchschnittspunkt der Asymptoten der Mittelpunkt O der Sehne SS' sein. Es ist also nach Lehrsatz 47. O der Mittelpunkt der Curve, und SS' ein Durchmesser. Da wir nun in Lehrsatz 27. sahen, daß bei der Curve h' nur an solchen Punkten A_1 $\mathcal{A}_1$ gleiche, entgegengesetzt verlaufende Strahlbüschel entstehen, deren Sehne durch O geht, und hier halbirt wird, die also nach Erklärung 46. ein Durchmesser ist, so können wir sagen:

55. **Lehrsatz. Die Scheitel S, S' zweier gleichen, entgegengesetzt verlaufenden, die Curve h' erzeugenden Strahlbüschel liegen allemal an den Endpunkten eines Durchmessers der Curve h', und umgekehrt.**

56. **Lehrsatz. In der Curve h' entstehen an den Endpunkten jedes Durchmessers, und nur an diesen, je zwei gleiche, entgegengesetzt verlaufende Strahlbüschel.**

Es sind dem letzteren Lehrsatze zufolge auch die an den Scheiteln entstehenden Strahlbüschel gleich und entgegengesetzt verlaufend. Zunächst erhellt, daß die Asymptoten r, q parallel sein müssen den von den beiden Scheiteln A, B, Fig. 137. nach den unendlich entfernten Punkten der Curve gehenden Strahlen m, m', n, n', denn sowohl r, m, m' gehen nach demselben unendlich entfernten Punkt, als q, n, n', es ist also r ‖ m ‖ m', q ‖ n ‖ n'. Nach Lehrsatz 51. β) ist nun $\angle$ rs

$= \angle qs$, also auch $\angle ms = \angle m's = \angle ns = \angle n's$, wenn s die Richtung der großen Axe ist. Da ferner nach Lehrsatz 51. β) sowohl die Scheitel-Tangenten a, b, als t senkrecht zu s sind, so ist $a \parallel b \parallel t$. Da nun nach demselben Lehrsatz $\angle rt = \angle qt$ ist, so folgt also $\angle mb = \angle m'a = \angle nb = \angle n'a$. Da aber A und B auch die Scheitel zweier gleicher Strahlbüschel sind, in denen s dem a, b dem s entspricht, so ist auch $\angle ms = \angle m'a$, $\angle ns = \angle n'a$. Es war aber $\angle n'a = \angle mb$, also ist $\angle ms + \angle ns = \angle ms + \angle mb$, oder $\angle mn = \angle sb$. Es ist aber, da $b \perp s$ ist, $\angle sb = 1R$, also auch $\angle mn = 1R$; also auch $\angle m'n' = 1R$ und $\angle rq = 1R$. (Da $\angle mn = \angle m'n' = 1R$ ist, so muß das von m, n, m', n' gebildete einfache Viereck ein Quadrat sein, und daher t, da es die Diagonale AB halbirt und auf ihr senkrecht steht, die Richtung der zweiten Diagonale sein, oder es muß $(m \cdot n')$ und $(n \cdot m')$ auf t liegen.) Man sieht also, daß in der Curve h' die Asymptoten r, q, senkrecht auf einander stehen. Hieraus folgt noch Folgendes. Sind Q, Q' ein Paar Punkte an demselben Aste der Curve h', so müssen die entsprechenden Strahlen, s, s'; t, t', die nach den unendlich entfernten Punkten gerichtet sind, parallel sein, und zwar parallel den ebenfalls nach den unendlich entfernten Punkten gerichteten Asymptoten. Da diese aber auf einander senkrecht stehen, so muß auch $s \perp t$; $s' \perp t'$ stehen. Nun entstehen in Q, Q' nach Lehrsatz 19. ein Paar conformer Strahlbüschel. Nach § 2. Lehrsatz 14. giebt es aber in jedem Paar conformer Strahlbüschel ein, aber nur ein einziges Paar entsprechender Strahlen, die auf einander senkrecht stehen; es müssen also s, t; s', t' die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel selbst sein. Ebenso müssen, wenn man einen Punkt $\mathfrak{Q}$ auf dem anderen Aste annimmt, auch $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel sein (vgl. Lehrsatz 4.). Man sieht also:

57. **Lehrsatz.** In der Curve h' stehen die Asymptoten auf einander senkrecht; und:

In jedem Paar conformer Strahlbüschel Q, Q'; Q, $\mathfrak{Q}$, sind die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel s, t; s', t'; s, t; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ einander parallel, nämlich $s \parallel s'$, $t \parallel t'$, $s \parallel \mathfrak{s}$, $t \parallel \mathfrak{t}$. Fig. 137.

Es sei nun P irgend ein Punkt der Curve h'; d und d' die von B und A nach ihm gezogenen Projectionsstrahlen, PN das auf die Axe s gefällte Loth, so ist, da in B und A gleiche Strahlbüschel sich befinden, $\angle sd = \angle ad'$, da aber $\angle sa = 1R$ ist, so ist $\angle sd' = 1R - \angle ad' = 1R - \angle sd$, d. h. es ist $\angle sd' = \angle BPN$. Da nun in den beiden Dreiecken BNP und PNA der rechte Winkel N gemeinschaftlich ist, so ist $\triangle BNP \sim \triangle PNA$ und es verhält sich:

$$BN : NP = NP : AN.$$

Bezeichnen wir nun die große Halbaxe $MA = MB$ mit a (welches also

jetzt nicht die Tangente in A bezeichnet), die Strecke MN mit x, NP mit y, so können wir die Proportion schreiben:

$$x - a : y = y : x + a,$$

woraus folgt: $$x^2 - y^2 = a^2;$$

oder: $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1.$$

Da nach Lehrsatz 51. β) der Asymptotenwinkel durch die Axen halbirt wird, so muß, weil $\angle rq = 1R$ ist, $\angle rs = \frac{1}{2}R$, also die kleine Halbaxe $BC = MB$, mithin gleich der großen Halbaxe a sein. Ziehen wir nun durch C eine Parallele zur Axe s, und von ihren beiden Durchschnittspunkten $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ mit der Curve h' eine Parallele zu t, welche die s in den Punkten F_1, F_2 schneidet, und verbinden hierauf F_1 und F_2 mit einem beliebigen Curvenpunkt P durch die Geraden ρ_1, ρ_2, so ist, indem wir a für y, MF für x setzen:

$$MF_1^2 - a^2 = a^2,$$

woraus sich sogleich, da offenbar $MF_2 = MF_1$ ist, ergiebt:

$$MF_1 = MF_2 = a\sqrt{2}.$$

Ferner ist: $\rho_1^2 = F_1N^2 + NP^2$; $\rho_2^2 = F_2N^2 + NP^2$;

oder: $\rho_1^2 = (x - MF_1)^2 + y^2$; $\rho_2^2 = (x + MF_2)^2 + y^2$;

oder: $\rho_1^2 = (x - a\sqrt{2})^2 + y^2$; $\rho_2^2 = (x + a\sqrt{2})^2 + y^2$;

also, da $y^2 = x^2 - a^2$ ist:

$\rho_1^2 = x^2 - 2ax\sqrt{2} + 2a^2 + x^2 - a^2$; $\rho_2^2 = x^2 + 2ax\sqrt{2} + 2a^2 + x^2 - a^2$;

oder:

$\rho_1^2 = 2x^2 - 2ax\sqrt{2} + a^2$; $\rho_2^2 = 2x^2 + 2ax\sqrt{2} + a^2$;

oder:

$\rho_1^2 = (x\sqrt{2} - a)^2$; $\rho_2^2 = (x\sqrt{2} + a)^2$;

also:

$\rho_1 = \pm(x\sqrt{2} - a)$; $\rho_2 = \pm(x\sqrt{2} + a)$.

Da nun schon $x > a$, also um so mehr $x\sqrt{2} > a$ ist, so muß in dem Werthe für ρ_1 das obere Zeichen genommen werden. Dasselbe ist mit ρ_2 der Fall, da ρ_1 und ρ_2 positive Werthe haben müssen. Es ist also:

$$\rho_1 = x\sqrt{2} - a; \quad \rho_2 = x\sqrt{2} + a;$$

also: $$\rho_2 - S_1 = 2a.$$

Es ist also die Differenz der von F_1 und F_2 ausgehenden Leitstrahlen constant. Mithin ist die Curve eine Hyperbel, und zwar, da die kleine Halbaxe BC gleich der großen ist, eine gleichseitige Hyperbel. Sucht man die (in der Figur nicht verzeichneten, vgl. übrigens Fig. 139.) Polaren d_1, d_2 der Punkte F_1, F_2, so überzeugt man sich ebenso, wie bei der Ellipse, daß sie senkrecht zur Axe s stehen. Die Entfernung des Durchschnittspunkts D_1 der Polaren d_1 mit s findet sich durch die harmo-

nische Proportion $AD_1 : BD_1 = AF_1 : BF_1$ oder $2a - BD_1 : BD_1 = a\sqrt{2} + a : a\sqrt{2} - a$, oder $2a - BD_1 : BD_1 = \sqrt{2} + 1 : \sqrt{2} - 1$, oder $2a : BD_1 = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} - 1$, also:

$$BD_1 = AD_2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \cdot a.$$

Schneidet man d_1 und d_2 in T_1, T_2 durch Gerade, die parallel s sind und durch irgend einen Curvenpunkt P gehen, so ist $T_1P = BD_1 + BN = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \cdot a + x - a = \frac{x\sqrt{2} - a}{\sqrt{2}}$; $T_2P = a - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \cdot a + x = \frac{x\sqrt{2} + a}{\sqrt{2}}$. Man hat also:

$$\rho_1 : T_1P = \sqrt{2} : 1; \; \rho_2 : T_2P = \sqrt{2} : 1.$$

Daß umgekehrt in einer gleichseitigen Hyperbel die an den Endpunkten eines Durchmessers entstehenden Strahlbüschel gleich sein müssen, läßt sich leicht beweisen, wenn man zunächst Folgendes erwägt. Es entsteht im Mittelpunkt M nach Lehrsatz 44. ein involutorischer Strahlbüschel mit den Asymptoten r, q als Hauptstrahlen. Dieselben bilden nach Lehrsatz 50. β) mit jedem Paar conjugirter Durchmesser, z. B. c, c′ Fig. 138. einen harmonischen Strahlbüschel. Da nun bei der gleichseitigen Hyperbel nach Lehrsatz 57. der Asymptotenwinkel ein Rechter ist, so halbiren nach Lehrsatz 27. die Asymptoten r, q, die eine den spitzen Winkel $\angle cc'$, die andere den stumpfen Winkel $180^0 - \angle cc'$. Man sieht also allgemein:

58. Lehrsatz. In der gleichseitigen Hyperbel wird der von jeden zwei conjugirten Durchmessern c, c′ gebildete Winkel von den Asymptoten halbirt.

Dieser Satz nun läßt sich auch umgekehrt auf bekannte Weise aus der Eigenschaft der Curve ableiten, daß die Differenz der Leitstrahlen $\rho_2 - \rho_1$ einen constanten Werth, nämlich 2a, hat, und daß in ihr die Asymptoten auf einander senkrecht stehen. Ebenso ergiebt sich hieraus leicht der Satz, daß Sehnen, die parallel sind dem einen von zwei conjugirten Durchmessern, von dem andern halbirt werden; und sodann zeigt man, daß die Strahlbüschel, deren Scheitel in den Endpunkten liegen, gleich sind, auf folgende Weise, Fig. 138.*): Es seien c, c′; d, d′, zwei Paar conjugirter Durchmesser, so ist $\angle rc = \angle rc'$ nach dem also direkt bewiesenen Lehrsatz 58. $\angle rd = \angle rd'$, also auch $\angle rd - \angle rc = \angle rd' - \angle rc'$, d. h. $\angle cd = \angle c'd'$. Legen wir nun an C_1 eine Tangente c_1, die also $\parallel c'$ ist, und ziehen durch C_1 eine Sehne $(C_1 - P)$ oder $u_1 \parallel d'$, so wird letztere von d in K**) halbirt. Es ist nun $\angle c_1u_1 = \angle c'd'$, also auch $\angle c_1u_1 = \angle cd$. Ziehen wir nun

*) S. Paulus: „Grundlinien der neueren Geometrie", Seite 285.
**) Der Buchstabe K konnte in der Figur nicht hinzugesetzt werden.

$(C_2 - P)$ oder u_2, so verhält sich, da C_1C_2 in M, C_1P in K halbirt wird, $C_1M : C_1C_2 = C_1K : C_1P$, es ist also $(C_2 - P)$ oder $u_2 \parallel d$, also $\angle cu_2 = \angle cd$, folglich $\angle c_1u_1 = \angle cu_2$. Wählt man statt d, d' irgend ein anderes Paar conjugirter Durchmesser, und zieht zu dem die Curve nicht schneidenden eine Parallele v_1 durch C_1, welche die Hyperbel in Q schneidet, so ist ebenso $\angle cv_1 = \angle cu_2$, und so bei jedem anderen Punkt. Es ist also Strahlbüschel $C_1, c_1u_1v_1 \ldots = $ Strahlbüschel $C_2, cu_2v_2 \ldots$ Jedes Paar anderer Strahlbüschel ist also nach Lehrsatz 19., da Gleichheit nur ein specieller Fall von Conformität ist, conform, und zugleich sind, da der zweite der in Lehrsatz 57. aufgestellten Sätze eine nothwendige Folge des ersten war, die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel in jedem beliebigen Paar Strahlbüscheln einander parallel. Aus dem so eben Gesagten, und Lehrsatz 40. rechts, Lehrsatz 41. und Erklärung 30. erhält man also den

59. Lehrsatz. Die Curve h' ist eine gleichseitige Hyperbel; und umgekehrt:

In jeder gleichseitigen Hyperbel entstehen an den Endpunkten jedes Durchmessers als Scheiteln ein Paar gleiche, entgegengesetzt verlaufende, in jedem andern Paar Punkten ein Paar conformer Strahlbüschel, in denen die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel parallel sind. Jede zwei Tangenten werden von den übrigen conform geschnitten. Diese Punktreihen verlaufen einstimmig, wenn die die Punktreihen enthaltenden zwei Tangenten an demselben, entgegengesetzt, wenn sie an verschiedenen Aesten der Hyperbel liegen.

Um die Curve h zu untersuchen, construiren wir eine gleichseitige Hyperbel, welche mit h die große Axe AB, Fig. 139., gemein hat. Man überzeugt sich dann genau auf dieselbe Weise, wie es für Kreis und Ellipse an Fig. 135. gezeigt worden war, daß die Tangenten an $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}'_1$ an $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}'_1$ u. s. w. sich in demselben Punkt von s schneiden, und überhaupt, daß die Curve h mit der so beschriebenen gleichseitigen Hyperbel affin in perspectivischer Lage ist für s als Axe. Es ist also:

$$\frac{A'\mathfrak{A}_1}{A'\mathfrak{A}'_1} = \frac{B\mathfrak{B}'_1}{B'\mathfrak{B}'_1} = \ldots$$

constant. Da nun die Asymptoten sowohl der Curve h, als der gleichseitigen Hyperbel nach § 10. Lehrsatz 3. homologe Gerade der beiden Systeme sind, und b ein Affinitätsstrahl ist, so sind die Endpunkte C, C' der kleinen Halbaxen BC, BC' homologe Punkte der Affinität. Nennen wir nun die Halbaxe MA = MB a, so ist bei der gleichseitigen Hyperbel BC' auch = a; bei der Curve h heiße die Länge BC b (wo also a und b nicht die Scheitel-Tangenten bedeuten); es ist demnach:

$$\frac{A'\mathfrak{A}_1}{A'\mathfrak{A}'_1} = \frac{B'\mathfrak{B}_1}{B'\mathfrak{B}'_1} = \dots = \frac{b}{a}.$$

Nun ist die halbe zur Axe s senkrechte Sehne y eines jeden Punktes der gleichseitigen Hyperbel, wenn der Fußpunkt der Sehne y vom Mittelpunkt M um die Strecke x entfernt ist, bestimmt durch das Gesetz $x^2 - y^2 = a^2$ oder $y = \sqrt{x^2 - a^2}$; bezeichnen wir die auf demselben Affinitätsstrahl mit y liegende halbe Sehne der Curve h mit y', so ist also: $\frac{y'}{y} = \frac{b}{a}$; also ist:

$$y' = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2};$$

oder:
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1.$$

Ziehen wir durch C eine Parallele zur Axe s, welche die gleichseitige Hyperbel in dem Punkte $\mathfrak{F}'_1$ trifft, und ziehen durch $\mathfrak{F}'_1$ eine Senkrechte zu s, deren Fußpunkt F_1 heiße, und welche die Curve h in $\mathfrak{F}_1$ schneidet, und verfahren ebenso an dem anderen Curvenaste, wodurch man den Punkt F_2 auf s erhält, so ist leicht zu sehen, daß $MF_1 = MF_2$ sein muß. Es heiße nun $MF_1 = MF_2 = e$. Suchen wir die Durchschnittspunkte D_1, D_2 der Polaren d_1, d_2 der Punkte F_1, F_2, so hat man:

$$e + a : e - a = 2a - BD_1 : BD_1$$

oder:
$$2e : e - a = 2a : BD_1$$

also:
$$AD_2 = BD_1 = \frac{a}{e}(e - a).$$

Ziehen wir durch irgend einen Punkt T_1 von d_1 eine Parallele zu s, welche die h in den Punkten P, Q schneidet, und dann von F_1, F_2 aus die Leitstrahlen ρ_1, ρ_2, so ist:

$$F_1P^2 = F_1N^2 + NP^2,$$

oder, da $NP = \frac{b}{a}\sqrt{MN^2 - a^2} = \frac{b}{a}\sqrt{(e + F_1N)^2 - a^2}$ ist,

$$\rho_1^2 = F_1N^2 + \frac{b^2}{a^2}(e + F_1N)^2 - b^2;$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2} F_1N^2 + 2\frac{b^2}{a^2} eF_1N + \frac{e^2 - a^2}{a^2} \cdot b^2.$$

Nun ist $F_1\mathfrak{F}'_1$ eine halbe Sehne in der gleichseitigen Hyperbel, also: $F_1\mathfrak{F}'_1 = \sqrt{MF_1^2 - a^2}$, d. h. es ist $b = \sqrt{e^2 - a^2}$, also $a^2 + b^2 = e^2$, und daher $e^2 - a^2 = b^2$;

also ist
$$\rho_1^2 = \frac{e^2}{a^2} F_1N^2 + 2\frac{b^2}{a^2} eF_1N + \frac{b^4}{a^2}$$

$$= \left(\frac{e}{a} \cdot F_1N + \frac{b^2}{a}\right)^2,$$

also, da nur positive Werthe für ρ_1 statt haben können:

$$\rho_1 = \frac{e \cdot F_1N + b^2}{a}.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\rho_1^2 = \left(\frac{e}{a}\cdot F_2N - \frac{b^2}{a}\right)^2.$$

Da nun sowohl e, als F_2N größer ist als b, so folgt hieraus:

$$\rho_2 = \frac{e\cdot F_2N - b^2}{a}.$$

Ferner ist $T_1P = BD_1 + BN = \frac{a}{e}(e-a) + e - a + F_1N$

$$= \frac{e^2-a^2}{e} + F_1N = \frac{e\cdot F_1N + b^2}{e};$$

und $T_2P = AN - AD_2 = F_2N - (e-a) - \frac{a}{e}(e-a)$

$$= F_2N - \frac{e^2-a^2}{e} = \frac{e\cdot F_2N - b^2}{e}.$$

Es verhält sich also:

$$\rho_1 : T_1P = e : a; \quad \rho_2 : T_2P = e : a,$$

oder: $\rho_1 : T_1P = \frac{e}{a} : 1; \quad \rho_2 : T_2P = \frac{e}{a} : 1;$

und zwar ist hier, da $e = \sqrt{a^2+b^2}$ ist, $\frac{e}{a} > 1$.

Es ist also: $\rho_2 - \rho_1 = \frac{e}{a}(T_2P - T_1P) = \frac{e}{a}(AB - 2BD_1)$

$$= \frac{e}{a}\left[2a - 2\frac{e}{a}(e-a)\right] = 2a;$$

also: $\rho_2 - \rho_1 = 2a.$

Es ist demnach auch hier die Differenz der Leitstrahlen ρ_2 und ρ_1 constant, also die Curve h, da die kleine Halbaxe nicht gleich der großen ist, eine gemeine Hyperbel. Von dem umgekehrten Satze, daß in einer solchen zwei conforme Strahlbüschel entstehen, wenn man eine Anzahl von Curvenpunkten mit zwei andern verbindet, überzeugt man sich ebenso wie bei der Ellipse mit Hülfe der leicht nachzuweisenden Affinität zwischen gleichseitiger und gewöhnlicher Hyperbel. Wir können jedoch den dem Lehrsatz 54. analogen nicht so allgemein aussprechen, als diesen. Es hatte sich nämlich gezeigt, daß die Curve, welche von einem Paar einstimmig verlaufender gleicher Strahlbüschel erzeugt wird, die Eigenschaft hat, daß alle Paare Strahlbüschel in ihr gleich sind (s. Lehrsatz 27). Es kann daher in der Curve, die man erhält, wenn man durch zwei einstimmig verlaufende conforme, aber nicht gleiche, Strahlbüschel eine solche entstehen läßt, niemals ein Paar Strahlbüschel gleich sein, denn sonst wäre dieß nach Lehrsatz 27. mit allen der Fall, während doch der Voraussetzung nach, wenigstens ein Paar nur conform, und nicht gleich sein kann. Läßt man aber eine Curve durch ein Paar gleicher entgegengesetzt verlaufender Strahlbüschel entstehen, so sind nach Lehrsatz 27. nicht jede zwei beliebige Paare Strahlbüschel gleich, wohl aber sind nach Lehrsatz 19. alle conform. Man

kann sich demnach die Curve h′, d. h. die gleichseitige Hyperbel, auch durch conforme, aber nicht gleiche, Strahlbüschel entstanden denken; oder: Läßt man eine Curve durch entgegengesetzt verlaufende gleiche Strahlbüschel entstehen, so erhält man bestimmt eine gleichseitige Hyperbel, läßt man aber eine Curve durch einstimmig oder entgegengesetzt verlaufende nicht gleiche Strahlbüschel entstehen, so wird man im Allgemeinen eine gemeine Hyperbel erhalten; es kann sich aber auch treffen, daß man eine gleichseitige erhält, wie man sich z. B. die gleichseitige Hyperbel, Fig. 138., durch die nicht gleichen, sondern nur conformen Strahlbüschel P und Q, oder D_2 und Q entstanden denken kann. Man muß daher sagen:

60. Lehrsatz. Die Curve h ist stets eine Hyperbel, und zwar im Allgemeinen eine gemeine Hyperbel, sie kann aber auch eine gleichseitige Hyperbel sein. Und umgekehrt:
In jeder Hyperbel entstehen conforme Strahlbüschel, wenn man eine Anzahl von Curvenpunkten mit zwei andern verbindet; diese Strahlbüschel verlaufen einstimmig, wenn ihre Scheitel an demselben, entgegengesetzt, wenn sie an verschiedenen Curvenästen liegen. Es entstehen ferner conforme Punktreihen, wenn man mit einer Anzahl von Tangenten zwei andere schneidet; diese Punktreihen verlaufen einstimmig, wenn ihre Richtungen Tangenten an demselben, entgegengesetzt, wenn ihre Richtungen Tangenten an verschiedenen Curvenästen sind.

Es ist nun noch die Curve p zu untersuchen übrig. Es sei Fig. 132. c. 133. c. der Punkt Σ der Durchschnittspunkt von zwei an sie gelegten Tangenten, $\mathcal{AB}$ die Berührungssehne, so ist also Σ der Pol von $(\mathcal{A}-\mathcal{B})$, und nach Lehrsatz 50. γ) liegt Σ auf einer durch den Mittelpunkt N von $\mathcal{AB}$ nach dem unendlich entfernten Curvenpunkt gehenden Geraden. Es ist nun, da Σ der Pol von $(\mathcal{A}-\mathcal{B})$ ist, wenn wir den unendlich entfernten Punkt auf σ' in Fig. 132. c. und auf s in Fig. 133. c. mit ∞ bezeichnen, Punktreihe $\sigma', \Sigma\mathcal{A}'N\infty$ und Punktreihe $s, \Sigma AN\infty$ harmonisch, es muß also $\Sigma\mathcal{A}' = N\mathcal{A}'$; $\Sigma A = NA$ sein. Man erhält also den

61. Lehrsatz. Ist in der Curve p von irgend einem Punkte $\mathcal{A}'$ aus eine Parallele σ' zur Axe s, und irgend eine Sehne $\mathcal{AB}$ parallel der Tangente α' im Punkte $\mathcal{A}'$ gezogen, so liegt der Durchschnittspunkt Σ der Tangenten in $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ebenso weit von $\mathcal{A}'$ entfernt, als der Mittelpunkt N der Sehne. Ein Gleiches gilt für die Axe s und den Scheitel A selbst. Fig. 132. c. 133. c.

Ist nun $\mathcal{AB}$ irgend eine Sehne, die von der Axe s halbirt wird und auf ihr senkrecht steht (s. Lehrsatz 51. γ); Erklärung 52. γ)), so ist also $\Sigma N = \Sigma N$, $\mathcal{A}N = \mathcal{B}N$, $\angle \mathcal{A}N\Sigma = \angle \mathcal{B}N\Sigma$, also $\triangle \Sigma N\mathcal{A} \cong \triangle \Sigma N\mathcal{B}$,

folglich $\Sigma\mathfrak{A} = \Sigma\mathfrak{B}$. Ist nun c irgend eine andere Tangente, welche die Tangente α in $\mathfrak{P}$, die β in $\mathfrak{Q}$ schneidet, so ist, weil nach Lehrsatz 27. Erklärung 30. und Lehrsatz 41. in der Curve p jede zwei Tangenten von den übrigen proportional getheilt werden, $\frac{\Sigma\mathfrak{P}}{\mathfrak{A}\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{Q}}{\Sigma\mathfrak{Q}}$, oder $\frac{\Sigma\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{B}\Sigma}{\Sigma\mathfrak{Q}}$. Da nun $\Sigma\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\Sigma$ ist, so folgt, daß auch $\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \Sigma\mathfrak{Q}$, also auch $\Sigma\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{Q}$ sein muß. Es sind also die Punktreihen auf α, β nicht nur proportional, sondern gleich. Ein Gleiches läßt sich auf dieselbe Weise von jeden zwei solchen Tangenten zeigen, deren Berührungssehne auf der Axe s senkrecht steht und von ihr halbirt wird. Zugleich ist leicht zu sehen, daß nur solche Tangenten die Eigenschaft haben, gleich getheilt zu werden. Denn würde z. B. die Tangente α und c ebenfalls gleich getheilt, so müßte also, wenn $\mathfrak{S}$ der Berührungspunkt von c ist, $\mathfrak{P}\mathfrak{A} = \mathfrak{S}\mathfrak{P}$ sein. Zöge man nun die Sehne $\mathfrak{A}\mathfrak{S}$, halbirte sie in N′, und zöge $(\mathfrak{P} - N')$, so ginge diese Gerade nach Lehrsatz 50. γ) durch den unendlich entfernten Punkt der Curve p. In den Dreiecken $\mathfrak{P}N'\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}N'\mathfrak{S}$ wäre dann $\mathfrak{P}N' = \mathfrak{P}N'$, $\mathfrak{P}\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{A}N' = \mathfrak{S}N'$, sie wären also congruent, also auch $\angle \mathfrak{A}N'\mathfrak{P} = \angle \mathfrak{S}N'\mathfrak{P}$, also jeder ein Rechter. Zugleich stände nach Lehrsatz 50. γ) die Tangente in demjenigen Curvenpunkt, in welchem $(\mathfrak{P} - N')$ die p schneidet, senkrecht auf $(\mathfrak{P} - N')$, und alle dieser Tangente parallelen Sehnen würden von $(\mathfrak{P} - N')$ halbirt; es gäbe also außer s noch eine Gerade $(\mathfrak{P} - N')$, welche die Eigenschaften der Axe besäße, was gegen Lehrsatz 51. γ) streitet. Man sieht also:

62. Lehrsatz. In der Curve p entstehen auf jeden zwei Tangenten α, β, deren Durchschnittspunkt Σ auf der Axe s liegt, aber **nur** auf solchen, gleiche Punktreihen.

Legen wir an den Scheitel A der Curve p eine Tangente, so steht dieselbe senkrecht zur Axe nach Lehrsatz 51. γ); legt man Tangenten an solche zwei Curvenpunkte, deren Berührungssehne von der Axe s halbirt wird, so bemerkt man sogleich, daß der von ihnen eingeschlossene Winkel $\angle \alpha\beta$ um so kleiner werden muß, je weiter die Sehne $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, Fig. 133. c., vom Scheitel entfernt liegt. Läßt man also in der Vorstellung die Sehne $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ immer näher an A heranrücken, so rückt auch Σ immer näher an A, der $\angle \alpha\beta$ wird immer größer, bis endlich, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nach A kommt, also $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit A zusammenfallen, der Winkel $\alpha\beta$ in einen gestreckten übergeht. Es muß demnach einen Punkt D geben, wo die Tangenten einen rechten Winkel bilden. Die Berührungssehne dieser Tangenten heiße P_1P_2, Fig. 140.; ihr Mittelpunkt F, so ist also nach Lehrsatz 61. $AD = AF$, und da $\angle P_1DP_2 = 1R$ ist, ist $\angle P_1DF = \angle P_2DF = \frac{1}{2}R$, also $FP_1 = FP_2 = DF$; $P_1P_2 = 2DF$. Suchen wir die Polare d von F, so muß sie durch D gehen, weil sich die Tangenten an P_1 und P_2 hier schneiden, und

zugleich senkrecht zur Axe s stehen, da P_1P_2 in F halbirt wird und $(P_1 - P_2) \perp s$ ist. Legt man nun irgend eine andere Sehne $(Q_1 - Q_2)$ durch F und zieht $(Q_1 - R_1)$, $(Q_2 - R_2)$ parallel zur Axe s, so daß beide die Polare d des Punktes F bezüglich in R_1, R_2 schneiden, und zieht dann $(Q_1 - A)$, $(Q_2 - A)$, welche die d bezüglich in S_2, S_1, schneiden, so läßt sich sogleich beweisen, daß S_2 mit R_2, S_1 mit R_1 zusammenfallen muß. Denn legt man die Tangenten an Q_1, Q_2, so muß ihr Durchschnittspunkt Z auf d liegen, nach Lehrsatz 34. β., da $(Q_1 - Q_2)$ durch F geht. Ist nun Q_1L die Hälfte der durch Q_1, Q_2N die Hälfte der durch Q_2 senkrecht zur Axe gezogenen Sehne, schneidet die $(Q_1 - R_1)$, $(Q_2 - R_2)$ die Scheiteltangente a bezüglich in X, Y, und trifft die Tangente in Q_1 die a in U, die Axe s in B_1, trifft ferner die Tangente in Q_2 die a in V, die s in B_2, so ist nach Lehrsatz 61. $AB_1 = AL$; $AB_2 = AN$. Zugleich ist aber $AL = XQ_1$, also auch $XQ_1 = AB_1$; ebenso ist $AN = YQ_2$, also auch $YQ_2 = AB_2$. Es ist also in den Dreiecken XUQ_1 und AUB_1 die Seite $XQ_1 = AB_1$, $\angle Q_1XU = \angle B_1AU$, $\angle XQ_1U = \angle AB_1U$, also $\triangle XUQ_1 \cong \triangle AUB_1$, folglich $XU = AU$; ebenso ist $\triangle YVQ_2 \cong \triangle AVB_2$, und also $YV = AV$. Also ist auch

$$R_1Z = S_2Z;\ R_2Z = S_1Z.$$

Nach Lehrsatz 19. ist aber, wenn wir den unendlich entfernten Curvenpunkt durch ∞ bezeichnen:

$$\text{Strahlbüschel } Q_2,Q_1\infty ZA \;\overline{\wedge}\; A,Q_1\infty Q_2a;$$

also, wenn der Durchschnittspunkt von $(Q_1 - Q_2)$ mit d durch T bezeichnet wird, Punktreihe $d,TR_2ZS_1 \;\overline{\wedge}\; d,S_2DS_1\infty$ (wo jetzt ∞ den unendlich entfernten Punkt von d bedeutet), oder $\frac{TR_2}{ZR_2} : \frac{TS_1}{ZS_1} = \frac{S_2D}{S_1D}$; oder, da $ZR_2 = ZS_1$ ist:

$$\frac{TR_2}{TS_1} = \frac{S_2D}{S_1D}. \qquad \dagger)$$

Da nun $(Q_1 - Q_2)$ oder r durch den Pol F der Polaren d geht, so ist r,TQ_1FQ_2 harmonisch. Mit dieser Punktreihe aber liegt für den vom unendlich entfernten Curvenpunkt herkommenden Parallelstrahlbüschel perspectivisch die Punktreihe d,TR_1DR_2, ferner liegt mit ihr für den Strahlbüschel A,TQ_1FQ_2 perspectivisch die Punktreihe d,TS_1DS_2. Beide sind demnach harmonisch, und es ist:

$$\frac{TR_1}{DR_1} = \frac{TR_2}{DR_2};\quad \frac{TS_1}{DS_1} = \frac{TS_2}{DS_2}.$$

Aus der Gleichung rechts folgt nun sogleich $\frac{TS_2}{TS_1} = \frac{S_2D}{S_1D}$. Es war aber auch nach †) $\frac{TR_2}{TS_1} = \frac{S_2D}{S_1D}$, also ist $\frac{TS_2}{TS_1} = \frac{TR_2}{TS_1}$; folglich $TS_2 = TR_2$; also fällt S_2 mit R_2 zusammen. Da nun Punktreihe d,TR_1DR_2 und d,TS_1DS_2 harmonisch sind, und S_2 mit R_2 zusammen-

fällt, muß auch S_1 mit R_1 zusammenfallen. Zieht man durch P_1, P_2 Senkrechte auf d, welche dieselbe bezüglich in M_1, M_2 schneiden, und sodann $(P_1 - A)$, $(P_2 - A)$, so gehen diese ebenso durch M_1, M_2. Dieß ergiebt sich auch sofort: denn weil DF in A halbirt wird, und $d \parallel a \parallel (P_1 - P_2)$ ist, so ist, wenn man den noch unbekannten Durchschnittspunkt von $(P_1 - A)$, $(P_2 - A)$ mit d bezüglich durch W_2, W_1 bezeichnet, $W_1A = P_2A$; $W_2A = P_1A$. Es ist also in den Dreiecken W_1AD, P_2AF, $W_1A = P_2A$, $DA = FA$, $\angle W_1AD = \angle P_2AF$; also sind sie congruent, folglich $DW_1 = FP_2 = FP_1 = DM_1$; ebenso ist $DW_2 = DM_2$; also fällt W_1 nach M_1, W_2 nach M_2. Suchen wir nun die Polare des Punktes M_2, denken uns also von M_2 zwei Tangenten an die Curve gelegt und die Berührungssehne gezogen, so muß nach Lehrsatz 50. γ) dieselbe parallel der Tangente in P_2 sein, indem eine von M_2 nach dem unendlich entfernten Curvenpunkt gezogene Secante die Curve im endlichen Punkt P_2 schneidet. Ferner muß auch die Polare von M_2 durch F gehen. Denn, da F der Pol von d ist, so ist, wenn man eine Gerade m_2 von M_2 nach F zieht, Punktreihe $m_2, K_1FK_2M_2$ (wenn K_1 der zweite Durchschnittspunkt von $(F - M_2)$ mit der Curve ist) harmonisch. Der dem Punkt M_2 zugeordnete harmonische muß aber auch auf der Polaren von M_2 sich befinden. Also muß diese durch F gehen. Es muß demnach die Polare von M_2 einmal parallel der Tangente in P_2 sein, und sodann durch F gehen. Ziehen wir nun durch F eine Gerade m_1 parallel zur Tangente des Punktes P_2, so ist dieselbe also die Polare von M_2; sodann aber auch muß sie durch M_1 gehen. Denn nach der Voraussetzung ist $\angle P_1DP_2 = 1R$; $FP_2 = FD$, also $\angle DP_2F = \frac{1}{2}R$. Es muß demnach auch die Polare m_1 von M_2 mit $(P_1 - P_2)$ einen halben rechten Winkel bilden. Nun ist aber, da $FP_1 = FD$ nach der Voraussetzung ist, und auch $FP_1 = DM_1$ ist, auch $DM_1 = DF$, also $\angle DFM_1 = \frac{1}{2}R$; es geht also die Polare m_1 des Punktes M_2 durch M_1; ebenso geht die Polare m_2 des Punktes M_1 durch M_2, oder M_2 ist der Pol von m_1, M_1 der Pol von m_2. Nach Lehrsatz 44. entsteht nun im Punkt F als Scheitel ein einstimmig involutorischer Strahlbüschel. In demselben sind also m_1, m_2 ein Paar entsprechender Strahlen. Zugleich sind s und t ein Paar entsprechender Strahlen. Nach der Voraussetzung ist nun $\angle st = 1R$; ferner ist $\angle M_1FD$ oder $\angle m_1s = \frac{1}{2}R$, und $\angle M_2FD$ oder $\angle m_2s = \frac{1}{2}R$, also $\angle m_1m_2 = 1R$. Es stehen also zwei Paar entsprechender Strahlen der Involution, s, t; m_1, m_2 auf einander senkrecht. Folglich ist dieß nach § 4. Lehrsatz 8. mit jedem Paare entsprechender Strahlen der Fall, oder die Involution ist eine rechtwinklige. Da nun, wie wir oben sahen, $R_1Z = S_2Z$, $R_2Z = S_1Z$ war, und S_2 mit R_2, S_1 mit R_1 identisch ist, so ist also $R_1Z = R_2Z$, d. h. es ist Z die Mitte der Strecke R_1R_2. Ferner war $AU = \frac{1}{2}AX$, oder $AU = \frac{1}{2}R_1D$, und $AV = \frac{1}{2}AY = \frac{1}{2}R_2D$, also $UV = \frac{1}{2}(R_1D + R_2D)$ oder $UV = \frac{1}{2}R_1R_2$, also $UV = R_1Z = R_2Z$. Ziehen wir nun von

F nach U und V Gerade, so müssen dieselben auch durch R_1, R_2 gehen, denn es verhält sich, wenn wir den unbekannten Durchschnittspunkt von (F − U) mit d durch W bezeichnen: FA : AU = FD : DW. Es ist aber $FA = \frac{1}{2}FD$, $AU = \frac{1}{2}R_1D$, also $\frac{1}{2}FD : \frac{1}{2}R_1D = FD : DW$; also $DW = R_1D$; es schneidet also die (F − U) die d in R_1, und ebenso (F − V) die d in R_2. In dem Viereck $UVZR_1$ ist nun UV gleich und parallel R_1Z, also ist dasselbe ein Parallelogramm, folglich $(F - R_1)$ oder n_1 parallel der Tangente $(Q_2 - Z)$ am Punkte Q_2. Deßgleichen ist das Viereck UVR_2Z ein Parallelogramm, da UV gleich und parallel R_2Z ist. Da ferner $(F - R_1) \parallel (Q_2 - Z)$, $(F - R_2) \parallel (Q_1 - Z)$ ist, so ist auch das Viereck FVZU ein Parallelogramm. Suchen wir nun die Polare des Punktes R_2. Dieselbe ist die Berührungssehne der beiden von R_2 an die Curve zu legenden Tangenten. Ziehen wir ferner von dem Durchschnittspunkte R_2 dieser beiden Tangenten eine Gerade nach dem unendlich entfernten Curvenpunkt, so muß die Tangente des in endlicher Entfernung gelegenen Durchschnittspunkts dieser Geraden mit der Curve nach Lehrsatz 50. γ) parallel zur Polaren des Punktes R_2 sein. Die von R_2 nach dem unendlich entfernten Curvenpunkt gehende Gerade ist aber $(R_2 - Q_2)$; die Tangente in Q_2 ist $(Q_2 - Z)$, und nach Lehrsatz 48. kann es keine zweite die Curve berührende Gerade geben, welche dieselbe Richtung hätte, wie $(Q_2 - Z)$; es muß also die Polare von R_2 parallel $(Q_2 - Z)$ sein. Zugleich muß die fragliche Polare durch F gehen, wovon man sich, da F der Pol von d ist, und R_2 auf d liegt, ebenso überzeugt, wie oben davon, daß die Polare von M_2 durch F gehen mußte. Nun sahen wir aber, daß $(F - R_1) \parallel (Q_2 - Z)$ war; da sie auch durch F geht, so muß sie also die Polare von R_2 sein. Auf dieselbe Weise überzeugt man sich auch, daß $(F - R_2)$ die Polare von R_1 sein muß. Es sind also $(F - R_1)$ und $(F - R_2)$ oder n_1, n_2 ein Paar entsprechende Strahlen der Involution an F nach Lehrsatz 44. Da dieselbe aber rechtwinklig ist, so muß $\angle n_1 n_2 = 1R$ sein. Es ist also in dem Parallelogramm FVZU der Winkel UFV = 1R; also ist dasselbe ein Rechteck, und auch $\angle FVZ = 1R$, und $\angle FUZ = 1R$. Ferner wird sowohl FR_2 in V, als FR_1 in U halbirt. Es ist also in den Dreiecken FQ_2V und R_2Q_2V, $\angle Q_2VF = \angle Q_2VR_2 = 1R$, $Q_2V = Q_2V$, $VF = VR_2$, also sind sie congruent; deßgleichen ist auch $\triangle FQ_1U \cong \triangle R_1Q_1U$. Es ist demnach $FQ_2 = R_2Q_2$; $FQ_1 = R_1Q_1$. Es ist also der senkrechte Abstand irgend eines Curvenpunkts Q_1, Q_2, etc. von der Geraden d gleich der Entfernung vom festen Punkt F. Nennen wir nun die Strecke P_1P_2 : p (hier nicht zu verwechseln mit der Bezeichnung der gesuchten Curve), so ist $FD = \frac{1}{2}p$, $FA = AD = \frac{1}{4}p$. Es ist daher unsere Curve eine Parabel mit dem Parameter p, und dem Brennpunkt F. Bezeichnen wir ferner FQ_2 durch ρ, so ist:

$$\rho : R_2Q_2 = 1 : 1.$$

Es heiße ferner AN : x; NQ_2 : y; so ist also, da $FQ_2 = R_2Q_2$ und $FQ_2 = \sqrt{FN^2 + NQ_2^2} = \sqrt{(x - \frac{1}{4}p)^2 + y^2}$; $R_2Q_2 = R_2Y + YQ_2 = DA + AN = \frac{1}{4}p + x$ ist; $\sqrt{(x - \frac{1}{4}p)^2 + y^2} = \frac{1}{4}p + x$, oder:

$$x^2 - \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{16}p^2 + y^2 = \tfrac{1}{16}p^2 + \tfrac{1}{2}px + x^2$$

oder:
$$y^2 = px,$$
und
$$y = \sqrt{px}.$$

Man überzeugt sich nun auch leicht von der Umkehrung. Nämlich: Auf diese eben ausgeführte Weise findet man, daß in der Parabel für jeden Punkt die Gleichung $y = \sqrt{px}$ gilt. Suchen wir jetzt den Winkel α, den eine Sehne $(Q_2 - Q')$ zweier auf derselben Seite der Axe gelegener Punkte mit der Axe bildet, Fig. 141. Der Winkel α wird offenbar erhalten, wenn wir durch Q_2 eine Parallele zur Axe ziehen. Heißt nun $NQ_2 : y$, $N'Q' : y_1$; AN : x, AN' : x_1, so ist offenbar:

$$\tang \alpha = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\sqrt{px_1} - \sqrt{px}}{x_1 - x} = \frac{\sqrt{p}\cdot(\sqrt{x_1} - \sqrt{x})}{x_1 - x} = \frac{\sqrt{p}\cdot(\sqrt{x_1} - \sqrt{x})}{\sqrt{x_1}^2 - \sqrt{x}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{p}\cdot(\sqrt{x_1} - \sqrt{x})}{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x}}.$$

Setzen wir $x_1 = x$, so geht der Winkel α über in den Winkel τ, den die Tangente des Punkts Q_2 mit der Axe macht, und es wird also:

$$\tang \tau = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}};\ \text{also}\ \sin \tau = \sqrt{\frac{p}{p + 4x}};\ \cos \tau = 2\cdot\sqrt{\frac{x}{p + 4x}}.$$

Ferner ist $DN = \frac{y}{\tang \tau} = \frac{\sqrt{px}}{\tang \tau} = 2x$. Ist nun P irgend ein anderer Parabelpunkt, und die Tangente an ihn gezogen, welche die Tangente des Punkts Q_2 in T_2, die von Q_1 in T_1, die Axe in E schneidet, und nennen wir, wenn eine durch P senkrecht auf die Axe gezogene Gerade dieselbe in M trifft, AM : x', so ist also AE = 2x', $\tang \sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x'}}$, $\sin \sigma = \sqrt{\frac{p}{p + 4x'}}$, $\cos \sigma = 2\sqrt{\frac{x'}{p + 4x'}}$. Wie man sogleich sieht, ist nun $DQ_2 = DQ_1$. Ferner ist im Dreieck DET_2: $\angle DT_2E = \angle \sigma - \angle \tau$, und es verhält sich in ihm $DT_2 : DE = \sin \sigma : \sin(\sigma - \tau)$ oder $DT_2 : (x - x') = \sqrt{\frac{p}{p + 4x'}} : \sin(\sigma - \tau)$. Es ist aber $\sin(\sigma - \tau) = \sin \sigma \cdot \cos \tau - \cos \sigma \cdot \sin \tau$ oder:

$$\sin(\sigma - \tau) = \sqrt{\frac{p}{p + 4x'}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{p + 4x}} - 2\sqrt{\frac{x'}{p + 4x'}}\cdot\sqrt{\frac{p}{p + 4x}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{p}{(p + 4x)(p + 4x')}}\,(\sqrt{x} - \sqrt{x'});$$

also haben wir

$$DT_2 : (x - x') = \sqrt{\frac{p}{p+4x'}} : 2(\sqrt{x} - \sqrt{x'}) \cdot \sqrt{\frac{p}{(p+4x)(p+4x')}}$$

oder: $DT_2 : \sqrt{x} + \sqrt{x'} = 1 : \frac{2}{\sqrt{p+4x}}$;

also ist: $$DT_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{p+4x}\,(\sqrt{x} + \sqrt{x'}).$$

Nun ist $DQ_2 = \sqrt{DN^2 + NQ_2^2} = \sqrt{2x^2 + px} = \sqrt{x}\sqrt{p+4x}$;

also: $$Q_2T_2 = DQ_2 - DT_2 = \sqrt{x}\sqrt{p+4x} - \tfrac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{x'})\sqrt{p+4x}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{x'})\sqrt{p+4x}.$$

Im Dreieck DET_1 hat man ebenso: $DT_1 : DE = \sin\sigma \cdot \sin[180 - (\sigma + \tau)]$ oder: $DT_1 : (x - x') = \sin\sigma : \sin(\sigma + \tau)$; und da

$$\sin(\sigma + \tau) = 2\sqrt{\frac{p}{(p+4x)(p+4x')}}(\sqrt{x} + \sqrt{x'}) \text{ ist,}$$

so hat man: $DT_1 : \sqrt{x} - \sqrt{x'} = 1 : \frac{2}{\sqrt{p+4x}}$;

also: $$DT_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{x'})\sqrt{p+4x}.$$

Es ist also $Q_2T_2 = DT_1$; also auch $DT_2 = Q_1T_1$. Es sind also die Tangenten von Q_2, Q_1 durch eine beliebige dritte proportional getheilt und zwar ist die Theilung eine gleiche. Es bilden also die Durchschnittspunkte aller Tangenten mit den Tangenten in Q_2 und Q_1 gleiche Punktreihen auf den letzteren. Gleiche Punktreihen sind aber immer proportional; folglich entstehen nach Lehrsatz 27. auf jeden zwei beliebigen Tangenten ein Paar proportionale Punktreihen. Wir können also mit Rücksicht auf Lehrsatz 40. und 41. sagen:

63. Lehrsatz. Die Curve p ist eine Parabel. Und umgekehrt:

In jeder Parabel entstehen zwei einstimmig verlaufende conforme Strahlbüschel, in denen ein Paar entsprechender Strahlen parallel sind (nämlich die nach dem unendlich entfernten Punkt gerichteten, und mit der Axe parallelen), wenn man eine Anzahl beliebiger im Endlichen gelegener, sowie den unendlich entfernten Punkt mit beliebigen zwei anderen Curvenpunkten verbindet. Zugleich werden jede beliebigen Tangenten von den übrigen proportional getheilt; und auf jeden zwei Tangenten, die sich auf der Axe schneiden, entstehen gleiche Punktreihen.

Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel sind nun diejenigen Curven, die bereits von den Alten als „Kegelschnitte" bezeichnet werden, weil sie sich durch Schnitte, die durch einen Kegel mit kreisförmiger Basis gelegt werden, entstanden denken lassen. Schneidet man nämlich einen

geraden Kegel*), dessen Grundfläche ein Kreis ist, parallel zu dieser, so erhält man einen Kreis als Schnittfläche, wie aus der Stereometrie bekannt ist. Schneidet man einen Kegel von der angegebenen Beschaffenheit so, daß der Schnitt, ohne der Basis parallel zu sein, den Mantel des Kegels KHL durchschneidet, Fig. 142.a, so entsteht eine nicht kreisförmige Schnittfigur ACPB. Durch den Mittelpunkt M der Geraden, die den tiefsten Punkt A mit dem höchsten B, verbindet, lege man einen Kreis parallel dem Grundkreise HL; so muß derselbe die fragliche Curve in zwei Punkten schneiden, deren vorderer C ist. Nun ist die Ebene der Curve ACPB, und die Ebene des Kreises UCV senkrecht zur Ebene AKB oder HKL, also ist auch die Durchschnittsgerade MC senkrecht auf derselben; es ist also MC sowohl senkrecht auf AB, als senkrecht auf UV. Es ist nun MC kein Halbmesser des Kreises UCV, da M nicht sein Mittelpunkt ist, also ist $MC < \frac{1}{2}UV$. Denkt man sich nun von A und B aus bezüglich auf die Verlängerung von VU und auf die Strecke MV die Lothe AX, BY gefällt, so ist in den Dreiecken $AMX, BMY: AM = BM$, $\angle X = \angle Y = 1R$, $\angle M = \angle M$, also $\triangle AMX \cong \triangle BMY$, also $AX = BY$. In den Dreiecken AXU, BVY ist nun $AX = BY$, $\angle X = \angle Y = 1R$, $\angle AUX (= \angle KUV) = \angle KVU$, also $\triangle AXU \cong \triangle BVY$, also $XU = VY$, folglich $UY + UX = UY + VY$ oder $XY = UV$, oder $MX + MY = UV$. Nun ist im rechtwinkligen Dreieck AXM die Kathete MX kleiner als die Hypotenuse AM, ebenso im Dreieck BYM die $MY < MB$, also $MX + MY < MA + MB$ oder $XY < AB$, also auch $UV < AB$, daher $\frac{1}{2}UV < \frac{1}{2}AB$, folglich $MC < \frac{1}{2}UV < \frac{1}{2}AB$, oder $MC < \frac{1}{2}AB$; es ist also $MC < MA$ und $< MB$. Schlägt man daher von C aus mit MA als Halbmesser in der Ebene der Figur ACPB einen Kreis, so schneidet derselbe die AB in zwei Punkten F, F′, und es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke FMC, F′MC, und es ist $CF^2 = MF^2 + MC^2$. Von F und F′ ziehen wir nach einem beliebigen Curvenpunkt P Leitstrahlen FP, F′P, fällen von P aus auf die AB ein Loth NP und legen durch NP einen Kreis SPT parallel zum Grundkreise HL. Dann ist offenbar $FP^2 = FN^2 + NP^2$; $F'P^2 = F'N^2 + NP^2$, oder $FP^2 = (FM + MN)^2 + NP^2$, und $F'P^2 = (MF' - MN)^2 + NP^2$, oder $F'P^2 = (MF - MN)^2 + NP^2$. Da nun NP senkrecht auf dem Durchmesser ST des Kreises SPT steht, so ist $NP^2 = SN \cdot TN$. Es verhält sich aber $SN : UM = AN : AM$; $TN : VM = BN : BM$ und da $AN = AM + MN$, $BN = BM - MN = AM - MN$ ist, $SN : UM = AM + MN : AM$; $TN : VM = AM - MN : AM$; daher ist:

---

*) Die Kegelschnitte lassen sich übrigens auch aus dem schiefen Kegel ableiten, worüber wir z. B. auf: „Robert Simson's drei erste Bücher von den Kegelschnitten, übersetzt von J. B. Camer. Tübingen 1809", sowie auf die vortreffliche Bearbeitung der sieben Bücher über Kegelschnitte von Apollonius durch H. Balsam. Berlin 1861. §. 11., 12., 13., verweisen. Hier soll, um nicht zu ausführlich zu werden, nur die Ableitung aus dem geraden Kegel erwähnt werden.

$$SN = \frac{AM + MN}{MA} \cdot MU; \; TN = \frac{AM - MN}{MA} \cdot MV,$$

also, da im Kreise UCV $MC \perp UV$, also $MU \cdot MV = MC^2$ ist,

$$NP^2 = SN \cdot TN = \frac{MA^2 - MN^2}{MA^2} \cdot MC^2;$$

folglich: $$FP^2 = (MF + MN)^2 + \frac{MA^2 - MN^2}{MA^2} \cdot MC^2;$$

$$F'P^2 = (MF - MN)^2 + \frac{MA^2 - MN^2}{MA^2} \cdot MC^2;$$

Da ferner $MC^2 = CF^2 - MF^2 = MA^2 - MF^2$ ist,

so ist auch: $$FP^2 = (MF + MN)^2 + \frac{MA^2 - MN^2}{MA^2} \cdot (MA^2 - MF^2);$$

$$F'P^2 = (MF - MN)^2 + \frac{MA^2 - MN^2}{MA^2} \cdot (MA^2 - MF^2).$$

Werden $(MF + MN)^2$ im Ausdrucke für FP^2, und $(MF - MN)^2$ im Ausdrucke für $F'P^2$, auf den Nenner MA^2 gebracht und die Klammern aufgelöst, so ergiebt sich, nachdem man die sich aufhebenden Glieder gestrichen hat:

$$FP^2 = \frac{MA^4 + 2 \cdot MA^2 \cdot MF \cdot MN + MF^2 \cdot MN^2}{MA^2};$$

$$F'P^2 = \frac{MA^4 - 2 \cdot MA^2 \cdot MF \cdot MN + MF^2 \cdot MN^2}{MA^2};$$

oder: $$FP^2 = \left(\frac{MA^2 + MF \cdot MN}{MA}\right)^2; \; F'P^2 = \left(\frac{MA^2 - MF \cdot MN}{MA}\right)^2;$$

also: $$FP = \frac{MA^2 + MF \cdot MN}{MA}; \quad F'P = \frac{MA^2 - MF \cdot MN}{MA};$$

oder: $$FP = MA + \frac{MF}{MA} \cdot MN; \; F'P = MA - \frac{MF}{MA} \cdot MN;$$

also: $$FP + F'P = 2 \cdot MA = MA + MB;$$

oder: $$FP + F'P = AB.$$

Die Curve ACPB ist also eine Ellipse mit der großen Axe AB, den Brennpunkten F und F', und der kleinen Halbaxe MC. — Legt man den Schnitt parallel der Axe des Kegels, also senkrecht auf den die Grundfläche bildenden Kreis HL, so schneidet er sowohl den einfachen Kegel HKL, als auch den Scheitelkegel H'KL', Fig. 142. b. Zieht man durch die Spitze K des Kegels eine Senkrechte auf die Richtung des Schnittes, welche dieselbe in M trifft, und schneidet dann von M aus auf AB eine Strecke $MF = MF' = KA = KB$ ab, so daß, weil $KA = KB = \sqrt{MA^2 + MK^2}$ ist, auch $MF = MF' = \sqrt{MA^2 + MK^2}$ wird, so ergiebt sich Folgendes über die Natur der Curve AP. Man ziehe von F und F' nach irgend einem ihrer Punkte P die Leitstrahlen FP, F'P, ziehe von P eine Senkrechte PN auf AB, und lege durch NP einen Kreis SPT parallel dem Grund-

kreise HL. Nun ist $FP^2 = FN^2 + NP^2$; $F'P^2 = F'N^2 + NP^2$; oder $FP^2 = (MN - MF)^2 + NP^2$; $F'P^2 = (MN + MF)^2 + NP^2$. Zugleich ist $NP^2 = SN \cdot TN$, und es verhält sich weiter $SN : AN = MK : MA$; $TN : BN = MK : MB$; oder $SN : MN - MA = \sqrt{MF^2 - MA^2} : MA$; $TN : MN + MA = \sqrt{MF^2 - MA^2} : MA$; also ist $NP^2 = SN \cdot TN = \frac{MN^2 - MA^2}{MA^2} \cdot (MF^2 - MA^2)$, folglich $FP^2 = (MN - MF)^2 + \frac{MN^2 - MA^2}{MA^2} \cdot (MF^2 - MA^2)$; $F'P^2 = (MN + MF)^2 + \frac{MN^2 - MA^2}{MA^2} \cdot (MF^2 - MA^2)$. Werden diese Ausdrücke auf den gemeinsamen Nenner MA^2 gebracht und die sich hebenden Glieder gestrichen, so bleibt:

$$FP^2 = \frac{MA^4 - 2 \cdot MA^2 \cdot MF \cdot MN + MF^2 \cdot MN^2}{MA^2};$$

$$F'P^2 = \frac{MA^4 + 2 \cdot MA^2 \cdot MF \cdot MN + MF^2 \cdot MN^2}{MA^2};$$

oder: $$FP^2 = \left(\frac{MA^2 - MF \cdot MN}{MA}\right)^2; \quad F'P^2 = \left(\frac{MA^2 + MF \cdot MN}{MA}\right)^2;$$

oder: $$FP^2 = \left(MA - \frac{MF}{MA} \cdot MN\right)^2; \quad F'P^2 = \left(MA + \frac{MF}{MA} \cdot MN\right)^2.$$

Da nun $MN > MA$, und $\frac{MF}{MA} > 1$ ist, die Ausdrücke für FP, F'P aber positiv sein müssen, so folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$FP = \frac{MF}{MA} \cdot MN - MA; \quad F'P = \frac{MF}{MA} \cdot MN + MA;$$

folglich: $$F'P - FP = 2 \cdot MA = MA + MB;$$

oder: $$F'P - FP = AB.$$

Die Curve ist also eine Hyperbel mit der großen Axe AB, einer kleinen Halbaxe von der Länge MK, den Brennpunkten F, F'. Legt man den Schnitt so, daß $MK = MA$ wird, so erhält man eine gleichseitige Hyperbel. — Legt man endlich, Fig. 142. c. den Schnitt durch den Kegel so, daß er der einen Seite, z. B. KH parallel ist, zieht $PN \perp AN$, und legt durch PN einen Kreis parallel der Grundfläche HL, so ist $NP^2 = SN \cdot TN$. Es ist aber $SN = RA$; ferner verhält sich $TN : AN = RA : KA$; also ist $TN = \frac{RA}{KA} \cdot AN$. Man hat also:

$$NP^2 = \frac{RA^2}{KA} \cdot AN.$$

Nun ist RA sowohl, als KA eine constante Größe, folglich auch $\frac{RA^2}{KA}$. Es bedeutet aber $\frac{RA^2}{KA}$ eine Gerade, von solcher Länge, daß RA die mittlere Proportionale zwischen ihr und KA ist. Bezeichnen

wir die Länge dieser Linie, die sich sofort construiren läßt, mit p, so ist also $NP^2 = p \cdot AN$, oder:

$$NP = \sqrt{p \cdot AN}.$$

Die Curve ist also eine Parabel mit dem Parameter $p = \frac{RA^2}{KA}$.

Es lassen sich also Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel durch Schnitte, welche durch einen geraden Kegel gelegt werden, erhalten. Umgekehrt giebt es unzählig viele Kegel, aus denen man sich einen gegebenen Kreis, oder eine gegebene Ellipse, Hyperbel, Parabel, geschnitten denken kann*); man bezeichnet deßhalb diese Curven mit dem gemeinsamen Namen: „Kegelschnitte"**). Man kann also sagen:

64. Erklärung. Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel, werden unter dem Namen **„Kegelschnitte"** zusammengefaßt.

Fassen wir nun den Inhalt der Lehrsätze: 19., 21., 22., 27., 29., 41., 42., 48., 53., 54., 55., 56., 59., 60., 62., 63., zusammen, so erhalten wir als Resultat unserer bisherigen Untersuchung, und als Antwort auf die im Anfange dieses Paragraphen aufgeworfene Frage, den wichtigen:

65. Lehrsatz. Die Projectionsstrahlen zweier projectivisch liegenden conformen Punktreihen berühren allemal einen Kegelschnitt (nach Lehrsatz 5., 30., 41., 42., 53., 54., 59., 60., 63., 64). Die Richtungen der ursprünglichen Punktreihen berühren denselben ebenfalls (Lehrsatz 23.) und jede zwei Tangenten a, b des Ke-

65. Lehrsatz. Die Projectionspunkte zweier projectivisch liegenden conformen Strahlbüschel liegen allemal auf einem Kegelschnitt (nach Lehrsatz 5., 30., 41., 42., 53., 54., 59., 60., 63., 64). Die Scheitel der ursprünglichen Strahlbüschel liegen ebenfalls auf demselben (Lehrsatz 23.) und an jeden zwei Curvenpunkten

*) Da die Entwickelung dieses Satzes zu weit führen würde, verweisen wir auf Schlömilch's: „Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maaßes". Zweiter Theil. § 37., wo diese Verhältnisse erörtert sind.

**) Da sich die Curven aus einem Kegel geschnitten denken lassen, so sieht man, daß, wenn man irgend einen Punkt Z irgend eines aus dem Kegel geschnittenen Kreises mit der Spitze des Kegels verbindet, diese Verbindungsgerade durch einen Punkt W des Kreises, der Ellipse, Hyperbel, Parabel gehen muß. Nimmt man insbesondere den Kreis XZY so an, daß er zwischen der Kegelspitze und dem einen Scheitel der Curve liegt, stellt man sich ferner K als einen Punkt vor, in dem sich das Auge eines Beobachters befindet, so kann man sagen: der Kreis XZY verdecke die Ellipse, Parabel, Hyperbel. Hält man also die Erklärung 3. in § 1., oder die Erklärung 1. in § 6., zum Theil (indem erst zu untersuchen wäre, ob auch im Raume, wenn die Verbindungsgeraden homologer Punkte durch denselben Punkt gehen, die Durchschnittspunkte homologer Gerader auf derselben Geraden liegen) fest, so kann man sagen: die Kegelschnitte stehen mit dem Kreis in Projection und zwar im Raume.

gelschnitts werden von den übrigen conform getheilt und zwar so, daß allemal dem Durchschnittspunkt (a·b) auf der einen a, b, der Berührungspunkt 𝔅, 𝔄 auf der anderen b, a entspricht (nach Lehrsatz 19, 21, 22); und umgekehrt:

Auf jedem Paar Tangenten a, b, eines Kegelschnittes entstehen, wenn man sie durch beliebige andere schneidet, conforme Punktreihen; die Durchschnittspunkte (a·c), (b·c) jeder Tangente c mit den beiden geschnittenen sind auf diesen ein Paar entsprechender Punkte; dem Durchschnittspunkte (a·b) auf a entspricht der Berührungspunkt 𝔅 auf b, dem Durchschnittspunkt (a·b) auf b entspricht der Berührungspunkt 𝔄 auf a (nach Lehrsatz 53., 54., 59., 60., 63., 64.).

A, B entstehen, wenn man sie mit den übrigen verbindet, conforme Strahlbüschel, und zwar so, daß allemal der Verbindungsgeraden (A–B) in dem einen A, B, die Berührungsgerade β, α in dem anderen B, A entspricht (nach Lehrsatz 19., 21., 22.); und umgekehrt:

An jedem Paar Punkten A, B, eines Kegelschnittes entstehen, wenn man sie mit beliebigen anderen durch Gerade verbindet, conforme Strahlbüschel; die Verbindungsgeraden (A–C), (B–C), jedes Punktes C mit den beiden Punkten A, B, sind an diesen ein Paar entsprechender Strahlen; der Verbindungsgeraden (A–B) an A entspricht die Berührungsgerade β an B; der Verbindungsgeraden (A–B) an B entspricht die Berührungsgerade α an A (nach Lehrsatz 53., 54, 59., 60., 63., 64.).

Und im Besonderen hat man, wenn man sich bei Ausdrücken: „einstimmig", „entgegengesetzt" an die Erklärung 1. hält, den

66. Lehrsatz. α) Die Projectionsstrahlen zweier projectivisch liegenden, conformen, einstimmig verlaufenden Punktreihen berühren entweder einen Kreis, oder eine Ellipse, oder eine gleichseitige oder gemeine Hyperbel. Die Richtungen der ursprünglichen Punktreihen berühren dieselben Curven, und zwar, wenn die Curve eine gleichseitige oder gemeine Hyperbel ist, berühren sie dieselbe an dem-

66. Lehrsatz. α) Die Projectionspunkte zweier projectivisch liegenden, conformen, einstimmig verlaufenden Strahlbüschel liegen entweder auf einer Ellipse, Parabel, oder auf einer gleichseitigen oder gemeinen Hyperbel. Die Scheitel der ursprünglichen Strahlbüschel liegen auf derselben Curve, und zwar, wenn die Curve eine gleichseitige oder gemeine Hyperbel ist, liegen sie auf demselben Curvenaste (nach

selben Curvenaste (nach Lehrsatz 53., 54., 59., 60.). Sind die Richtungen der beiden ursprünglichen Punktreihen parallel und verläuft die eine derselben von links nach rechts, die andere von rechts nach links, so ist die erzeugte Curve allemal ein Kreis oder eine Ellipse (nach Lehrsatz 29.) und die Richtungen der ursprünglichen Punktreihen sind Tangenten an den Endpunkten eines Durchmessers (nach Lehrsatz 48.); und umgekehrt:

Werden irgend zwei Tangenten eines Kreises, einer Ellipse, zwei denselben Curvenast einer gleichseitigen, einer gemeinen Hyperbel berührende Tangenten von beliebigen anderen geschnitten, so entstehen auf den ersteren allemal projectivisch liegende, conforme, einstimmig verlaufende Punktreihen; werden insbesondere die parallelen Tangenten an den Endpunkten eines Durchmessers eines Kreises oder einer Ellipse von beliebigen anderen geschnitten, so entstehen auf ihnen allemal zwei conforme Punktreihen, von denen die eine von links nach rechts, die andere von rechts nach links verläuft (nach Lehrsatz 53., 54., 59., 60., 48.).

β) Die Projectionsstrahlen zweier projectivisch liegenden, conformen, entgegengesetzt verlaufenden Punktreihen berühren entweder eine gleichseitige oder

Lehrsatz 53., 54., 59., 60., 63). Eine gleichseitige Hyperbel entsteht nämlich allemal, wenn die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel in den ursprünglichen Strahlbüscheln parallel sind (nach Lehrsatz 59.); und umgekehrt:

Werden irgend zwei Punkte einer Ellipse, Parabel, zwei Punkte auf demselben Curvenast einer gleichseitigen oder gemeinen Hyperbel mit beliebigen anderen Curvenpunkten verbunden, so entstehen an den ersteren allemal zwei projectivisch liegende, conforme, einstimmig verlaufende Strahlbüschel (nach Lehrsatz 53., 54., 59., 60., 63.); in jeder gleichseitigen Hyperbel sind in jedem Paar so entstandener conformer Strahlbüschel die entsprechenden Strahlen der entsprechenden rechten Winkel parallel (nach Lehrsatz 59.).

β) Die Projectionspunkte zweier projectivisch liegenden, conformen, entgegengesetzt verlaufenden Strahlbüschel liegen entweder auf einer gleichseitigen oder ge-

gemeine Hyperbel. Die Richtungen der ursprünglichen Punktreihen berühren dieselben an verschiedenen Curvenästen (nach Lehrsatz 59., 60.). Sind die Richtungen der ursprünglichen Punktreihen parallel und verlaufen beide zugleich von links nach rechts oder zugleich von rechts nach links, so ist die erzeugte Curve allemal eine gleichseitige oder gemeine Hyperbel (nach Lehrsatz 29.) und die Richtungen der ursprünglichen Punktreihen sind Tangenten an den Endpunkten eines Durchmessers derselbeu (nach Lehrsatz 48.); und umgekehrt:

Werden zwei, eine gleichseitige oder eine gemeine Hyperbel in verschiedenen Curvenästen berührende Tangenten von beliebigen anderen geschnitten, so entstehen auf ersteren allemal projectivisch liegende, conforme, entgegengesetzt verlaufende, Punktreihen; werden insbesondere die parallelen Tangenten an den Endpunkten eines Durchmessers einer gleichseitigen oder einer gemeinen Hyperbel von beliebigen anderen geschnitten, so entstehen auf ihnen allemal zwei projectivisch liegende, conforme Punktreihen, die beide zugleich von links nach rechts oder zugleich von rechts nach links verlaufen (nach Lehrsatz 59., 60., 48.).

meinen Hyperbel; auf einer gleichseitigen Hyperbel dann, wenn die entsprechenden Strahlen der entsprechenden rechten Winkel parallel sind (nach Lehrsatz 59.). Die Scheitel der ursprünglichen Strahlbüschel liegen auf verschiedenen Curvenästen derselben (nach Lehrsatz 59., 60.); und umgekehrt:

Werden irgend zwei auf verschiedenen Curvenästen einer gleichseitigen oder gemeinen Hyperbel liegende Punkte mit beliebigen anderen durch Gerade verbunden, so entstehen an ersteren allemal zwei projectivisch liegende, conforme, entgegengesetzt verlaufende Strahlbüschel (nach Lehrsatz 59., 60.); ist die Hyperbel eine gleichseitige, so sind in jedem Paar so entstandener conformer Strahlbüschel die entsprechenden Strahlen der entsprechenden rechten Winkel parallel (nach Lehrsatz 59.).

γ) Die Projectionsstrahlen zweier proportionalen Punktreihen berühren allemal eine Parabel, und die Richtungen der ursprünglichen Punktreihen sind Tangenten an derselben Curve. Sind sie insbesondere gleich, so geht die Axe der Parabel durch ihren Durchschnittspunkt (nach Lehrsatz 63.); und umgekehrt:

Jedes Paar Tangenten an einer Parabel wird von beliebigen anderen proportional getheilt; jede zwei sich auf der Axe schneidenden Tangenten einer Parabel werden von beliebigen anderen gleich getheilt (nach Lehrsatz 63.)*).

γ) Die Projectionspunkte zweier gleichen Strahlbüschel liegen, wenn sie einstimmig verlaufen, allemal auf einem Kreise; und die Scheitel der ursprünglichen Strahlbüschel sind Punkte desselben Kreises (nach Lehrsatz 53.); wenn sie entgegengesetzt verlaufen, so liegen die Projectionspunkte allemal auf einer gleichseitigen Hyperbel, und die Scheitel der ursprünglichen Strahlbüschel liegen in den Endpunkten eines Durchmessers (nach Lehrsatz 59.); und umgekehrt:

Verbindet man irgend zwei Punkte eines Kreises mit beliebigen anderen, so erhält man allemal ein Paar gleicher, einstimmig verlaufender Strahlbüschel (nach Lehrsatz 53.); verbindet man die Endpunkte eines Durchmessers einer gleichseitigen Hyperbel mit beliebigen Punkten derselben, so erhält man allemal ein Paar gleicher, entgegengesetzt verlaufender, Strahlbüschel (nach Lehrsatz 59.)*)

§ 12.

Bestimmungsstücke der Kegelschnitte.

Aus dem vorigen Paragraphen ergiebt sich nun sogleich Folgendes: Nach § 11. Lehrsatz 65. erhält man allemal einen Kegelschnitt, wenn man die Projectionsstrahlen zweier projectivisch liegenden, conformen, Punktreihen zieht, und auf ihnen je den dem Durchschnittspunkte entsprechenden Punkt sucht. Es ist also ein Kegelschnitt durch zwei conforme Punktreihen vermöge § 11. Lehrsatz 20., 21., 22. vollständig

*) M. s. Steiner's: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander", Seite 144., Seite 141.

bestimmt und es giebt, da in conformen Gebilden jedes Element des einen nur ein einziges entsprechendes des anderen Gebildes hat, nur einen einzigen Kegelschnitt, der von ihnen erzeugt wird. Die Conformität zweier Punktreihen aber ist nach § 2. Lehrsatz 12. bereits durch drei Punkte bestimmt. Zieht man also zwei beliebige Gerade a, b, Fig. 130. a., und setzt fest, daß dieß zwei Tangenten an einem Kegelschnitt sein sollen, so kann man noch drei andere Gerade c, d, e, willkürlich ziehen, nur so, daß nicht drei oder mehr der fünf Geraden a, b, c, d, e durch einen und denselben Punkt gehen, wegen § 11. Lehrsatz 25., und festsetzen, daß auch sie denselben Kegelschnitt berühren sollen. Damit dieß möglich ist, muß der Durchschnittspunkt (a · c) als dem (b · c), (a · d) als dem (b · d), (a · e) als dem (b · e) entsprechend angenommen werden. Jede fernere Tangente f aber ist nicht mehr willkürlich, denn sie muß so beschaffen sein, daß die Durchschnittspunkte (a · f), (b · f) entsprechende Punkte der conformen Punktreihen a,(a · c) (a · d) (a · e); b,(b · c) (b · d) (b · e) sind. Es ist also der Kegelschnitt durch die fünf berührenden a, b, c, d, e vollständig bestimmt. Ebenso erhält man nach § 11. Lehrsatz 65. allemal einen Kegelschnitt, wenn man die Projectionspunkte zweier projectivisch liegenden conformen Strahlbüschel sucht. Man kann also, Fig. 130. b., zwei beliebige Punkte A, B annehmen, und festsetzen, daß sie Punkte eines Kegelschnittes sein sollen; außerdem aber kann man noch drei beliebige Punkte C, D, E, jedoch so, daß nicht drei oder mehr der fünf Punkte A, B, C, D, E auf einer und derselben Geraden liegen, annehmen, und festsetzen, daß auch sie Curvenpunkte desselben Kegelschnittes sein sollen. Weiter aber kann man keinen Punkt willkürlich annehmen. Denn, wenn man A und B mit C, D, E verbindet, so erhält man an A und B drei Strahlen, und nach § 2. Lehrsatz 12. giebt es zu jedem vierten Strahl (A − F) des Büschels A nur einen einzigen genau bestimmten Strahl (B − F) des Büschels B von der Beschaffenheit, daß beide entsprechende Strahlen der conformen Strahlbüschel A,(A − C) (A − D) (A − E); B,(B − C) (B − D) (B − E) sind. Der Kegelschnitt ist also durch die fünf Punkte A, B, C, D, E vollständig bestimmt. Man erhält also den

1. Lehrsatz. Ein Kegelschnitt ist durch fünf Tangenten vollständig bestimmt, oder:

Jede fünf, in derselben Ebene liegende, Gerade, von denen nicht drei oder mehr durch einen und denselben Punkt gehen, können stets von einem, aber nur von einem einzigen Kegelschnitt berührt werden.

1. Lehrsatz. Ein Kegelschnitt ist durch fünf Curvenpunkte vollständig bestimmt, oder:

Durch jede fünf, in derselben Ebene liegende, Punkte, von denen nicht drei oder mehr auf einer und derselben Geraden liegen, kann stets ein, aber nur ein einziger Kegelschnitt gelegt werden.

Wie man auf einer Geraden s den dem Punkt C'_1 einer Punktreihe s' entsprechenden Punkt C_1 findet, ist in § 11. an Fig. 109. a., 109. a'. gezeigt worden. Das Verfahren war, wie man sich erinnern wird, folgendes: Man zog, Fig. 109. a., die Gerade $[(s \cdot b_1) - (s' \cdot a_1)]$ oder n_1 und projicirte auf sie von $(a_2 \cdot b_1)$ aus den Punkt C'_1 mittelst der Geraden x_1 nach $\mathfrak{S}_1$, und sodann projicirte man von $(a_1 \cdot a_2)$ aus diesen Punkt $\mathfrak{S}_1$ mittelst der Geraden y auf s nach C_1. Man sieht, dieses Verfahren ist nichts anderes als die Auflösung der Aufgabe: wenn fünf Tangenten s, s', a_1, a_2, b_1 eines Kegelschnittes gegeben sind, eine sechste Tangente c_1 oder $(C_1 - C'_1)$ zu finden. Ebenso wie c_1 wird auch jede folgende Tangente gefunden und zwar nur mit Hülfe der zwei festen Punkte $(a_1 \cdot b_1)$, $(a_1 \cdot a_2)$ und der festen Geraden n_1. Um in einem Strahlbüschel S den dem Strahl c'_1 eines Strahlbüschels S' entsprechenden Strahl c_1 zu finden, verfuhren wir so, Fig. 109. b., 109. b': Wir suchten den Punkt $[(S - B_1) \cdot (S' - A_2)]$ oder N_1 und projicirten von ihm aus mittelst der Geraden $\mathfrak{c}_1$ den Strahl c'_1 auf die Gerade $(A_2 - B_1)$ nach X_1 (s. § 1. Erklärung 3.) und sodann projicirten wir den Punkt X_1 von N_1 aus auf die Gerade $(A_1 - A_2)$ nach Y und zogen (S − Y), so war dieß der gesuchte Strahl c_1. Dieses Verfahren ist nichts anderes, als, wenn fünf Punkte S, S', A_1, A_2, B_1 eines Kegelschnittes gegeben sind, einen sechsten Punkt C_1 oder $(c_1 \cdot c'_1)$ zu finden. Ebenso wird jeder folgende Punkt mit Hülfe der festen Geraden $(A_2 - B_1)$, $(A_1 - A_2)$ und des festen Punktes N_1 gefunden. Man kann aus dieser Construction offenbar den Satz ableiten:

2. Lehrsatz. Bewegen sich die Ecken C_1, C'_1, $\mathfrak{S}_1$ eines veränderlichen Dreiseits $x_1 y c_1$ auf drei festen Geraden s, s', n_1, und drehen sich zugleich zwei Seiten desselben, x_1, y um die festen Punkte $(a_2 \cdot b_1)$, $(a_1 \cdot a_2)$ in derselben Ebene, so berührt allemal die dritte Seite c_1 einen Kegelschnitt. Fig. 109. a.*)

2. Lehrsatz. Drehen sich die Seiten c_1, c'_1, $\mathfrak{c}_1$ eines veränderlichen Dreiecks $X_1 Y C_1$ um drei feste Punkte S, S', N_1, und bewegen sich zugleich zwei Ecken desselben, X_1, Y auf den festen Geraden $(A_2 - B_1)$, $(A_1 - A_2)$ in derselben Ebene, so liegt allemal die dritte Ecke C_1 auf einem Kegelschnitt. Fig. 109. a'.*).

Der Lehrsatz 1. scheint darauf hinzudeuten, als ob ein Kegelschnitt durch fünf Elemente überhaupt bestimmt werde. Wir untersuchen daher, ob sich dieß in der That so verhält. Dazu sind jedoch zwei Lehrsätze nothwendig, die erst bewiesen werden sollen.

Es sei pqabc ein beliebiges, einem Kegelschnitt umgeschriebenes

---

*) M. s. Steiner's: „Systematische Entwickelung ꝛc." Seite 171.

vollständiges Fünfseit, Fig. 143. a., und (p·q) (q·a) (a·b) (b·c) (c·p) oder FA′QPC eines der von ihm erzeugten einfachen Fünfseite oder Fünfecke. Man kann sich nun jederzeit eine sechste Tangente d gezogen denken, welche die p in D, die q in D′ schneidet. Dann ist nach § 11. Lehrsatz 65. Punktreihe p,ABCD ⊼ Punktreihe q,A′B′C′D′ und zwar liegen sie projectivisch. Nach § 5. Lehrsatz 2. aber läßt sich jederzeit eine dritte Punktreihe n finden, die sowohl mit p als mit q perspectivisch liegt. Denn es entsteht dann ein vollständiges Sechsseit pdqabc, und CDD′A′QP ist eines der einfachen von ihm gebildeten Sechsseite oder Sechsecke. Nach § 5. Lehrsatz 6. schneiden sich nun die Diagonalen (C − A′), (D − Q), (D′ − P) in einem und demselben Punkte 𝔇. Projicirt man also die Punktreihe p,ABCD von Q aus auf (C − A′) oder n nach n,A′𝔅C𝔇 und die Punktreihe q,A′B′C′D′ von P aus auf n, so erhält man dieselbe Punktreihe n,A′𝔅C𝔇. Es ist also Punktreihe n,A′𝔅C𝔇 sowohl mit Punktreihe p für das Centrum Q, als mit Punktreihe q für das Projectionscentrum P perspectivisch. Um nun den dem Punkt (p·q) oder F der Reihe p entsprechenden Punkt F′ der Reihe q zu finden, suchen wir erst den dem Punkt F entsprechenden Punkt 𝔉 auf n, indem wir F von Q aus nach 𝔉 projiciren, und dann den dem Punkt 𝔉 auf n entsprechenden Punkt F′ auf q, indem wir 𝔉 von P aus auf q nach F′ projiciren. Ebenso findet sich (indem man P mit Q, p mit q vertauscht) der dem Punkt E′ der Reihe q entsprechende Punkt E der Reihe p. Nach § 11. Lehrsatz 65. ist aber F′ der Berührungspunkt der Tangente q, E der Berührungspunkt der Tangente p. Zugleich sind (F − Q), (C − A′) oder h, n zwei Diagonalen des Fünfecks FA′QPC, und (P − F) oder l die Verbindungsgerade der fünften Ecke P mit dem Berührungspunkt F′ der gegenüberliegenden Seite q; diese drei Verbindungsgeraden schneiden sich also in einem und demselben Punkt 𝔉. Ebenso schneiden sich die Diagonalen (E′ − P), (C − A′) oder k, n und die Verbindungsgerade (Q − E′) oder m der fünften Ecke mit dem Berührungspunkt E′ der gegenüberliegenden Seite p in einem und demselben Punkte 𝔈; und man sieht, daß dieß eine nothwendige Folge von § 11. Lehrsatz 65. und § 5. Lehrsatz 6. ist. Es sei ferner, Fig. 143. b., PQABC ein beliebiges, einem Kegelschnitt eingeschriebenes vollständiges Fünfeck und (P − Q) (Q − A) (A − B) (B − C) (C − P) oder fa′qpc eines der von ihm erzeugten einfachen Fünfecke oder Fünfseite. Man nehme einen beliebigen sechsten Punkt D des Kegelschnittes an, so erhält man nach § 11. Lehrsatz 65. ein Paar conforme Strahlbüschel; es ist nämlich Strahlbüschel P,abcd ⊼ Strahlbüschel Q,a′b′c′d′. Nach § 5. Lehrsatz 2. giebt es nun immer einen Strahlbüschel N,a′𝔟c𝔡, der sowohl mit dem Büschel P als mit Q perspectivisch liegt; man braucht nämlich nur die Gerade 𝔡 zu suchen, auf der nach § 5. Lehrsatz 6. die Durchschnittspunkte (c·a′), (d·q), (d′·p) des einfachen Sechsseits cdd′a′qp liegen. Um nun den dem Strahl f des Büschels P entsprechenden Strahl f′ des Bü-

schels Q zu finden, braucht man nur mittelst des Punktes (f · q) oder H den Strahl f auf den Strahl 𝔣 des Büschels N zu projiciren und den Strahl 𝔣 mittelst des Punktes (𝔣 · p) oder L auf den Strahl f′ des Büschels Q; so ist f′ dem Strahl f entsprechend. Auf gleiche Weise findet sich der dem Strahl e′ im Büschel Q entsprechende Strahl e im Büschel P. Nach § 11. Lehrsatz 65. sind aber f′, e Tangenten in Q, P. Ferner liegen der Construction zufolge im Fünfseit fa′qpc die Durchschnittspunkte der Gegenseiten (f · q) und (c · a′) oder H und N mit dem Durchschnittspunkte (p · f′) oder L der fünften Seite p und der Tangente f′ in der gegenüberliegenden Ecke Q auf einer und derselben Geraden 𝔣; ebenso liegen (e′ · p), (c · a′) oder K, N mit dem Durchschnittspunkte (q · e′) oder M der fünften Seite q und der Tangente e im gegenüberliegenden Punkte P auf einer und derselben Geraden 𝔢; und man überzeugt sich auch hier, daß dieß eine nothwendige Folge von § 11. Lehrsatz 65. und § 5. Lehrsatz 6. ist. Man sieht also:

3. Lehrsatz. Bei jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Fünfeck FA′QPC schneiden sich irgend zwei Diagonalen h, n (k, n, etc.) und die Verbindungsgerade l (m, etc.) des jedesmaligen fünften Punktes P, (Q etc.) mit dem Berührungspunkte F′ (E′, etc.) der gegenüberliegenden Seite q (p etc.) allemal in einem und demselben Punkte 𝔉 (𝔈 etc.). Fig. 143. a.

3. Lehrsatz. Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Fünfseit fa′qpc liegen die Durchschnittspunkte H, N, (K, N, etc.) irgend zweier Gegenseiten und der Durchschnittspunkt L (M, etc.) der jedesmaligen fünften Seite p (q etc.) mit der Tangente f′ (e′ etc.) in der gegenüberliegenden Ecke Q, (P etc.) allemal auf einer und derselben Geraden 𝔣 (𝔢 etc.). Fig 143. b.

Man bemerkt sogleich die Analogie, welche zwischen diesem und dem Lehrsatz 43. in § 11. besteht. Zugleich sieht man, daß der letztere auch umgekehrt werden kann. Denn nach § 5. Lehrsatz 7. werden in einem Sechsseit, in welchem die Diagonalen der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Ecke sich in einem und demselben Punkte schneiden, allemal zwei Seiten von den vier übrigen conform geschnitten; folglich kann nach § 11. Lehrsatz 65. stets ein Kegelschnitt gefunden werden, der von dem Sechsseit berührt wird. Da ferner ein Kegelschnitt nach Lehrsatz 1. durch fünf Tangenten bestimmt ist, so sieht man, daß nur ein einziger Kegelschnitt von diesem Sechsseit berührt werden kann. Es ergiebt sich dieß auch schon daraus, daß in einem Sechsseit von der angenommenen Eigenschaft nach § 5. Lehrsatz 10. nicht bloß ein, sondern jedes Paar Seiten von den vier übrigen conform getheilt wird, und also nach § 11. Lehrsatz 65. jede eine Tangente desselben Kegelschnittes ist, der irgend ein Paar der-

selben, die als die ursprünglichen angenommen werden, berührt. Ein gleiches gilt von einem Sechseck. Führen wir also der Vollständigkeit halber die Sätze hier noch einmal auf, so lauten sie:

4. Lehrsatz. Bei jedem, einem Kegelschnitt umgeschriebenen, Sechsseit abcdef schneiden sich die Diagonalen g, h, k der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Ecke in einem und demselben Punkte X, Fig. 130. a., und umgekehrt:

Schneiden sich bei einem Sechsseit abcdef die Diagonalen g, h, k der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Ecke in einem und demselben Punkte X, so läßt sich stets ein, aber nur ein einziger Kegelschnitt finden, der von den Seiten des Sechsseits berührt wird. Fig. 130. a.*)

4. Lehrsatz. Bei jedem, einem Kegelschnitt eingeschriebenen, Sechseck ABCDEF liegen die Durchschnittspunkte G, H, K der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Seite auf einer und derselben Geraden x, Fig. 130. b. und umgekehrt:

Liegen in einem Sechseck ABCDEF die Durchschnittspunkte G, H, K, der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Seite auf einer und derselben Geraden x, so läßt sich stets ein, aber nur ein einziger Kegelschnitt finden, der durch die Ecken des Sechsecks geht. Fig. 130. b.*)

Mit Hülfe des Lehrsatzes 3. läßt sich nun leicht ein anderer beweisen. Es sei $\mathfrak{ABCDE}$, Fig. 144. a. ein einem Kegelschnitt umgeschriebenes Fünfeck; so schneiden sich nach Lehrsatz 3. die Geraden ($\mathfrak{A}-\mathfrak{D}$), ($\mathfrak{B}-\mathfrak{E}$), (A $-\mathfrak{C}$), oder h, n, y, wenn A der Berührungspunkt von a ist, in einem und demselben Punkte P. Läßt man jetzt die Ecke $\mathfrak{A}$ außer Acht, so bleiben nur noch vier Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ übrig. Construirt man nun das durch dieselben bestimmte vollständige Viereck, und zieht von P nach den Durchschnittspunkten (c · e) und (b · d), (c · d) und (b · e), (d · e) und (b · c) der Gegenseiten die Strahlen m und m′, y und y″, h und n; so entsteht nach § 4. Lehrsatz 20.

---

*) Der Satz rechts ist zuerst von Pascal in dem Fragment: „Essais pour les coniques“ (s. die Vorrede) aufgestellt worden, der in einer verloren gegangenen Schrift: „Conicorum opus completum“ eine vollständige Theorie der Kegelschnitte auf denselben gegründet haben soll; den Satz links hat zuerst Brianchon aufgestellt. Man pflegt deßhalb ein Sechseck, durch welches ein Kegelschnitt gelegt werden kann, und gewöhnlich auch ein Sechsseit, welchem ein Kegelschnitt eingeschrieben werden kann, ein „Pascal'sches Sechseck“ oder nach Pascal's eigener Bezeichnung: „hexagrammum mysticum“ zu nennen, (denn da hier vom einfachen Sechsseit und Sechseck die Rede ist, so sind „Sechsseit“ und „Sechseck“ identisch). Man vergleiche übrigens: Steiner: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“. § 42. Seite 150.; Chasles: „Geschichte der Geometrie“, übersetzt von Sohncke, Seite 67 — 71, 343.

an P als Scheitel ein involutorischer Strahlbüschel, P,myhm′y″n, in welchem m und m′, y und y″, h und n entsprechende Strahlen sind. Ebenso entsteht, wenn man dieselben Punkte des vollständigen Vierecks mit A verbindet, ein involutorischer Strahlbüschel A,xyz′zy′x′, in welchem x und x′, y und y′, z und z′ entsprechende Strahlen der Involution sind. Es ist demnach:

Strahlbüschel P,myhm′y″n $\barwedge$ Strahlbüschel P,m′y″nmyh; α)
und Strahlbüschel A,xyzz′y′x′ $\barwedge$ Strahlbüschel A,x′y′z′zyx. β)

Insbesondere folgt aus α)

Strahlbüschel P,hm′y″n $\barwedge$ Strahlbüschel P,nmyh;

folglich ist auch:

Punktreihe b,(b · h) (b · m′) (b · y″) (b · n) $\barwedge$
Punktreihe e,(e · n) (e · m) (e · y) (e · h),

also auch

Strahlbüschel A,ax′y′z′ $\barwedge$ Strahlbüschel A,axyz.

Es sind aber x, x′; y, y′; z, z′ entsprechende Punkte der Involution β); es muß demnach, da man sich einen involutorischen Strahlbüschel als aus zweien bestehend denken kann, die auf einander liegen, der Strahl a des einen Büschels dem Strahl a des anderen entsprechen nach § 2. Lehrsatz 12. Es ist demnach a ein Hauptstrahl des involutorischen Strahlbüschels A. Es sei ferner, Fig. 144., b. abcde ein einem Kegelschnitt eingeschriebenes Fünfseit, und a die Tangente in A, so liegen nach Lehrsatz 3. die Durchschnittspunkte (a · d), (b · e), (a · c) oder H, N, Y auf einer und derselben Geraden p. Vermöge des vollständigen Vierseits bcde entsteht nun auf p, nach § 4. Lehrsatz 20. eine involutorische Punktreihe p,MYNM′Y″H, deßgleichen entsteht auf a eine solche, a,XYY′X′Z′Z. Es ist also:

Punktreihe p,MYNM′Y″H $\barwedge$ Punktreihe p,M′Y″HMYN; α)
und Punktreihe a,XYY′X′Z′Z $\barwedge$ Punktreihe a,X′Y′YXZZ′. β)

Nach α) ist nun:

Punktreihe p,NM′Y″H $\barwedge$ Punktreihe p,HMYN;

also ist auch:

Strahlbüschel B,(B–N) (B–M′) (B–Y″) (B–H) $\barwedge$
Strahlbüschel E,(E–H) (E–M) (E–Y) (E–N);

folglich auch:

Punktreihe a,Z′X′Y″A $\barwedge$ Punktreihe a,ZMYA.

Es ist demnach A ein Hauptpunkt der Involution auf a. Will man in Fig. 144. a. den zweiten Hauptstrahl a′ suchen, so hat man wegen § 4. Lehrsatz 15. nur einen solchen Strahl a′ zu suchen, daß Strahlbüschel A,axa′x′ oder A,aya′y′, etc. harmonisch ist; ebenso findet sich der zweite Hauptpunkt A′ in Fig. 144. b. auf a. Man hat also den:

5. Lehrsatz. Wenn man an einen Punkt A eines Kegelschnitts eine Tangente a legt, so ist dieselbe einer der Hauptstrahlen der Involution, die an A entsteht, wenn man von ihm aus nach den sechs Durchschnittspunkten eines umgeschriebenen vollständigen Vierecks BCDE Strahlen zieht. Fig. 144. a.

5. Lehrsatz. Wenn man den Berührungspunkt A einer Geraden a mit einem Kegelschnitt bestimmt, so ist derselbe einer der Hauptpunkte der Involution, die auf a entsteht, wenn man dieselbe mit den sechs Diagonalen eines eingeschriebenen vollständigen Vierseits bcde schneidet. Fig. 144. b.

Wir kehren nun zu unserer Aufgabe zurück, nämlich zu untersuchen, ob ein Kegelschnitt außer durch fünf Tangenten oder fünf Punkte durch fünf andere Elemente bestimmt sei. Diese können sein A. a) vier Tangenten und ein Punkt; b) vier Punkte und eine Tangente; B. a) drei Tangenten und zwei Punkte; b) drei Punkte und zwei Tangenten. Wir stellen uns zu dem Zwecke die Aufgaben, einen Kegelschnitt zu suchen, der fünf gegebene Elemente enthält, z. B. A. a) vier gegebene Gerade als Tangenten berührt und zugleich einen Punkt enthält, u. s. w., und sehen zu, ob diese Aufgaben nur eine oder mehrere Lösungen zulassen. Im ersteren Falle ist ein Kegelschnitt durch die in Rede stehenden fünf Elemente bestimmt, im zweiten nicht. Um die Aufgaben A. a) zu lösen, haben wir, wenn vier Tangenten b, c, d, e und ein Punkt A, Fig. 144. a. gegeben sind, nach Lehrsatz 5. von A aus nach den sechs Durchschnittspunkten der Gegenseiten im vollständigen Vierseit bcde die Strahlen x, y, z, z′, y′, z′ zu ziehen, und die Hauptstrahlen dieser Involution zu suchen (s. § 4. Aufgabe 23.); jeder derselben a, a′ kann als die fünfte Tangente eines Kegelschnitts angesehen werden, der nunmehr nach Lehrsatz 1. vollkommen bestimmt ist. Es giebt also zwei Kegelschnitte, die der Aufgabe genügen. Ebenso suche man, wenn im Falle A. b) vier Punkte B, C, D, E und eine Tangente a, Fig. 144. b., gegeben sind, die Hauptpunkte der Involution, welche die Gegenseiten des vollständigen Vierseits BCDE auf a bilden. Jeder derselben, A, A′, kann als der fünfte Punkt eines Kegelschnittes angesehen werden. Das Aufsuchen der Hauptstrahlen und Hauptpunkte setzt aber voraus, daß die Involution eine entgegengesetzte sei, was nicht immer der Fall ist (s. Fig. 59. a; Fig 58. a.). Es giebt dann gar keinen Kegelschnitt, welcher der Aufgabe genügt. Man sieht also:

6. Lehrsatz. Soll ein Kegelschnitt gesucht werden, der vier gegebene Gerade b, c, d, e berührt und zugleich durch einen gegebenen

6. Lehrsatz. Soll ein Kegelschnitt gesucht werden, der durch vier gegebene Punkte B, C, D, E geht und zugleich eine gegebene Ge-

Punkt A, welcher auf keiner der vier Geraden b, c, d, e liegt, geht; so giebt es entweder keinen, oder es giebt zwei Kegelschnitte, welche dieser Bedingung genügen.

rade a, welche durch keinen der vier Punkte B, C, D, E geht, berührt, so giebt es entweder keinen, oder es giebt zwei Kegelschnitte, welche dieser Bedingung genügen.

Um den Fall B. a) und b) beurtheilen zu können, halten wir uns wieder an die allgemeinen Eigenschaften des Fünfseits und Fünfecks, die sich aus näherer Betrachtung dieser Gebilde ergeben, mögen sie einem Kegelschnitt um- oder eingeschrieben sein, oder nicht. Es sei zunächst abc$\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ Fig. 145. a. ein vollständiges Fünfseit. Dasselbe enthält drei vollständige Vierseite, in deren jedem $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}$ ein Paar Gegenseiten sind, nämlich die Vierseite $\mathfrak{d}$c$\mathfrak{e}$b; $\mathfrak{d}$c$\mathfrak{e}$a; $\mathfrak{d}$b$\mathfrak{e}$a. Nach § 3. Lehrsatz 17. wird im ersten derselben die Diagonale $[(\mathfrak{d}\cdot c) - (\mathfrak{e}\cdot b)]$, sowie $[(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e}) - (c\cdot b)]$ und $[(\mathfrak{d}\cdot b) - (\mathfrak{e}\cdot c)]$ harmonisch getheilt. Ziehen wir also von $(b\cdot c)$ oder $\mathfrak{A}$ aus nach den Durchschnittspunkten jeder derselben mit je den beiden anderen die Geraden x_1, y_1, so geht y_1 durch den Eckpunkt $(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e})$. Es entsteht also an $\mathfrak{A}$ ein harmonischer Strahlbüschel $\mathfrak{A}, bx_1cy_1$. Ziehen wir im zweiten Vierseit $\mathfrak{d}$c$\mathfrak{e}$a vom Punkte $(c\cdot a)$ oder $\mathfrak{B}$ aus Gerade nach den Punkten, in denen die Diagonalen $[(\mathfrak{d}\cdot c) - (\mathfrak{e}\cdot a)]$, $[(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e}) - (c\cdot a)]$, $[(\mathfrak{d}\cdot a) - (\mathfrak{e}\cdot c)]$ sich schneiden, so entsteht ebenso ein harmonischer Strahlbüschel $\mathfrak{B}, cx_2ay_2$, dessen einer Strahl y_2 durch den Punkt $(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e})$ geht. Zieht man ferner im dritten Vierseit $\mathfrak{d}$b$\mathfrak{e}$a von $(a\cdot b)$ oder $\mathfrak{C}$ nach den Punkten, in denen die Diagonalen $[(\mathfrak{d}\cdot b) - (\mathfrak{e}\cdot a)]$, $[(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e}) - (b\cdot a)]$, $[(\mathfrak{d}\cdot a) - (\mathfrak{e}\cdot b)]$ sich schneiden, die Geraden x_3, y_3, so entsteht ein dritter harmonischer Strahlbüschel $\mathfrak{C}, ax_3by_3$. Es sind also die Strahlbüschel

$$\mathfrak{A}, bx_1cy_1;\quad \mathfrak{B}, cx_2ay_2;\quad \mathfrak{C}, ax_3by_3;$$

harmonisch. Wegen der Harmonie ist auch $\mathfrak{B}, ax_2cy_2$ harmonisch, denn es ist $\frac{\sin cx_2}{\sin ax_2} : \frac{\sin cy_2}{\sin ay_2} = 1$, oder $\frac{\sin cx_2}{\sin ax_2} = \frac{\sin cy_2}{\sin ay_2}$, also auch $\frac{\sin ax_2}{\sin cx_2} = \frac{\sin ay_2}{\sin cy_2}$ oder $\frac{\sin ax_2}{\sin cx_2} : \frac{\sin cx_2}{\sin cy_2} = 1$. Dieser Strahlbüschel ist also conform dem ersten $\mathfrak{A}, bx_1cy_1$, und beide haben den Strahl c gemein, liegen demnach perspectivisch; und zwar muß die Projectionsaxe durch den Punkt $(a\cdot b)$ und $(y_1\cdot y_2)$ d. h. durch $\mathfrak{C}$ und $(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e})$ gehen; es ist also der Strahl y_3 die Projectionsaxe. Da ferner der Büschel $\mathfrak{B}, ax_2cy_2$ harmonisch war, so ist dieß auch mit $\mathfrak{B}, ay_2cx_2$ der Fall; und, da sie den Strahl c gemein haben, so ist auch $\mathfrak{B}, ay_2cx_2$ mit $\mathfrak{A}, bx_1cy_1$ perspectivisch für eine Projectionsaxe z, welche ebenfalls durch $(a\cdot b)$ oder $\mathfrak{C}$ geht. Es entsteht aber nach § 3. Lehrsatz 16., indem man die harmonischen Strahlbüschel $\mathfrak{A}, bx_1cy_1$ und $\mathfrak{B}, cx_2ay_2$ auf doppelte Weise in perspectivische Lage bringt, ein vollständiges Viereck, in welchem $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ die Durchschnittspunkte der Gegenseiten

sind, indem die beiden Projectionsaxen in $\mathfrak{S}$ convergiren. Es muß also nach § 3. Lehrsatz 17. die noch unbekannte Projectionsaxe z so beschaffen sein, daß Strahlbüschel $\mathfrak{S},\mathfrak{a}y_3\mathfrak{b}z$ oder $\mathfrak{S},ay_3bz$ harmonisch ist; es ist aber auch $\mathfrak{S},ax_3by_3$, also auch $\mathfrak{S},ay_3bx_3$ harmonisch; folglich muß die zweite Projectionsaxe z mit x_3 identisch sein. Ist ebenso, Fig. 145. b., ein vollständiges Fünfeck $ABC\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ gegeben, so enthält dasselbe drei vollständige Vierecke $\mathfrak{D}C\mathfrak{E}B$, $\mathfrak{D}C\mathfrak{E}A$, $\mathfrak{D}B\mathfrak{E}A$, in deren jedem $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ ein Paar Gegenecken sind. Nach § 3. Lehrsatz 17. entstehen im ersteren, $\mathfrak{D}C\mathfrak{E}B$, in den Punkten $[(\mathfrak{D}-C)\cdot(\mathfrak{E}-B)]$, $[(\mathfrak{D}-\mathfrak{E})\cdot(C-B)]$, $[(\mathfrak{D}-B)\cdot(\mathfrak{E}-C)]$ je ein Paar harmonischer Strahlbüschel. Sucht man nun auf $(B-C)$ oder $\mathfrak{a}$ den Punkt, in welchem die Verbindungsgerade jedes dieser Punkte mit je den beiden anderen Durchschnittspunkten der Gegenseiten die $\mathfrak{a}$ trifft, also die Punkte X_1, Y_1, so liegt Y_1 auf $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E})$. Verfährt man ebenso mit jedem der anderen beiden Vierecke, so erhält man die Punkte X_2, Y_2 auf $\mathfrak{b}$, X_3, Y_3 auf $\mathfrak{c}$, von denen Y_2, Y_3 auf $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E})$ liegen. Es sind also harmonisch die Punktreihen:

$$\mathfrak{a},BX_1CY_1;\ \mathfrak{b},CX_2AY_2;\ \mathfrak{c},AX_3BY_3.$$

Wegen der Harmonie ist nun auch $\mathfrak{b},AX_2CY_2$ harmonisch und, da sie mit $\mathfrak{a},BX_1CY_1$ den Punkt C gemein hat, mit dieser Punktreihe perspectivisch. Es convergiren also (X_1-X_2), (Y_1-Y_2) auf $(B-A)$ oder $\mathfrak{c}$. Die Gerade (Y_1-Y_2) ist aber $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E})$, und der Durchschnittspunkt von $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E})$ mit $\mathfrak{c}$ ist Y_3, es geht also (X_1-X_2) durch den Punkt Y_3. Wegen der Harmonie der Theilung ist aber auch Punktreihe $\mathfrak{b},AY_2CX_2$ mit $\mathfrak{a},BX_1CY_1$ perspectivisch für ein als noch unbekannt angenommenes Projectionscentrum Z, von dem wir nur wissen, daß es auf $(B-A)$ oder $\mathfrak{c}$ liegt. Nach § 3. Lehrsatz 16. entsteht durch diese doppelte perspectivische Lage ein vollständiges Vierseit, in welchem $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ die Diagonalen sind, da beide Projectionscentra auf $\mathfrak{c}$ liegen. Es muß also nach § 3. Lehrsatz 17. Punktreihe $\mathfrak{c},AY_3BZ$ harmonisch sein. Nun ist aber $\mathfrak{c},AX_3BY_3$, also auch $\mathfrak{c},AY_3BX_3$ harmonisch, also muß Z nach X_3 fallen. Man sieht zugleich, daß die bisherigen, an Fig. 145. a. und 145. b. geknüpften Betrachtungen den Umstand, daß das Fünfseit um-, das Fünfeck in einen Kegelschnitt beschrieben sein sollte, gar nicht berücksichtigen. Es gilt daher das so eben Bewiesene für jedes beliebige Fünfseit und Fünfeck, so daß man sagen kann:

7. Lehrsatz. Wenn man in einem beliebigen vollständigen Fünfseit $abc\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ diejenigen drei vollständigen Vierseite $\mathfrak{d}c\mathfrak{e}b$, $\mathfrak{d}c\mathfrak{e}a$, $\mathfrak{d}b\mathfrak{e}a$ construirt, in deren jedem $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}$ ein Paar Gegenseiten sind, so schneiden sich die drei Paar

7. Lehrsatz. Wenn man in einem beliebigen vollständigen Fünfeck $ABC\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ diejenigen drei vollständigen Vierecke $\mathfrak{D}C\mathfrak{E}B$, $\mathfrak{D}C\mathfrak{E}A$, $\mathfrak{D}B\mathfrak{E}A$, construirt, in deren jedem $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ ein Paar Gegenecken sind, so liegen die

Diagonalen x_1, y_1; x_2, y_2; x_3 y_3, von denen jedes durch einen der drei Punkte (c · b) (c · a), (a · b) oder $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ geht, zu je dreien in vier Punkten M_1, M_2, M_3, M_4, und erzeugen ein vollständiges Viereck $M_1M_2M_3M_4$, dessen drei Paar Gegenseiten sich in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, schneiden. Fig. 145. a.

drei Paar Durchschnittspunkte der Gegenseiten X_1, Y_1; X_2, Y_2; X_3, Y_3, von denen jedes auf einer der drei Geraden (C—B), (C—A), (A—B) oder α, β, $\mathfrak{c}$ liegt, zu je dreien auf vier Geraden m_1, m_2, m_3, m_4, und erzeugen ein vollständiges Vierseit $m_1m_2m_3m_4$, in welchem α, β, $\mathfrak{c}$ die drei Diagonalen sind. Fig. 145. b.

Betrachten wir nun ein einem Kegelschnitt umgeschriebenes Fünfseit Fig. 145. a. und bezeichnen die Berührungspunkte der Tangenten $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, und den im Innern des Kegelschnittes gelegenen Durchschnittspunkt der Diagonalen des umgeschriebenen Vierseits $\mathfrak{d}$c$\mathfrak{e}$b mit V_1, wo sich also die Diagonalen [($\mathfrak{d}$ · c) — ($\mathfrak{e}$ · b)] und [($\mathfrak{d}$ · b) — ($\mathfrak{e}$ · c)] schneiden, so ist nach § 11. Lehrsatz 38. α) die dritte Diagonale y_1 die Polare von V_1. Bezeichnen wir ebenso im umgeschriebenen Vierseit $\mathfrak{d}$c$\mathfrak{e}$a den im Innern liegenden Durchschnittspunkt der Diagonalen [($\mathfrak{d}$ · c) — ($\mathfrak{e}$ · a)], [($\mathfrak{d}$ · a) — ($\mathfrak{e}$ · c)] mit V_2, so ist ebenso die dritte Diagonale y_2 die Polare von V_2. Verbinden wir nun V_1 und V_2 durch eine Gerade, so liegt nach § 11. Lehrsatz 39. ihr Pol in (y_1 · y_2) d. h. in ($\mathfrak{d}$ · $\mathfrak{e}$). Die im Punkt ($\mathfrak{d}$ · $\mathfrak{e}$) sich schneidenden Tangenten berühren aber in $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$. Nach § 11. Lehrsatz 34. ist aber ($\mathfrak{D}$ — $\mathfrak{E}$) die Polare von ($\mathfrak{d}$ · $\mathfrak{e}$), sie muß also mit (V_1 — V_2) zusammenfallen, oder (V_1 — V_2) muß durch $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ gehen. Da nun y_1 die Polare von V_1 war, so wird ($\mathfrak{D}$ — $\mathfrak{E}$) nach § 11. Lehrsatz 34. β. in $\mathfrak{D}$, V_1, $\mathfrak{E}$ und dem Durchschnittspunkt von ($\mathfrak{D}$ — $\mathfrak{E}$) mit y_1 harmonisch getheilt. Zieht man also von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ die Strahlen m_1, n_1 (sie sind in der Figur nicht gezogen); so erhält man einen harmonischen Strahlbüschel $\mathfrak{A}$,$m_1x_1n_1y_1$. Da ferner y_2 die Polare von V_2 war, so wird ($\mathfrak{D}$ — $\mathfrak{E}$) in $\mathfrak{D}$, V_2, $\mathfrak{E}$, und dem Durchschnittspunkt von ($\mathfrak{D}$ — $\mathfrak{E}$) mit y_2 harmonisch getheilt. Zieht man also von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ die Strahlen m_2, n_2, so erhält man den harmonischen Strahlbüschel $\mathfrak{B}$,$m_2x_2n_2y_2$. Betrachten wir ebenso Fig. 145. b. ein in einen Kegelschnitt beschriebenes Fünfeck ABC$\mathfrak{D}\mathfrak{E}$, so ist wegen des eingeschriebenen Viereckes $\mathfrak{D}$C$\mathfrak{E}$B Y_1, da es der Durchschnittspunkt der Verbindungsgeraden der Gegenecken ($\mathfrak{D}$ — $\mathfrak{E}$), (B — C) ist, der Pol der dritten Verbindungsgeraden der Durchschnittspunkte der Gegenseiten [($\mathfrak{D}$ — C) · ($\mathfrak{E}$ — B)] und [($\mathfrak{D}$ — B) · ($\mathfrak{E}$ — C)] oder der Geraden v_1. Ebenso ist im zweiten Viereck $\mathfrak{D}$C$\mathfrak{E}$A der innere Durchschnittspunkt Y_2 der Verbindungsgeraden der Gegenecken ($\mathfrak{D}$ — $\mathfrak{E}$), (C — A) der Pol der dritten Verbindungsgeraden v_2 der Gegenecken [($\mathfrak{D}$ — C) · ($\mathfrak{E}$ — A)] und [($\mathfrak{D}$ — A) · ($\mathfrak{E}$ — C)]. Es ist also nach § 11.

Lehrsatz 39. $(v_1 \cdot v_2)$ der Pol von $(Y_1 - Y_2)$ oder von $(\mathfrak{E} - \mathfrak{D})$. Es berühren also nach § 11. Lehrsatz 34. $\mathfrak{a}$ die von $(v_1 \cdot v_2)$ an den Kegelschnitt gelegten Tangenten $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ denselben in $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$. Sucht man nun im Strahlbüschel $(v_1 \cdot v_2)$, $v_1 \mathfrak{d}\mathfrak{e}$ den dem Strahl v_1 zugeordneten harmonischen, so geht derselbe nach § 11. Erklärung 37. durch den Pol von v_1, d. h. durch Y_1. Nennen wir die Punkte, in denen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}$ die $\mathfrak{a}$ schneiden, bezüglich M_1, N_1, (sie sind in der Figur nicht angegeben); so ist also Punktreihe $\mathfrak{a}, M_1 X_1 N_1 Y_1$ harmonisch. Suchen wir im Strahlbüschel $(v_1 \cdot v_2)$, $v_2 \mathfrak{d}\mathfrak{e}$ den dem Strahl v_2 zugeordneten harmonischen, so geht derselbe durch den Pol von v_2, d. h. durch Y_2. Bezeichnen wir nun den Durchschnittspunkt von $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{b}$ bezüglich durch M_2, N_2, so wird also auch Punktreihe $\mathfrak{b}, M_2 X_2 N_2 Y_2$ harmonisch.

Mit Hülfe dieser Bemerkungen und des Lehrsatzes 7. lassen sich nun die Aufgaben B. a), B. b) leicht lösen. Sind im Falle B. a) drei Tangenten a, b, c, und zwei Curvenpunkte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, die auf keiner der Geraden a, b, c, liegen, Fig. 146. a. gegeben, so kommt es offenbar darauf an, die beiden Tangenten $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ zu finden, indem dadurch nach Lehrsatz 1. der Kegelschnitt gefunden wäre. Wir bezeichnen die Durchschnittspunkte $(c \cdot b)$, $(c \cdot a)$, $(b \cdot a)$ bezüglich mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und ziehen von zweien derselben, z. B. von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, nach $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ die Strahlen m_1, n_1; m_2, n_2. Dann kommt es nach dem Vorigen darauf an, zwei solche Strahlenpaare x_1, y_1; x_2, y_2 zu finden, daß sowohl Strahlbüschel $\mathfrak{A}, b x_1 c y_1$ und $\mathfrak{A}, m_1 x_1 n_1 y_1$, als auch Strahlbüschel $\mathfrak{B}, c x_2 a y_2$ und $\mathfrak{B}, m_2 x_2 n_2 y_2$ harmonisch ist. Diese Aufgabe ist nach § 4. Aufgabe 23. leicht zu lösen, indem man den Strahlbüschel $\mathfrak{A}$ als einen involutorischen ansieht, in welchem b und c, m_1 und n_1 je ein Paar entsprechender Strahlen sind, und in dieser Involution die Hauptstrahlen x_1, y_1 sucht. Dann ist nach § 4. Lehrsatz 15. sowohl $\mathfrak{A}, b x_1 c y_1$ als $\mathfrak{A}, m_1 x_1 n_1 y_1$ harmonisch. Ebenso hat man im Büschel $\mathfrak{B}$, c und a; m_2 und n_2 als entsprechende Strahlen einer Involution anzusehen und die Hauptstrahlen x_1, y_1 zu suchen. Es ist nun leicht zu zeigen, daß in Folge dieser Construction auch am dritten Punkte $\mathfrak{C}$ ein Strahlbüschel entsteht, der ebenso beschaffen ist, wie der in $\mathfrak{A}$ oder in $\mathfrak{B}$. Da nämlich der Construction zufolge Strahlbüschel $\mathfrak{A}, b x_1 c y_1$ und $\mathfrak{B}, c x_2 a y_2$ oder $\mathfrak{B}, a x_2 c y_2$ harmonisch sind und letzterer mit ersterem den Strahl c gemein hat, so liegen sie perspectivisch, und zwar, da sie harmonisch sind, für zwei Axen x_3, y_3, die beide durch $(b \cdot a)$ oder $\mathfrak{C}$ gehen (vgl. Fig. 145. a.). Es entsteht also bei $\mathfrak{C}$ ein harmonischer Strahlbüschel $\mathfrak{C}, a x_3 b y_3$. Ziehen wir ferner von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ die Strahlen m_3, n_3, so läßt sich leicht zeigen, daß auch Strahlbüschel $\mathfrak{C}, m_3 x_3 n_3 y_3$ harmonisch sein muß. Denn die Strahlen x_1, y_1; x_2, y_2 erzeugen ein vollständiges Vierseit $x_1 y_1 x_2 y_2$. Da nun $(\mathfrak{D} - \mathfrak{E})$ dasselbe schneidet, so entsteht auf $(\mathfrak{D} - \mathfrak{E})$ nach § 4. Lehrsatz 20. eine Involution, indem die Durchschnittspunkte von $(\mathfrak{D} - \mathfrak{E})$ mit x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 (s. Fig. 145. a.)

ein Paar entsprechende Punkte sind. Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt von $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E})$ und x_1 mit V_1, von $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E})$ und x_2 mit V_2, von $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E})$ und y_1 mit W_2, von $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E})$ und y_2 mit W_2, von $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E})$ und x_3 mit $\mathfrak{V}_3$, von $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E})$ und y_3 mit $\mathfrak{W}_3$, so ist Punktreihe $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E}), V_2 \mathfrak{W}_3 V_1 W_1 \mathfrak{V}_3 W_2$ involutorisch. Wegen der Harmonie der Strahlbüschel $\mathcal{A}, m_1 x_1 n_1 y_1$ und $\mathcal{B}, m_2 x_2 n_2 y_2$ ist zugleich Punktreihe $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E}), \mathfrak{D} V_1 \mathfrak{E} W_1$ und $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E}), \mathfrak{D} V_2 \mathfrak{E} W_2$ harmonisch. Es sind also $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ die Hauptpunkte der Involution; folglich ist auch Punktreihe $(\mathfrak{D}-\mathfrak{E}), \mathfrak{D} \mathfrak{V}_3 \mathfrak{E} \mathfrak{W}_3$ harmonisch, also auch Strahlbüschel $\mathcal{C}, m_3 x_3 n_3 y_3$ harmonisch. Es entsteht also auch an $\mathcal{C}$ ein involutorischer Strahlbüschel, in welchem a und b; m_3 und n_3, entsprechende Strahlen, x_3, y_3, die Hauptstrahlen sind. Es erhellt hieraus, daß es einerlei ist, ob man, Fig. 146. a. bei der Construction von den Strahlbüscheln $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, oder von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$, oder von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ausgeht. Denn es giebt nach § 4. Aufgabe 23. zu jeden zwei Strahlen a und b; m_3 und n_3 nur ein einziges Paar, x_3, y_3, so daß es mit jedem der anderen beiden einen harmonischen Büschel bildet, und wie wir eben sahen, erhalten wir diese Strahlen, wenn wir auch von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ausgehen. Es folgt ferner hieraus, da es in einer Involution nur dann Hauptstrahlen giebt, wenn sie entgegengesetzt verläuft, daß, wenn die Involution $\mathcal{A}, m_1 b n_1 c$ einstimmig verläuft, die anderen beiden $\mathcal{B}, m_2 c n_2 b$, $\mathcal{C}, m_3 a n_3 b$ nicht beide entgegengesetzt verlaufen können, indem man sonst von diesen ausgehend ein Paar Strahlen x_1, y_1 finden könnte, die mit c, b; m_1, n_1 einen harmonischen Büschel bilden, was gegen die Voraussetzung wäre, daß in $\mathcal{A}$ ein Paar solcher Strahlen nicht gefunden werden könnten. Man sieht also: Ist die angegebene Construction unmöglich, wenn man von zwei Punkten, z. B. von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ausgeht, so ist sie auch unmöglich, wenn man von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$, oder von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ausgeht. — Wir erhielten nun, wie gezeigt wurde, ein vollständiges Vierseit $x_1 y_1 x_1 y_2$ oder $x_1 y_1 x_3 y_3$ oder $x_2 y_2 x_3 y_3$, oder also ein vollständiges Viereck $M_1 M_2 M_3 M_4$. Jeden der vier Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 nun kann man als den Punkt $(\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{e})$ in Fig. 145. a. ansehen, und also $(M_1-\mathfrak{D})$, $(M_1-\mathfrak{E})$ als die Tangenten $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ ansehen, aber ebenso gut auch $(M_2-\mathfrak{D})$, $(M_2-\mathfrak{E})$; $(M_3-\mathfrak{D})$, $(M_3-\mathfrak{E})$; $(M_4-\mathfrak{D})$, $(M'_4-\mathfrak{E})$. Man erhält demnach, je nachdem man einen der vier Punkte als $(\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{e})$ annimmt, vier Paar Gerade, sie mögen $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}_1$; $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{e}_2$; $\mathfrak{d}_3$, $\mathfrak{e}_3$; $\mathfrak{d}_4$, $\mathfrak{e}_4$ heißen, die man als Tangenten in $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ betrachten kann; also, da durch a, b, c, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}_1$; oder durch a, b, c, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{e}_2$ u. s. w., nach Lehrsatz 1. ein Kegelschnitt bestimmt ist, vier verschiedene Kegelschnitte, die der Aufgabe Genüge leisten; wenn nämlich nicht die Lösung überhaupt unmöglich ist. Dieß tritt dann ein, wenn die gegebenen Stücke a, b, c, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ eine solche Lage haben, daß von den drei entstehenden, als involutorisch zu betrachtenden Strahlbüscheln $\mathcal{A}, c m_1 b_1 n_1$; $\mathcal{B}, b m_2 a_2 n_2$; $\mathcal{C}, a m_3 b m_3$ einer einstimmig verläuft. Ist die Aufgabe B. b) gegeben, nämlich einen Kegelschnitt zu construiren, wenn gegeben sind drei Punkte A, B, C, und zwei Tan-

genten $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, Fig. 145. b., so kommt es offenbar darauf an, die Berührungspunkte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ zu finden. Wir bezeichnen wieder $(A-B)$, $(A-C)$, $(B-C)$ bezüglich mit $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, Fig. 146. b., die Durchschnittspunkte, in denen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, diese Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ schneiden, bezüglich mit M_1, N_1; M_2, N_2; M_3, N_3. Dann sind nach dem Früheren, wenn wir z. B. von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ausgehen, ein Paar solche Punkte X_1, Y_1; X_2, Y_2 zu suchen, daß Punktreihe $\mathfrak{a}, BX_1CY_1$ und $\mathfrak{a}, M_1X_1N_2Y_1$; Punktreihe $\mathfrak{b}, CX_2AY_2$ und $\mathfrak{b}, M_2X_2N_2Y_2$ harmonisch sind. Sie werden gefunden nach § 4. Aufgabe 23., indem man auf $\mathfrak{a}$ B und C; M_1 und N_1; auf $\mathfrak{b}$ C und A; M_2 und N_2 als entsprechende Punkte einer Involution ansieht, und die Hauptpunkte X_1, Y_1; X_2, Y_2 sucht. Wegen der Harmonie der Punktreihen $\mathfrak{a}, BX_1CY_1$ und $\mathfrak{b}, CX_2AY_2$ oder $\mathfrak{b}, AX_2CY_2$ und des gemeinsamen Punktes C, sind dieselben für zwei Centra X_3, Y_3 perspectivisch, die beide auf $\mathfrak{c}$ liegen, und es entsteht auf $\mathfrak{c}$ eine harmonische Punktreihe $\mathfrak{c}, AX_3BY_3$; ferner entsteht ein vollständiges Vierseit $m_1m_2m_3m_4$. Verbindet man den Durchschnittspunkt $(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e})$ mit den Durchschnittspunkten der Gegenseiten desselben, und bezeichnet (s. Fig. 145. b.), den von $(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e})$ nach X_1, X_2; Y_1, Y_2; X_3, Y_3 gezogenen Strahl bezüglich mit v_1, v_2; w_1, w_2; $\mathfrak{v}_3$, $\mathfrak{w}_3$, so entsteht nach § 4. Lehrsatz 20. ein involutorischer Strahlbüschel $(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e}), v_2\mathfrak{w}_3v_1w_1\mathfrak{v}_3w_2$, und da $\mathfrak{a}, M_1X_1N_1Y_1$; $\mathfrak{b}, M_2X_2N_2Y_2$, also auch Strahlbüschel $(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e}), \mathfrak{d}v_1\mathfrak{e}w_1$ und $(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e}), \mathfrak{d}v_2\mathfrak{e}w_2$ harmonisch sind, so sind $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}$ die Hauptstrahlen desselben, also auch $(\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{e}), \mathfrak{d}\mathfrak{v}_3\mathfrak{c}\mathfrak{w}_3$ und $\mathfrak{c}, M_3X_3N_3Y_3$ harmonisch. Es folgt hieraus aus denselben Gründen, wie oben, daß es gleichgültig ist, von welchem Paare der Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ man ausgeht, und daß, wenn eine der drei involutorischen Punktreihen $\mathfrak{a}, M_1BN_1C$; $\mathfrak{b}, M_2CN_2A$; $\mathfrak{c}, M_3AN_3B$, Fig. 146. b. einstimmig verläuft, die anderen beiden nicht entgegengesetzt verlaufen können, daß also, wenn die Lösung unmöglich ist, indem man von einem Paar, z. B. von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ausgeht, sie auch unmöglich bleibt, wenn man von einem der beiden anderen Paare ausgeht. Man kann nun die Durchschnittspunkte von $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, mit jeder der vier Seiten des vollständigen Vierseits $m_1m_2m_3m_4$ als die Punkte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ in Fig. 145. b. ansehen; und erhält also vier Paar Punkte $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{E}_1$; $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{E}_2$; $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{E}_3$; $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{E}_4$, die der Aufgabe genügen; falls sie nicht unmöglich ist. Es giebt also keinen, oder vier Kegelschnitte. Man sieht also:

8. Lehrsatz. Soll ein Kegelschnitt gesucht werden, der drei gegebene Gerade a, b, c berührt, und zugleich durch zwei gegebene Punkte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ geht, von denen keiner auf einer der Geraden a, b, c liegt, so giebt es entweder keinen, oder vier Kegel-

8. Lehrsatz. Soll ein Kegelschnitt gesucht werden, der durch drei gegebene Punkte A, B, C geht, und zugleich zwei gegebene Gerade $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ berührt, von denen keine durch einen der Punkte A, B', C geht, so giebt es entweder keinen oder vier

schnitte, welche dieser Bedingung genügen. Fig. 145. a., 146. a.	Kegelschnitte, welche dieser Bedingung genügen. Fig. 145. b., 146. b.

Die Aufgaben A. a), A. b); B. a), B. b) enthalten nun mehrere specielle Fälle. Es kann nämlich in A. a) eine der gegebenen Geraden durch den gegebenen Punkt gehen, in A. b) kann einer der gegebenen Punkte auf der gegebenen Geraden liegen; in B. a) kann eine der Geraden durch einen der beiden Punkte, oder zwei der Geraden durch die beiden Punkte gehen, in B. b) kann einer der Punkte auf einer der beiden Geraden, oder die beiden Punkte auf zweien der Geraden liegen. Der erstere dieser drei Fälle soll mit A. a′), A. b′), die Specialisirungen von B. a) und B. b) sollen, wenn ein Punkt auf einer Geraden liegt, mit B. a_1), B. b_1), wenn zwei Punkte auf zwei Geraden liegen, mit B. a_2), B. b_2) bezeichnet werden.

Im Falle A. a′) *) seien also gegeben die vier Tangenten a, b, c, d, und der Berührungspunkt einer derselben, z. B. der Berührungspunkt A von a. Es läßt sich nun sofort jede beliebige fünfte Tangente e finden, denn sehen wir auf a irgend einen Punkt (a · e) als Durchschnitt einer fünften Tangente e an, so haben wir, um ihre Lage festzustellen, nur ihren Durchschnitt mit b (oder c, oder d) zu suchen. Dieß geschieht nach § 11. Lehrsatz 65.; indem man auf b nur denjenigen Punkt (b · e) sucht, der die Conformitätsgleichung a,A(a · c) (a · d) (a · e) $\overline{\wedge}$ b,(b · a) (b · c) (b · d) (b · e) erfüllt. Da es nun bloß einen einzigen solchen Punkt (b · e) giebt, so giebt es also nur eine einzige fünfte Tangente e. Um sie selbst zu finden, hat man nur [(a · e) — (b · e)] zu ziehen, denn sie ist e. Durch fünf Tangenten ist aber ein Kegelschnitt bestimmt; es giebt also nur eine einzige Gerade, die der Bedingung genügt. Sind im Falle A. b′) vier Punkte A, B, C, D, und die Tangente in einem derselben z. B. die Tangente a im Punkte A gegeben, so läßt sich auf jedem beliebigen, von A ausgehenden Strahl der auf ihm liegende Curvenpunkt E finden. Man hat nämlich nach § 11. Lehrsatz 65. nur einen solchen Strahl (B — E) zu suchen, daß Strahlbüschel A,a(A — C) (A — D) (A — E) $\overline{\wedge}$ B,(B — A) (B — C) (B — D) (B — E) ist. Der Durchschnittspunkt von (A — E) und (B — E) ist dann ein fünfter Curvenpunkt, also nach Lehrsatz 1. der Kegelschnitt bestimmt. Man sieht also:

9. Lehrsatz. Soll ein Kegelschnitt gesucht werden, der vier gegebene Gerade a, b, c, d, und eine derselben a in einem gegebenen Punkt A berührt, so giebt es stets einen,	9. Lehrsatz. Soll ein Kegelschnitt gesucht werden, der durch vier gegebene Punkte A, B, C, D, geht, und in einem derselben, A, von einer gegebenen Gera-

*) Man wird sich die hier und bei A. b′) zu Grunde gelegte Figur leicht selbst construiren.

aber nur einen einzigen, Kegelschnitt, der diese Bedingung befriedigt.

den a berührt wird, so giebt es stets einen, aber nur einen einzigen, Kegelschnitt, der diese Bedingung befriedigt.

Es seien im Falle B. a_1) gegeben die drei Tangenten a, b, c, auf a der Berührungspunkt A, und noch ein, weder auf a, noch auf b, noch auf c gelegener Punkt 𝔇. Denken wir uns den Kegelschnitt bereits gefunden und auch im Punkte 𝔇 an ihn eine Tangente 𝔡 gelegt*), so entsteht ein umgeschriebenes Vierseit abc𝔡. Bezeichnen wir die als bekannt angenommenen Berührungspunkte von b, c mit B, C, so entsteht auch ein eingeschriebenes vollständiges Viereck ABC𝔇. Nach § 11. Lehrsatz 31. fallen nun die drei Diagonalen des ersteren, abc𝔡, mit den Verbindungsgeraden der Durchschnittspunkte der Gegenseiten des letzteren zusammen, so daß, wenn wir [(A—B)·(C—𝔇)] mit S, [(A—𝔇)·(B—C)] mit R, [(A—C)·(B—𝔇)] mit T bezeichnen, [(a·b)—(c·𝔡)] mit (R—T), [(a·c)—(b·𝔡)] mit (S—R), [(a·𝔡)—(b·c)] mit (S—T) zusammenfällt. Nun ist im umgeschriebenen Vierseit die Diagonale [(a·b)—(c·𝔡)] in (a·b), T, (c·𝔡), R harmonisch getheilt; ziehen wir also von (b·c) nach R die Gerade y, nach T die Gerade x (welche also mit der Diagonalen [(a·𝔡)—(b·c)] des umgeschriebenen Vierseits zusammenfällt), so ist Strahlbüschel (b·c), bxcy harmonisch. Ferner entsteht im eingeschriebenen Viereck bei S ein harmonischer Strahlbüschel, dessen Strahlen die Geraden (A—B), (S—T) oder x, (C—𝔇), (S—R) sind. Es wird also die Seite (A—𝔇) in A, M, 𝔇, R harmonisch getheilt, wenn der Durchschnitt von (A—𝔇) mit x durch M bezeichnet wird. Ziehen wir nun von (b·c) nach A die Gerade m, nach 𝔇 den Strahl n, so ist also auch Strahlbüschel (b·c), mxny harmonisch. Um daher, wenn der Kegelschnitt noch unbekannt ist, die Tangente an 𝔇 zu finden, haben wir nur, da b, c, m, n gegeben sind, ein Paar solcher Strahlen x, y zu suchen, daß sowohl Strahlbüschel (b·c), bxcy, als (b·c), mxny harmonisch sind, was nach § 4. Aufgabe 23. geschieht. Den Durchschnitt eines dieser beiden Strahlen, z. B. von x mit a können wir nun als den Punkt (a·𝔡) ansehen, in welchem die gesuchte Tangente 𝔡 des Punktes 𝔇 die a schneidet. Um also 𝔡 selbst zu finden, haben wir nur von (a·x) nach 𝔇 zu ziehen. Hat man so 𝔡 gefunden, so hat man vier Tangenten a, b, c, 𝔡 und den Berührungspunkt A einer derselben; also ist nach Lehrsatz 9. der Kegelschnitt nun bestimmt. Ueberdieß erhält man im Durchschnittspunkt von [(a·b)—(c·𝔡)] und dem anderen Hauptstrahl y den Punkt R, im Durchschnittspunkt von x mit derselben Geraden den Punkt T, also durch Verbindung von 𝔇 mit T, und indem man den Durchschnitt dieser Geraden

*) Auch hier und in B. b_1) wird man sich die Figur leicht construiren.

($\mathfrak{D}$−T) mit b. sucht, den Punkt B; der Durchschnittspunkt von x mit [(a · c)−(b · $\mathfrak{d}$)] giebt den Punkt S und der Durchschnitt von (S−$\mathfrak{D}$) mit c den Punkt C. Statt den Durchschnittspunkt von x mit a als Punkt (a · $\mathfrak{d}$) anzusehen, kann man aber auch den Punkt (a · y) als (a · $\mathfrak{d}$) betrachten, also durch Verbindung von (a · y) mit $\mathfrak{D}$ eine andere Gerade erhalten, die man ebenfalls als Tangente $\mathfrak{d}$ ansehen kann. Man erhält so einen zweiten Kegelschnitt, der ebenfalls der Forderung genügt. Man erhält also im Allgemeinen zwei Lösungen; auch können die gegebenen Stücke a, b, c, A, $\mathfrak{D}$ eine solche Lage haben, daß Strahlbüschel (b . c), bmcn eine einstimmig verlaufende Involution bildet, also keine Hauptstrahlen x, y vorhanden sind. Dann ist die Lösung unmöglich. — Im Falle B. b_1) seien ebenso gegeben die drei Punkte A, B, C, die in A berührende Tangente a, und eine weder in A, noch in B, noch in C berührende Tangente $\mathfrak{d}$. Stellen wir uns wieder den Kegelschnitt als gefunden vor, bezeichnen die Tangenten in B und C mit b, c, die drei Diagonalen [(a · b)−(c · $\mathfrak{d}$)], [(a · $\mathfrak{d}$) −(b · c)]; [(a · c)−(b · $\mathfrak{d}$)] des umgeschriebenen Vierseits abc$\mathfrak{d}$ bezüglich mit s, r, t, so liegt nach § 11. Lehrsatz 31. auch [(A−B) · (C−$\mathfrak{D}$)] in (r · t), [(A−C) · (B−$\mathfrak{D}$)] in (s · r), [(A−$\mathfrak{D}$) · (B−C)] in (s · t). Im eingeschriebenen Viereck ABC$\mathfrak{D}$ entsteht nun im Durchschnittspunkt [(A−B) · (C−$\mathfrak{D}$)] ein harmonischer Strahlbüschel mit den Strahlen (A−B), t, (C−$\mathfrak{D}$), r. Nennt man nun den Punkt, in dem (B−C) von r und t geschnitten wird, bezüglich Y, X, so ist Punktreihe (B−C), BXCY harmonisch. Im umgeschriebenen Vierseit wird s in (a · b), X, (c · $\mathfrak{d}$), (s · r) harmonisch getheilt. Es entsteht also, wenn man die Verbindungsgerade von (a · $\mathfrak{d}$) mit X durch m bezeichnet, ein harmonischer Strahlbüschel (a · $\mathfrak{d}$), am$\mathfrak{d}$r. Nennt man den Durchschnitt von (B−C) mit a und mit $\mathfrak{d}$ bezüglich M, N, so ist also auch Punktreihe (B−C), MXNY harmonisch. Es kommt demnach die Auflösung der Aufgabe darauf hinaus, mit Hülfe von § 4. Aufgabe 23. zwei solche Punkte X, Y zu finden, daß sowohl (B−C), BXCY, als (B−C), MXNY harmonisch sind. Sind sie gefunden, so kann man entweder (A−X) oder (A−Y) als (A−$\mathfrak{D}$) ansehen, und der Durchschnittspunkt jeder dieser Geraden mit $\mathfrak{d}$ giebt einen Punkt, der als $\mathfrak{D}$ betrachtet werden kann. Da dann A, B, C, $\mathfrak{D}$ und die Tangente a des Punktes A bekannt ist, so ist nach Lehrsatz 9. der Kegelschnitt bestimmt. Die Tangenten b, c bestimmen sich ganz analog, wie im Falle B. a_1) die Punkte B, C. Es giebt also, wenn die Lösung überhaupt möglich ist, allemal zwei Kegelschnitte, die das Verlangte leisten. Man erhält also den:

10. Lehrsatz. Soll ein Kegelschnitt gesucht werden, der drei gegebene Gerade a, b, c, und zwar die a im gegebenen Punkte A berührt, und zugleich durch einen

10. Lehrsatz. Soll ein Kegelschnitt gesucht werden, der durch drei gegebene Punkte A, B, C geht, und zwar in A von einer gegebenen Geraden a, und zu-

Punkt 𝔇 geht, der auf keiner der Geraden a, b, c liegt, so giebt es entweder keinen, oder zwei Kegelschnitte, welche dieser Forderung genügen.

gleich von einer Geraden 𝔡 berührt wird, die durch keinen der Punkte A, B, C geht, so giebt es entweder keinen, oder zwei Kegelschnitte, welche dieser Forderung genügen.

Es seien endlich im Falle B. a_2) drei Tangenten a, b, c und die Berührungspunkte von zweien derselben, z. B. von a, und b, also die Punkte A, B, gegeben, so läßt sich sogleich noch eine vierte Tangente d finden. Man nehme auf a irgend einen Punkt als Durchschnittspunkt der gesuchten Tangente d an, nehme also einen beliebigen Punkt auf a als (a · d) an, so läßt sich sogleich (b · d) finden. Denn man hat nach § 11. Lehrsatz 65. nur den Punkt (b · d) auf b so zu bestimmen, daß Punktreihe a,A(a · b) (a · c) (a · d) $\barwedge$ b,(b · a) B(b · c) (b · d) ist. Den so gefundenen Punkt (b · d) verbinde man mit (a · d) durch die Gerade [(a · d) − (b · d)], so ist diese eine neue Tangente d. Man hat nun vier Tangenten a, b, c, d des Kegelschnittes, und den Berührungspunkt A von a (oder B von b); also ist nach Lehrsatz 9. derselbe bestimmt; und es kann nur einen geben, da es nur einen Punkt (b · d) auf b giebt, der obiger Conformitätsgleichung genügt. Im Falle B. b_2) seien drei Punkte A, B, C und die Tangenten a, b an A, B, gegeben, dann ziehe man im Strahlbüschel A einen beliebigen Strahl und suche den auf ihm liegenden Curvenpunkt D. Zu diesem Zwecke hat man nach § 11. Lehrsatz 65. nur einen solchen Strahl (B − D) zu suchen, daß Strahlbüschel A,a(A − B) (A − C) (A − D) $\barwedge$ B,(B − A) b(B − C) (B − D) ist. Der Durchschnittspunkt [(A − D) · (B − D)] ist der gesuchte Curvenpunkt D. Da es bloß einen einzigen solchen Strahl (B − D) giebt, und man nun vier Punkte A, B, C, D und die Tangente a an A (oder b an B) hat, so ist nach Lehrsatz 9. der Kegelschnitt bestimmt, und es giebt nur einen einzigen. Man wird übrigens bemerken, daß der Fall B. a_2) und B. b_2) derjenige war, von dem wir in § 11. ausgingen. Man sieht also:

11. Lehrsatz. Soll ein Kegelschnitt gesucht werden, der drei gegebene Gerade a, b, c, und zwar zwei derselben, a, b in gegebenen Punkten A, B, berührt, so giebt es stets einen, aber nur einen einzigen Kegelschnitt, der dieser Forderung genügt.

11. Lehrsatz. Soll ein Kegelschnitt gesucht werden, der durch drei gegebene Punkte A, B, C geht und zwar in zweien derselben A, B, von gegebenen Geraden a, b, berührt wird, so giebt es stets einen, aber nur einen einzigen Kegelschnitt, der dieser Forderung genügt.

Fassen wir die Lehrsätze 1., 6., 8., 9., 10., 11., zusammen, so können wir also sagen:

12. Lehrsatz. Ein Kegelschnitt ist

A. **vollständig** bestimmt:

1) durch fünf Tangenten a, b, c, d, e;
2) durch vier Tangenten a, b, c, d und den Berührungspunkt A einer dieser Tangenten a;
3) durch drei Tangenten a, b, c und die Berührungspunkte A, B zweier derselben, a, b.

Ein Kegelschnitt ist

B. **nicht vollständig** bestimmt:

1) durch vier Tangenten a, b, c, d und einen Curvenpunkt E, der von keiner derselben der Berührungspunkt ist. Es sind zwei Kegelschnitte möglich oder keiner.
2) durch drei Tangenten a, b, c, den Berührungspunkt A einer derselben a, und einen Curvenpunkt D, der von keiner der drei Tangenten a, b, c der Berührungspunkt ist. Es giebt zwei Kegelschnitte oder keinen.
3) durch drei Tangenten a, b, c und zwei Curvenpunkte D, E, von denen keiner der Berührungspunkt einer der drei Tangenten a, b, c ist. Es giebt vier Kegelschnitte, oder keinen.

12. Lehrsatz. Ein Kegelschnitt ist

A. **vollständig** bestimmt:

1) durch fünf Curvenpunkte A, B, C, D, E;
2) durch vier Curvenpunkte A, B, C, D und die Tangente a in einem dieser Punkte A;
3) durch drei Curvenpunkte A, B, C und die Tangenten a, b in zweien derselben, A, B.

Ein Kegelschnitt ist

B. **nicht vollständig** bestimmt:

1) durch vier Curvenpunkte A, B, C, D und eine Tangente e, die in keinem derselben berührt. Es sind zwei Kegelschnitte möglich oder keiner.
2) durch drei Curvenpunkte A, B, C, die Tangente a in einem derselben A, und eine Tangente d, die in keinem der drei Curvenpunkte A, B, C berührt. Es giebt zwei Kegelschnitte oder keinen.
3) durch drei Curvenpunkte A, B, C und zwei Tangenten d, e, von denen keine die Tangente in einem der drei Curvenpunkte A, B, C ist. Es giebt vier Kegelschnitte, oder keinen.

Es soll hiermit natürlich nicht gesagt werden, daß dieß die einzigen Stücke sind, durch die ein Kegelschnitt bestimmt ist, sondern es sind nur die, gewissermaßen den Umfang bildenden, Stücke aufgezählt, die zur Bestimmung hinreichen, sowie die, welche nicht dazu hinreichen, von denen man es aber der Analogie nach vermuthen möchte. Sonst giebt es, wenn man die Axen, Brennpunkte u. s. w. berücksichtigt, natürlich noch viele Bestimmungsstücke, mit denen ein Kegelschnitt gegeben ist*).

Es soll hier nur noch ein Fall erwähnt werden, in welchem dem Vorigen zufolge sich ebenfalls ein Kegelschnitt construiren läßt. Nach § 11. Lehrsatz 44. ist jeder derselben sich selbst involutorisch collinear für ein beliebiges, nicht auf der Peripherie gelegenes Involutionscentrum Σ, und eine beliebige, nicht berührende Gerade σ als Involutionsaxe, Fig. 131. a., 131. b. Es ist leicht zu sehen, daß die Curve vollständig bestimmt ist, wenn das Involutionscentrum Σ nebst der zur Bestimmung der Involution nöthigen Anzahl von Strahlen (s. § 4. Lehrsatz 18.) und drei Tangenten, z. B. a_1, b_1, c_1 (statt deren ebenso gut auch drei andere, z. B. a_1, b_1, c_2, oder a_1, b_2, c_2 u. s. w. genommen werden können) gegeben sind. Es ist nun leicht, sogleich die der Tangente a_1 homologe Tangente a_2 (wenn man das involutorische System als aus zwei perspectivischen bestehend ansieht) zu finden. Es seien nämlich gegeben Σ und zwei Paar entsprechender Strahlen der Involution, die ε, ε'; η, η' heißen mögen (die in Fig. 131. a., welche man gebrauchen mag, nicht gezogen sind), so ziehe man zunächst von Σ einen Strahl γ' nach $(a_1 \cdot b_1)$. Da nun nach § 4. Lehrsatz 18. durch irgend zwei Paar entsprechender Strahlen ε, ε'; η, η', die Involution bestimmt ist, so kann man nach § 4. Aufgabe 21. den dem Strahl γ' entsprechenden γ finden. Dieser muß nun durch den Punkt $(a_2 \cdot b_1)$ gehen. Denn in den beiden involutorisch liegenden Systemen ist dem a_1, b_1 des Systems I., bezüglich a_2, b_2 des Systems II., und der Geraden a_2, b_2 in I., a_1, b_1 in II. homolog. Es geht also $[(a_1 \cdot b_1) - (a_2 \cdot b_2)]$ und $[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$ durch Σ (s. auch § 9. Lehrsatz 24). Denkt man sich ferner das vollständige Vierseit $a_1 b_1 a_2 b_2$ construirt, so schneiden sich nach demselben Satze die Geraden a_1 und a_2, b_1 und b_2 auf der (noch unbekannten) Axe σ, oder σ ist die eine Diagonale des umgeschriebenen Vierseits, die zweite ist γ', die dritte ist $[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$. Nach § 11. Lehrsatz 38. β. ist nun der Durchschnittspunkt Γ von σ mit $[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$ der Pol von γ'; also ist derselbe nach § 11. Lehrsatz 44. zugleich der Punkt, in welchem der dem Strahl γ' entsprechende Strahl γ der Involution die σ schneidet. Da nun $[(a_1 \cdot b_2) - (a_2 \cdot b_1)]$ selbst durch Σ geht, so muß diese Gerade selbst γ sein. Man erhält also im Durchschnitt von γ mit b_1 einen Punkt, durch den a_2 gehen muß. Ziehen wir nun

---

*) Man sehe Paulus: „Grundlinien der neueren Geometrie". Aufgabensammlung.

von Σ einen Strahl δ' nach $(a_1 \cdot c_1)$ und suchen den entsprechenden involutorischen Strahl δ, so geht derselbe aus denselben Gründen, wie γ durch $(a_2 \cdot b_1)$, durch $(a_2 \cdot c_1)$; man erhält also im Durchschnittspunkt von δ mit c_1 einen zweiten Punkt, durch den a_2 gehen muß. Zieht man nun $[(b_1 \cdot \gamma) - (c_1 \cdot \delta)]$, so ist dieß die Tangente a_2. Ferner liegt aber auch auf dem Strahle γ, welcher dem durch $(a_1 \cdot b_1)$ gehenden Strahle γ' entspricht, der Punkt $(a_1 \cdot b_2)$; oder es geht b_2 durch $(a_1 \cdot \gamma)$. Zieht man nun noch von Σ nach $(b_1 \cdot c_1)$ den Strahl ζ' und sucht den ihm entsprechenden ζ, so geht derselbe durch $(b_2 \cdot c_1)$, oder b_2 geht auch durch $(c_1 \cdot \zeta)$. Zieht man also $[(a_1 \cdot \gamma) - (c_1 \cdot \zeta)]$, so ist dieß die Tangente b_2. Man hat nun fünf Tangenten a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, also ist nach Lehrsatz 12. A. 1) der Kegelschnitt bestimmt. Man hat aber auch sogleich noch eine sechste Tangente, denn auf δ liegt auch $(a_1 \cdot c_2)$ oder c_2 geht durch $(a_1 \cdot \delta)$, und ζ geht auch durch $(b_1 \cdot c_2)$, oder c_2 geht durch $(b_1 \cdot \zeta)$; zieht man also $[(a_1 \cdot \delta) - (b_1 \cdot \zeta)]$, so ist dieß c_2. Man hat ferner, da man das vollständige Vierseit $a_1 b_1 a_2 b_2$ hat, auch die Involutionsaxe σ. Sind insbesondere als Involutionscentrum ein äußerer Punkt Σ, Fig. 131. a. und statt ε, ε'; η, η' nur die zwei Hauptstrahlen s, s', der Involution gegeben; so kann man, ohne daß noch ein anderes Paar entsprechender Strahlen gegeben zu sein braucht, die Curve finden. Denn man hat dann fünf Tangenten, s, s', a_1, b_1, c_1, wodurch nach Lehrsatz 12. A. 1) der Kegelschnitt schon bestimmt ist; oder man kann verfahren, wie eben gezeigt wurde; nur ist es jetzt leichter, den z. B. dem Strahl γ' entsprechenden γ zu finden; denn man hat ihn nur so zu bestimmen, daß Σ, $s\gamma' s'\gamma$ harmonisch ist. Ebenso finden sich δ und ζ aus der Bedingung, daß $\Sigma, s\delta' s'\delta$ und $\Sigma, s\zeta' s'\zeta$ harmonisch sein müssen. Daß dann an Σ wirklich ein involutorischer Strahlbüschel mit den Paaren entsprechender Strahlen γ, γ'; δ, δ'; ζ, ζ' und den Hauptstrahlen s, s' entsteht, folgt sogleich aus § 4. Lehrsatz 17. und 19. Zugleich gehört auch jedes andere Paar Strahlen λ, λ', welches so beschaffen ist, daß $\Sigma, s\lambda' s'\lambda$ harmonisch ist, derselben Involution an, nach § 4. Lehrsatz 18. β. — Es sei nun von einem Kegelschnitt gegeben die Involutionsaxe σ und zwei Paar, die Involution auf ihr bestimmende Punktpaare E, E'; H, H'; und drei beliebige Curvenpunkte, z. B. A_1, B_1, C_1, Fig. 131. a., 131. b. Man ziehe nun $(A_1 - B_1)$, welche die σ in Γ schneidet, so muß, wenn man auf σ den dem Γ entsprechenden Punkt Γ' der Involution sucht, dieser auch auf $(A_2 - B_1)$ liegen. Denn, da A_1 und A_2, B_1 und B_2 homologe Punkte der beiden die Involution bildenden Systeme sind, so schneiden sich nach § 9. Lehrsatz 24. $(A_1 - B_1)$ und $(A_2 - B_2)$, aber auch $(A_1 - B_2)$ und $(A_2 - B_1)$ auf der Axe σ. Denkt man sich ferner das vollständige Viereck $A_1 B_1 A_2 B_2$ construirt, so gehen nach demselben Satze $(A_1 - A_2)$ und $(B_1 - B_2)$ durch das (noch unbekannte) Involutionscentrum Σ; oder Σ ist ein Durchschnittspunkt der Gegenseiten des vollständigen Vierecks $A_1 B_1 A_2 B_2$, der zweite ist Γ, der dritte $[(A_1 - B_2) \cdot (A_2 - B_1)]$. Nach § 11.

Lehrsatz 38. β ist nun die Verbindungsgerade von Σ mit $[(A_1 - B_2) \cdot (A_2 - B_1)]$ die Polare von Γ; es ist also dieselbe nach § 44. zugleich der von Σ ausgehende Strahl, auf welchem im Durchschnittspunkte mit σ der dem Γ entsprechende Punkt Γ′ liegen muß. Da nun $[(A_1 - B_2) \cdot (A_2 - B_1)]$ selbst auf σ liegt, so muß dieser Punkt identisch sein mit Γ′; oder man muß, wenn man auf σ den dem Punkt Γ entsprechenden der Involution sucht, den Punkt $[(A_1 - B_2) \cdot (A_2 - B_1)]$ erhalten. Man erhält also, wenn man Γ′ mit B_1 verbindet, einen Strahl, auf dem A_2 liegen muß, oder es liegt A_2 auf $(B_1 - \Gamma')$. Aus denselben Gründen muß auch A_2 auf $(C_1 - \Delta')$ liegen, wenn man den Durchschnittspunkt von $(A_1 - C_1)$ mit σ durch Δ, und den ihm entsprechenden involutorischen mit Δ′ bezeichnet. Es ist daher der Durchschnittspunkt von $(B_1 - \Gamma')$ und $(C_1 - \Delta')$ der Punkt A_2; ebenso ist, wenn man den Durchschnittspunkt von $(B_1 - C_1)$ mit σ durch Z, und den entsprechenden mit Z′ bezeichnet, B_2 auf $(A_1 - \Gamma')$ und auf $(C_1 - Z')$, also im Durchschnittspunkt $[(A_1 - \Gamma') \cdot (C_1 - Z')]$ gelegen. Man hat also jetzt fünf Curvenpunkte, die zur Bestimmung der Curve ausreichen. Auch findet sich sogleich noch ein sechster Punkt C_2, nämlich in $[(A_1 - \Delta') \cdot (B_1 - Z')]$, und das Involutionscentrum Σ durch den Durchschnitt von $(A_1 - A_2)$ mit $(B_1 - B_2)$ oder $(C_1 - C_2)$. Sind statt der zwei Paare, die Involution auf σ bestimmenden entsprechenden Punkte, im Falle die σ eine wirkliche Secante ist, nur die beiden Hauptpunkte S, S′ statt der zwei Punktpaare E, E′; H, H′ Fig. 131. a. gegeben, so läßt sich ebenso der Kegelschnitt finden, indem man, um die Punkte Γ′, Δ′, Z′ zu finden, nur solche Punkte zu suchen hat, die in den Punktreihen σ,SΓS′; σ,SΔS′; σZS′ die dem Γ, Δ, Z zugeordneten harmonischen sind nach § 4. Lehrsatz 18. β. Man sieht also:

13. Lehrsatz. Ein Kegelschnitt ist vollständig bestimmt, wenn ein Punkt Σ als Involutionscentrum, zwei die Involution bestimmende Paare entsprechender Involutionsstrahlen, und drei beliebige Tangenten gegeben sind. Fig. 131.a., 131.b.

13. Lehrsatz. Ein Kegelschnitt ist vollständig bestimmt, wenn eine Gerade σ als Involutionsaxe, zwei die Involution bestimmende Paare entsprechender Involutionspunkte, und drei beliebige Curvenpunkte gegeben sind. Fig. 131. a. 131. b.

und:

14. Lehrsatz. Ein Kegelschnitt ist vollständig bestimmt, wenn ein Punkt Σ als Involutionscentrum, die beiden Hauptstrahlen s, s′, der Involution und

14. Lehrsatz. Ein Kegelschnitt ist vollständig bestimmt, wenn eine Gerade σ als Involutionsaxe, die beiden Hauptpunkte S, S′, der Involution und drei

drei beliebige Tangenten gegeben sind. Fig 131. a.

beliebige Curvenpunkte gegeben sind. Fig. 131. a.

Man sieht also, daß man, wenn fünf Elemente, Tangenten, oder Curvenpunkte gegeben sind, um noch mehrere andere zu finden, verschiedene Wege einschlagen kann, einmal den oben vor Lehrsatz 1. angegebenen, sodann den auf Involution beruhenden, indem man den Durchschnittspunkt jeder zwei Tangenten als Involutionscentrum, die Tangenten selbst als Hauptstrahlen ansehen kann. Hat man also aus gegebenen drei Tangenten a_1, b_1, c_1 drei andere a_2, b_2, c_2 gefunden, so kann man z. B. $(a_1 \cdot b_2)$ als Σ ansehen, und nach derselben Methode wieder andere aufsuchen, u. s. w. Hat man mit Hülfe von drei Curvenpunkten A_1, B_1, C_1 drei neue A_2, B_2, C_2, gefunden, so kann man z. B. $(A_1 - B_2)$ als Involutionsaxe σ, A_1 und B_2 als die Hauptpunkte S, S' ansehen, und so fortfahrend, immer mehr Curvenpunkte aufsuchen. Es gilt dieß natürlich, mag anfänglich die Involution durch zwei Paar entsprechender Elemente, oder durch die Hauptstrahlen oder Hauptpunkte bestimmt gewesen sein.

Es wurde im Bisherigen vorausgesetzt, daß von der zu construirenden Curve nichts weiter bekannt sei, als daß sie ein Kegelschnitt sein solle. Ist aber genauer angegeben, was für einer derselben, so sind oft nicht so viele Stücke zur Bestimmung nöthig, als im Vorigen angegeben wurde. Gesetzt z. B. es soll ein Kreis construirt werden, und es sind nur gegeben drei Punkte, z. B. A, A', P, Fig. 134., so braucht man sich nur an § 11. Lehrsatz 66. γ) zu erinnern. Man nehme zwei dieser Punkte als Scheitel gleicher Strahlbüschel an, z. B. A und P, ziehe von A einen beliebigen Strahl, z. B. $(A - D)$, so hat man nur einen solchen Strahl $(P - D)$ an P zu legen, daß der von $(A - A')$ und $(A - D)$ eingeschlossene Winkel gleich dem von $(P - A')$ und $(P - D)$ eingeschlossenen ist. Durch dieselbe Bedingung bestimmt sich jeder folgende Strahl; nur müssen die Strahlen einstimmig verlaufen, da man sonst eine gleichseitige Hyperbel erhält; man sieht also, daß Kreis und gleichseitige Hyperbel schon durch drei Curvenpunkte bestimmt sind. Man kann ferner, wenn eine Parabel construirt werden soll, schon mit vier Tangenten a, b, c, d Fig. 147. ausreichen, indem man als fünfte die unendlich entfernte annimmt. Es muß nämlich nach § 11. Lehrsatz 66. γ) die Punktreihe z. B. auf a proportional der auf b sein. Sind also außer a, b noch zwei Tangenten, c, d gegeben, so kann man sofort den Berührungspunkt A auf a, B auf b finden. Man hat nur von $(a \cdot d)$ aus eine solche Strecke $\mathfrak{D}_1 A$ zu bestimmen, daß $\frac{A\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{S}_1\mathfrak{D}_1} = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{S}_2\mathfrak{D}_2}$ ist; ebenso findet sich B auf b durch die Proportion $\frac{B\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{D}_2\mathfrak{S}_2} = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_1}$. Um ferner eine weitere Tangente e zu finden, nehme man auf a einen

Punkt $\mathfrak{E}_1$ willkürlich an und bestimme auf b einen Punkt $\mathfrak{E}_2$ so, daß $\frac{\mathfrak{S}_1\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_1} = \frac{\mathfrak{S}_2\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{D}_2\mathfrak{E}_2}$ ist, so ist $(\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2)$ eine fünfte Tangente e. Auf gleiche Weise läßt sich jede folgende finden; es ist demnach die Parabel vollständig bestimmt. Man sieht also, daß für diese speciellen Kegelschnitte der Lehrsatz 12. A. 1) sich dahin abändert:

15. Lehrsatz. Die Parabel ist schon durch vier im Endlichen liegende Tangenten vollständig bestimmt.

15. Lehrsatz. Der Kreis und die gleichseitige Hyperbel sind schon durch drei Curvenpunkte vollständig bestimmt.

Im Falle man weiß, daß zwei Tangenten, z. B. a, b sich auf der Axe der Parabel schneiden, braucht man sogar nur drei, da dann die Proportionalität in Gleichheit übergeht. Wie sich die übrigen in Lehrsatz 12. ausgesprochenen Sätze für Parabel, Kreis und gleichseitige Hyperbel abändern und vereinfachen, wird man leicht beurtheilen.

§ 13.

Collineation der Kegelschnitte.

Es seien, Fig. 148., K_1, K_2 beliebige gegebene, d. h. verzeichnet vorliegende Kegelschnitte und a_1, b_1, c_1 drei beliebige Tangenten an K_1, A_1, B_1 die Berührungspunkte von a_1, b_1; a_2, b_2, c_2 drei beliebige Tangenten an K_2, und A_2, B_2 die Berührungspunkte von a_2, b_2. Ziehen wir ferner an K_1 eine beliebige vierte Tangente d_1; so läßt sich stets auf a_2 ein Punkt $(a_2 \cdot d_2)$ finden von solcher Lage, daß Punktreihe $a_2,(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot d_2)A_2 \overline{\wedge} a_1,(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot d_1)A_1$ ist. Ferner läßt sich auf b_2 ein solcher Punkt $(b_2 \cdot d_2)$ finden, daß Punktreihe $b_2,(b_2 \cdot a_2)(b_2 \cdot d_2)(b_2 \cdot c_2)B_2 \overline{\wedge} b_1,(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot d_1)(b_1 \cdot c_1)B_1$ ist. Zieht man nun $[(a_2 \cdot d_2) - (b_2 \cdot d_2)]$, so muß dieselbe den Kegelschnitt K_2 berühren, denn, da a_2 die Curve berührt, und $(a_2 \cdot d_2)$ nicht mit A_2 zusammenfallen kann, so muß nach § 11. Lehrsatz 25. durch $(a_2 \cdot d_2)$ noch eine Tangente gehen, ebenso durch $(b_2 \cdot d_2)$. Nennt man den als noch unbekannt anzusehenden Durchschnittspunkt, den die Tangente, welche die a_2 in $(a_2 \cdot d_2)$ trifft, auf b_2 bildet: $(b_2 \cdot \delta)$, so muß nach § 11. Lehrsatz 65. $(b_2 \cdot \delta)$ der Conformitätsgleichung genügen: $a_2,(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot d_2)A_2 \overline{\wedge} b_2,B_2(b_2 \cdot c_2)(b_2 \cdot \delta)(b_2 \cdot a_2)$. Es ist aber nach der Construction $a_2,(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot d_2)A_2 \overline{\wedge} a_1,(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot d_1)A_1$ und $b_2,B_2(b_2 \cdot c_2)(b_2 \cdot d_2)(b_2 \cdot a_2) \overline{\wedge} b_1,B_1(b_1 \cdot c_1)(b_1 \cdot d_1)(b_1 \cdot a_1)$. Da nun K_1 ein Kegelschnitt ist, so ist nach § 11. Lehrsatz 65. $a_1,(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot d_1)A_1 \overline{\wedge} b_1,B_1(b_1 \cdot c_1)(b_1 \cdot d_1)(b_1 \cdot a_1)$, folglich auch

$a_2,(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot d_2)A_2 \overline{\wedge} b_2,B_2(b_2 \cdot c_2)(b_2 \cdot d_2)(b_2 \cdot a_2)$. Es muß also $(b_2 \cdot \delta)$ in $(b_2 \cdot d_2)$ liegen, oder $(b_2 \cdot d_2)$ muß derjenige Punkt sein, in welchem die Tangente des Kegelschnittes K_2, welche die a in $(a_1 \cdot d_2)$ trifft, die b_2 schneidet. Es ist also $[(a_2 \cdot d_2) - (b_2 \cdot d_2)]$, d. h. d_2 eine Tangente an K_2. Man sieht also, wie auch schon aus § 10. Lehrsatz 3. hervorgeht, wenn man das durch die Punktreihen $a_2,(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot c_2)A_2$, $b_2,(b_2 \cdot a_2)(b_2 \cdot d_2)B_2$ bestimmte System construirt, und es auf das von den Punktreihen $a_1,(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot c_1)A_1$, $b_1,(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot c_1)B_1$ bestimmte collinear bezieht (nach § 7. Lehrsatz 16. β), so ist jede Gerade d_2 des Systems II., die einer Geraden d_1 im System I. homolog ist, wenn d_1 den durch die Geraden a_1, b_1, c_1 und die Berührungspunkte A_1, B_1 bestimmten (nach § 12. Lehrsatz 12. A. 3)) Kegelschnitt K_1 im ersten System berührt, ebenfalls eine Tangente an dem im zweiten System construirten Kegelschnitt K_2, welcher von a_2, b_2, c_2 und zwar von ersteren beiden in A_2, B_2 berührt wird. Auch ist leicht zu sehen, daß der Berührungspunkt D_2 von d_2 dem Berührungspunkt D_1 von d_1 homolog sein muß. Denn nach § 11. Lehrsatz 65. ist $d_2,(d_2 \cdot b_2)(d_2 \cdot c_2)D_2(d_2 \cdot a_2) \overline{\wedge} b_2,B_2(b_2 \cdot c_2)(b_2 \cdot d_2)(b_2 \cdot a_2)$ und $d_1,(d_1 \cdot b_1)(d_1 \cdot c_1)D_1(d_1 \cdot a_1) \overline{\wedge} b_1,B_1(b_1 \cdot c_1)(b_1 \cdot d_1)(b_1 \cdot a_1)$. Nach der Voraussetzung ist aber $b_2,B_2(b_2 \cdot c_2)(b_2 \cdot d_2)(b_2 \cdot a_2) \overline{\wedge} b_1,B_1(b_1 \cdot c_1)(b_1 \cdot d_1)(b_1 \cdot a_1)$, also ist auch $d_2,(d_2 \cdot b_2)(d_2 \cdot c_2)D_2(d_2 \cdot a_2) \overline{\wedge} d_1,(d_1 \cdot b_1)(d_1 \cdot c_1)D_1(d_1 \cdot a_1)$. Da nun d_2 und d_1 ein Paar homologe Gerade der Systeme I. und II., $(d_2 \cdot b_2)$ und $(d_1 \cdot b_1)$, $(d_2 \cdot c_2)$ und $(d_1 \cdot c_1)$, $(d_2 \cdot a_2)$ und $(d_1 \cdot a_1)$ je ein Paar homologe Punkte sind, und nach § 7. Lehrsatz 10. der dem Punkt D_1 homologe Punkt Δ die Eigenschaft haben muß, daß $d_2,(d_2 \cdot b_2)(d_2 \cdot c_2)\Delta(d_2 \cdot a_2) \overline{\wedge} d_1,(d_1 \cdot b_1)(d_1 \cdot c_1)D_1(d_1 \cdot a_1)$ ist, so muß Δ nach D_2 fallen. Ein Gleiches läßt sich von jedem anderen Paare Tangenten e_1, e_2 und ihren Berührungspunkten E_1, E_2 zeigen. Man hätte sich übrigens auch nach § 7. Lehrsatz 17. die beiden Systeme als von den vollständigen Vierecken $A_1B_1(b_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot c_1)$, $A_2B_2(b_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot d_2)$ erzeugt denken können. Es seien ferner, Fig. 148., K_1, K_2 zwei Kegelschnitte, A_1, B_1, C_1 drei beliebige Curvenpunkte des einen, a_1, b_1 die Tangenten in A_1, B_1; A_2, B_2, C_2 drei beliebige Curvenpunkte des anderen, a_2, b_2 die Tangenten in A_2, B_2; es sei ferner D_1 ein vierter Punkt von K_1, und $(A_1 - D_1)$, $(B_1 - D_1)$ gezogen. Man bestimme nun einen solchen Strahl $(A_2 - D_2)$ an A_2, $(B_2 - D_2)$ an B_2, daß Strahlbüschel $A_2,(A_2 - B_2)(A_2 - C_2)(A_2 - D_2)a_2 \overline{\wedge} A_1,(A_1 - B_1)(A_1 - C_1)(A_1 - D_1)a_1$ und Strahlbüschel $B_2,(B_2 - A_2)(B_2 - D_2)(B_2 - C_2)b_2 \overline{\wedge} B_1,(B_1 - A_1)(B_1 - D_1)(B_1 - C_1)b_1$ ist, so läßt sich genau auf dieselbe Weise, wie so eben an Tangenten gezeigt wurde, beweisen, daß, wenn man in den beiden durch $A_1,(A_1 - B_1)(A_1 - C_1)a_1$, $B_1,(B_1 - A_1)(B_1 - C_1)b_1$; $A_2,(A_2 - B_2)(A_2 - C_2)a_2$, $B_2(B_2 - A_2)(B_2 - C_2)b_2$ bestimmten Systemen (s. § 7. Lehrsatz 16. β) den einem Punkt D_1 des Kegelschnittes K_1 (der nach

§ 12. Lehrsatz 12. A. 3) durch A_1, B_1, C_1, a_1, b_1 bestimmt ist) homologen Punkt im zweiten System sucht, dieser ein Curvenpunkt des (durch A_2, B_2, C_2, a_2, b_2 bestimmten) Kegelschnittes K_2 sein muß, und daß jeder Tangente d_1 des Kegelschnittes K_1 wieder eine Tangente d_2 des Kegelschnittes K_2 homolog ist. Da man sich die Collineation beider Systeme auch durch die vollständigen Vierseite $a_1b_1(B_1-C_1)(A_1-C_1)$, $a_2b_2(B_2-C_2)(A_2-C_2)$ nach § 7. Lehrsatz 17, bestimmt denken kann, so kann man also sagen:

1. Lehrsatz. Jede zwei beliebigen Kegelschnitte K_1, K_2 lassen sich als homologe Curven von unendlich vielen Paaren collinearer Systeme ansehen. Um ein Paar solcher collinearer Systeme zu erhalten, kann man drei beliebige Tangenten a_2, b_2, c_2 und die Berührungspunkte A_2, B_2 zweier derselben an dem einen Kegelschnitt K_2 als drei beliebigen Tangenten a_1, b_1, c_1, und den Berührungspunkten A_1, B_1, zweier derselben an dem anderen Kegelschnitt K_1 homolog festsetzen. Oder man kann ein vollständiges Viereck $A_2B_2(b_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot c_2)$, in welchem zwei Eckpunkte in beliebigen Curvenpunkten A_2, B_2 des einen Kegelschnittes K_2, die anderen beiden Eckpunkte $(b_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot c_2)$ in den Durchschnittspunkten der Tangenten a_2, b_2 in A_2, B_2, mit einer beliebigen dritten c_2 liegen, als einem ebenso beschaffenen vollständigen Viereck $A_1B_1(b_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot c_1)$ am anderen Kegelschnitt K_1, wo A_1, B_1 ganz beliebige Curvenpunkte sind, homolog annehmen. Jeder Tangente

1. Lehrsatz. Jede zwei beliebigen Kegelschnitte K_1, K_2, lassen sich als homologe Curven von unendlich vielen Paaren collinearer Systeme ansehen. Um ein Paar solcher collinearer Systeme zu erhalten, kann man drei beliebige Curvenpunkte A_2, B_2, C_2, und die Tangenten a_2, b_2 zweier derselben an dem einen Kegelschnitt K_2 als drei beliebigen Curvenpunkten A_1, B_1, C_1, und den Tangenten a_1, b_1 zweier derselben an dem anderen Kegelschnitt K_1 homolog festsetzen. Oder man kann ein vollständiges Vierseit $a_2b_2(B_2-C_2)(A_2-C_2)$, in welchem zwei Seiten von beliebigen Tangenten a_2, b_2 des einen Kegelschnittes K_2, die anderen Seiten (B_2-C_2), (A_2-C_2) von den Verbindungsgeraden der Berührungspunkte A_2, B_2 der Tangenten a_2, b_2 mit einem beliebigen dritten Curvenpunkt C_2 gebildet werden, als einem ebenso beschaffenen vollständigen Vierseit $a_1b_1(B_1-C_1)(A_1-C_1)$ am anderen Kegelschnitt K_1, wo a_1, b_1 ganz beliebige Tangenten sind, homolog annehmen. Jedem Curven-

d_1 des einen Kegelschnittes K_1 ist dann eine Tangente d_2 des anderen Kegelschnittes K_2, jedem Curvenpunkt D_1 des einen ein Curvenpunkt D_2 des anderen homolog. Fig. 148.

punkt D_1 des einen Kegelschnittes K_1 ist dann ein Curvenpunkt D_2, des anderen Kegelschnittes K_2, jeder Tangente d_1 des einen einer Tangente d_2 des anderen homolog. Fig. 148.

Da es hier weniger um die Systeme, als um die Kegelschnitte zu thun ist, so pflegt man von der in § 7. Erklärung 18. aufgestellten Definition etwas abzuweichen. Nämlich:

2. Erklärung. Statt zu sagen: Jede zwei ebene Systeme, deren jedes einen Kegelschnitt enthält, können collinear so auf einander bezogen werden, daß die Kegelschnitte homologe Curven beider Systeme sind, sagt man: **Jede zwei Kegelschnitte können collinear auf einander bezogen werden.**

Es enthält dann der Lehrsatz 1. folgende beide Gesetze:

3. Lehrsatz. Jede beliebigen zwei Kegelschnitte können auf unendlich viele, in Lehrsatz 1. angegebene Weisen collinear auf einander bezogen werden.

4. Lehrsatz. Sind zwei Kegelschnitte collinear auf einander bezogen, so ist jeder Tangente des einen eine Tangente des anderen, jedem Curvenpunkt des einen ein Curvenpunkt des anderen homolog.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Satz 3. dadurch, daß ihm zufolge jeder beliebige Kegelschnitt als mit einem Kreise collinear angesehen werden kann, so daß nach den Gesetzen der Collineation § 7. Lehrsatz 9., 10., 13., 14., 15.; § 10. Lehrsatz 2., 3. eine Reihe von Eigenschaften, nämlich alle diejenigen, die sich auf Conformität gründen, und die hieraus abgeleiteten Sätze der Collineation und Involution auf die übrigen Kegelschnitte ausgedehnt und von ihnen behauptet werden können*). Verzeichnet man umgekehrt ein ebenes System,

*) Steiner in seiner: „Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit ꝛc.", § 35. — § 40., und Seydewitz in seinem Buche: „Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene ꝛc." Seite 26., definiren „Kegelschnitt" in der altherkömmlichen Weise, indem sie diese Curven als aus einem Kegel geschnitten ansehen, oder sie als Projection eines Kreises im Raume im Wesentlichen auf die Art, wie sie in der Anmerkung zu § 11. Erklärung 64. angegeben ist, ansehen; Paulus in seinen: „Grundlinien der neueren Geometrie" Seite 153., um die Anwendung der räumlichen Projection zu vermeiden, versteht unter „Kegelschnitten" die dem Kreise collinearen Curven, und leitet die Eigenschaften derselben auf die im Texte angegebene Weise aus denen des Kreises ab. Abgesehen davon, daß bei dieser Definition erst zu beweisen ist, daß die so entstehenden Curven auch wirklich mit den sonst unter dem Namen „Kegelschnitte" bekannten identisch sind, hat dieses Beweisverfahren, so bequem es auch ist, eine Schattenseite. Es lassen sich nämlich beim Kreise die auf

zieht in ihm einen Kegelschnitt, oder, im Speciellen, Kreis K_1, Fig 148., construirt dann ein zweites System auf die in Lehrsatz 1. angegebene Weise, indem man drei Gerade a_2, b_2, c_2 den drei Tangenten von K_1, a_1, b_1, c_1, und zwei Punkte auf a_2, b_2, nämlich A_2, B_2, als den Berührungspunkten A_1, B_1, von a_1, b_1 homolog annimmt, oder indem man drei Punkte A_2, B_2, C_2 als den Curvenpunkten A_1, B_1, C_1 von K_1, und die durch A_2, B_2 gehenden Geraden a_2, b_2 als den Tangenten a_1, b_1 von A_1, B_1 homolog annimmt, oder indem man ein Viereck $A_2B_2(b_2\cdot c_2)(a_2\cdot c_2)$ als dem Viereck $A_1B_1(b_1\cdot c_1)(a_1\cdot c_1)$ oder ein Vierseit $a_2b_2(B_2-C_2)(A_2-C_2)$ als dem Vierseit $a_1b_1(B_1-C_1)(A_1-C_1)$ homolog annimmt, und sucht im zweiten System die den beliebigen Curvenpunkten D_1 von K_1 homologen Punkte D_2, so müssen dieselben auf einem Kegelschnitte liegen. Denn nach § 7. Lehrsatz 13. kann es zu jeder Geraden d_1 des ersten Systems nur eine einzige homologe Gerade d_2 des zweiten Systems geben. Auf einer Geraden d_1 kann es höchstens zwei Punkte der Curve K_1 geben; dasselbe muß nach § 10. Lehrsatz 6. auch im zweiten System statt haben, und zwar müssen ebenso viele Punkte auf d_2 liegen, als auf d_1. Ferner sind, wenn K_1 ein Kreis ist, je zwei Strahlbüschel $A_1,(A_1-B_1)(A_1-C_1)(A_1-D_1)a_1, B_1,(B_1-A_1)(B_1-D_1)(B_1-C_1)b_1$ gleich, also auch conform; ist K_1 ein anderer Kegelschnitt, so ist ebenfalls, nach § 11. Lehrsatz 65. $A_1,(A_1-B_1)(A_1-C_1)(A_1-D_1)a_1 \overline{\wedge} B_1,b_1(B_1-C_1)(B_1-D_1)(B_1-A_1)$, und nach demselben Satze ist (mag K_1 ein Kreis oder ein anderer Kegelschnitt sein) $a_1,(a_1\cdot b_1)(a_1\cdot c_1)(a_1\cdot d_1)A_1 \overline{\wedge} b_1,B_1(b_1\cdot c_1)(b_1\cdot d_1)(b_1\cdot a_1)$. Nach § 7. Lehrsatz 9. ist aber nun $A_2,(A_2-B_2)(A_2-C_2)(A_2-D_2)a_2 \overline{\wedge} A_1,(A_1-B_1)(A_1-C_1)(A_1-D_1)a_1$; $B_2,b_2(B_2-C_2)(B_2-D_2)(B_2-A_2) \overline{\wedge} B_1,b_1(B_1-C_1)(B_1-D_1)(B_1-A_1)$; $a_2,(a_2\cdot b_2)(a_2\cdot c_2)(a_2\cdot d_2)A_2 \overline{\wedge} a_1,(a_1\cdot b_1)(a_1\cdot c_1)(a_1\cdot d_1)A_1$; $b_2,B_2(b_2\cdot c_2)(b_2\cdot d_2)(b_2\cdot a_2) \overline{\wedge} b_1,B_1(b_1\cdot c_1)(b_1\cdot d_1)(b_1\cdot a_1)$; also ist auch $A_2,(A_2-B_2)(A_2-C_2)(A_2-D_2)a_2 \overline{\wedge} B_2,b_2(B_2-C_2)(B_2-D_2)(B_2-A_2)$ und $a_2,(a_2\cdot b_2)(a_2\cdot c_2)(a_2\cdot d_2)A_2 \overline{\wedge} b_2,B_2(b_2\cdot c_2)(b_2\cdot d_2)(b_2\cdot a_2)$. Es ist also nach § 11. Lehrsatz 65. die der Curve K_1 homologe ein Kegelschnitt. Man kann also einmal die Umkehrung von Lehrsatz 4. behaupten, nämlich:

5. Lehrsatz. Bezieht man ein ebenes System auf die in Lehrsatz 1. angegebene Weise collinear auf ein anderes,

---

Conformität hinauslaufenden Eigenschaften leicht beweisen; die Gleichheit der Strahlbüschel folgt sogleich aus der Eigenschaft der Peripheriewinkel; daß jede zwei Tangenten von jeden vier übrigen conform getheilt werden, ergiebt sich ebenfalls leicht aus den bekannten Eigenschaften des Kreises, und das so gefundene Resultat läßt sich dann mittelst der Collineationsgesetze leicht auf die übrigen Kegelschnitte übertragen. Es ist jedoch nicht möglich, dieß bei ihnen direkt auf eine Weise darzuthun, die der beim Kreise befolgten im Entferntesten analog wäre, weil eben der Beweis bei demselben sich auf seine bekannten einfachen Eigenschaften stützt, welche die übrigen nicht besitzen.

welches einen Kegelschnitt K_1 enthält, und sucht in dem ersteren die demselben homologe Curve, so ist dieselbe allemal wieder ein Kegelschnitt.

und im Besonderen

6. Lehrsatz. Jeder Kegelschnitt kann als eine dem Kreise homologe Curve betrachtet werden in zwei ebenen Systemen, die nach Lehrsatz 1. collinear auf einander bezogen sind, und umgekehrt:

Bezieht man ein ebenes System nach Lehrsatz 1. collinear auf ein anderes, welches einen Kegelschnitt (z. B. einen Kreis) enthält, und sucht die diesem homologe Curve des ersten Systems, so erhält man allemal einen Kegelschnitt.

Der Lehrsatz 5., also auch die Umkehrung in 6 lassen sich übrigens noch allgemeiner aussprechen. Es sei ein ebenes System verzeichnet, und in demselben ein Kegelschnitt K_1, Fig. 149. Man setze ein diesem System nicht angehöriges vollständiges Vierseit $a_2 b_2 c_2 d_2$ als homolog irgend einem Vierseit des ersten Systems, z. B. dem umgeschriebenen Vierseit $a_1 b_1 c_1 d_1$. Um nun die dem Kegelschnitt K_1 homologe Curve des zweiten Systems zu finden, haben wir nur z. B. auf a_2 einen solchen Punkt A_2 zu suchen, daß Punktreihe $a_2,(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot d_2)A_2 \overline{\wedge}\, a_1,(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot d_1)A_1$ ist, wenn A_1 der Berührungspunkt von a_1 ist; ebenso findet sich B_2 auf b_2, C_2 auf c_2, D_2 auf d_2. Da nun K_1 ein Kegelschnitt ist, so ist nach § 11. Lehrsatz 65. Punktreihe $a_1,(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot d_1)A_1$ $\overline{\wedge}\, b_1,B_1(b_1 \cdot c_1)(b_1 \cdot d_1)(b_1 \cdot a_1)$, also auch $a_2,(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot c_2)$ $(a_2 \cdot d_2)A_2 \overline{\wedge}\, b_2,B_2(b_2 \cdot c_2)(b_2 \cdot d_2)(b_2 \cdot a_2)$ und so bei jedem anderen Paar Tangenten. Zieht man im System I. noch eine Tangente, sie heiße m_1 und bestimmt zwei Punkte $(a_2 \cdot m_2)$, $(b_2 \cdot m_2)$ auf a_2, b_2 im System II. so, daß $a_2,(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot d_2)(a_2 \cdot m_2)$ $\overline{\wedge}\, a_1,(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot d_1)(a_1 \cdot m_1)$ und $b_2,(b_2 \cdot c_2)(b_2 \cdot d_2)$ $(b_2 \cdot a_2)(b_2 \cdot m_2) \overline{\wedge}\, b_1,(b_1 \cdot c_1)(b_1 \cdot d_1)(b_1 \cdot a_1)(b_1 \cdot m_1)$ ist, so ist, weil nach § 11. Lehrsatz 65. auch $c_1,(c_1 \cdot a_1)(c_1 \cdot b_1)(c_1 \cdot d_1)$ $(c_1 \cdot m_1) \overline{\wedge}\, a_1,A_1(a_1 \cdot b_1)(a_1 \cdot d_1)(a_1 \cdot m_1)$ ist, auch $c_2,(c_2 \cdot a_2)$ $(c_2 \cdot b_2)(c_2 \cdot d_2)(c_2 \cdot m_2) \overline{\wedge}\, a_2,A_2(a_2 \cdot b_2)(a_2 \cdot d_2)(a_2 \cdot m_2)$ und überhaupt ist der Durchschnittspunkt von m_2 mit jeder der Geraden a_2, b_2, c_2, d_2 ein Punkt der conformen Theilung. Es sind also nach § 11. Lehrsatz 65. die Geraden a_2, b_2, c_2, d_2, m_2, etc. Tangenten eines Kegelschnittes, und zwar ist A_2 der Berührungspunkt von a_2, B_2 der von c_2 etc. Man erhält also als Curve K_2 einen Kegelschnitt. Setzt man ebenso irgend ein vollständiges Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ eines einen Kegelschnitt K_1 enthaltenden Systems einem beliebigen, nicht zu diesem Systeme gehörigen Viereck $A_2 B_2 C_2 D_2$, Fig. 149., homolog, und bestimmt die der Tangente a_1 an K_1 entsprechende Tangente a_2 dadurch, daß man eine solche Gerade sucht, daß Strahlbüschel A_2,a_2

$(A_2-B_2)(A_2-C_2)(A_2-D_2) \overline{\wedge} A_1,a_1(A_1-B_1)(A_1-C_1)(A_1-D_1)$ ist, und eine der Tangente b_1 homologe Gerade b_2 dadurch, daß man Strahlbüschel $B_2,(B_2-A_2)\, b_2(B_2-C_2)(B_2-D_2) \overline{\wedge} B_1,(B_1-A_1)$ $b_1(B_1-C_1)(B_1-D_1)$ macht, so muß auch $A_2,a_2(A_2-B_2)(A_2-C_2)$ $(A_2-D_2) \overline{\wedge} B_2,(B_2-A_2)\, b_2(B_2-C_2)(B_2-D_2)$ sein, da im System I. der Strahlbüschel A_1 conform B_1 ist. Ebenso müssen auch die Strahlbüschel A_2, C_2; A_2, D_2 etc. conform sein. Nimmt man auf K_1 noch einen beliebigen Curvenpunkt, er heiße M_1 an, und sucht M_2, indem man z. B. im Büschel A_2 den dem Strahl (A_1-M_1) und im Büschel B_2 den dem Strahl (B_1-M_1) homologen Strahl sucht, so muß, da $A_1,a_1(A_1-B_1)(A_1-C_1)(A_1-M_1) \overline{\wedge} B_1,(B_1-A_1)\, b_1(B_1-C_1)(B_1-M_1)$ ist, auch $A_2,a_2(A_2-B_2)(A_2-C_2)$ $(A_2-M_2) \overline{\wedge} B_2,(A_2-A_2)\, b_2(B_2-C_2)(B_2-M_2)$ sein. Ebenso muß in den conformen Strahlbüscheln z. B. A_2, C_2 der Strahl (C_2-M_2) dem Strahl (A_2-M_2) entsprechen, da in den conformen Strahlbüscheln A_1 und C_1 der Strahl (C_1-M_1) dem (A_1-M_1) entspricht u. s. w. Es ist daher die Curve K_2 nach § 11. Lehrsatz 65. ein Kegelschnitt. Ebenso hätte man einem beliebigen vollständigen Vierseit $(A_1-B_1)c_1(C_1-D_1)(D_1-A_1)$ in einem einen Kegelschnitt enthaltendem System, Fig. 150., ein beliebiges vollständiges Vierseit $(A_2-B_2)c_2(C_2-D_2)(D_2-A_2)$ als homolog annehmen können. Bestimmt man nun in dem durch das letztere erzeugten System die den Curvenpunkten L_1, M_1, N_1, R_1 homologen, L_2, M_2, N_2, R_2, indem man Punktreihe $(A_2-B_2), A_2L_2B_2G_2 \overline{\wedge} (A_1-B_1), A_1L_1B_1G_1$; $(A_2-B_2), A_2M_2B_2G_2 \overline{\wedge} (A_1-B_1), A_1M_1B_1G_1$; (A_2-D_2), $A_2N_2D_2F_2 \overline{\wedge} (A_1-D_1), A_1N_1D_1F_1$; $(B_2-D_2), B_2R_2E_2D_2$ $\overline{\wedge} (B_1-D_1), B_1R_1E_1D_1$ macht u. s. w., so folgt ebenso, daß sie auf einem Kegelschnitt liegen müssen, denn es ist, wenn z. B. c_1 den Kegelschnitt Q_1, C_1 schneidet, Strahlbüschel $M_1,L_1Q_1D_1N_1 \overline{\wedge} R_1$, $L_1Q_1D_1N_1$, also auch $M_2,L_2Q_2D_2N_2 \overline{\wedge} R_2,L_2Q_2D_2N_2$ u. s. w.; kurz jedem Punkt des Kegelschnittes K_1 ist ein Punkt homolog, der auf einem Kegelschnitt $R_2L_2M_2N_2D_2$ liegt. Von demselben Gesetze überzeugt man sich, wenn man von irgend einem vollständigen Vierecke ausgeht. Man sieht also, daß man nicht bloß, wenn man die beiden Systeme auf die im Lehrsatz 1. angegebene Weise auf einander bezieht, sondern auch, wenn man sie auf irgend eine andere Art auf einander bezieht, als Curve, die einem Kegelschnitt K_1 homolog ist, wieder einen Kegelschnitt erhält. Man erhält also den

7. Lehrsatz. Werden zwei ebene Systeme, deren eines einen Kegelschnitt enthält, auf irgend eine Weise collinear auf einander bezogen, so ist die dem Kegelschnitt homologe Curve des zweiten Systems allemal ebenfalls ein Kegelschnitt.

Wir hatten in Lehrsatz 7. angenommen, daß nur in einem von zwei ebenen Systemen ein Kegelschnitt verzeichnet vorliege, und daß

die ihm homologe Curve im zweiten System erst gesucht werden solle. Etwas ganz anderes ist es aber, wenn nicht bloß im ersten, sondern auch im zweiten System ein Kegelschnitt bereits verzeichnet vorliegt, Fig. 148., und verlangt wird, beide Systeme sollen collinear so auf einander bezogen werden, daß dem Kegelschnitt K_1 der bestimmte, und bereits vorhandene Kegelschnitt K_2 homolog sei. Dann kann man nicht, wie man vielleicht auf den ersten Anblick glauben könnte, z. B. ein dem K_2 umgeschriebenes beliebiges vollständiges Vierseit $a_2b_2c_2d_2$ als einem dem K_1 umgeschriebenen vollständigen Vierseit $a_1b_1c_1d_1$ homolog annehmen. Denn sucht man die einer ferneren Tangente m_1 des Kegelschnittes K_1 homologe Gerade m_2 im zweiten System, so muß dieselbe, wie eben gezeigt wurde, zwar auch einen Kegelschnitt berühren, und zwar denselben, den a_2, b_2, c_2, d_2 berühren. Aber nach § 12. Lehrsatz 12. A. 1) ist ein Kegelschnitt erst durch fünf Tangenten vollständig bestimmt, es giebt also, wenn nur vier Tangenten a_2, b_2, c_2, d_2 gegeben sind, unendlich viele Kegelschnitte, welche dieselben als Tangenten haben können. Einen derselben muß man nun erhalten, aber ob gerade den, der bereits verzeichnet vorliegt, das ist die Frage, und es ist kein Grund, daß es so sei. Noch weniger kann man überzeugt sein, den gegebenen Kegelschnitt K_2 zu erhalten, wenn man zwei beliebige Vierseite der beiden ebenen Systeme als homolog annimmt, z. B. solche, wie in Fig. 150., in denen drei Seiten Secanten der Kegelschnitte K_1, K_2, die vierte eine Tangente ist. Auch wenn man, Fig. 148., ein vollständiges, dem K_2 eingeschriebenes Viereck $A_2B_2C_2D_2$ als einem vollständigen dem K_1 eingeschriebenen Vierseit $A_1B_1C_1D_1$ homolog setzt, und nun den Punkt M_2 des zweiten Systems sucht, der einem Punkt M_1 des Kegelschnittes K_1 homolog ist, so liegt zwar M_2 mit A_2, B_2, C_2, D_2 auf einem Kegelschnitt, aber, da nach § 12. Lehrsatz 12. A. 1) ein solcher durch vier Punkte A_2, B_2, C_2, D_2 nicht vollständig bestimmt ist, so braucht M_2 nicht gerade auf der Curve K_2 zu liegen; ebenso wenig, wenn man ganz beliebige Vierecke als homolog setzt. Bezieht man aber die Systeme so auf einander, wie in Lehrsatz 1. angegeben wurde, indem man drei Tangenten des einen drei Tangenten des anderen und die Berührungspunkte von zweien derselben an dem einen den Berührungspunkten der entsprechenden Tangenten im anderen als homolog annimmt, oder indem man drei Curvenpunkte des einen drei Curvenpunkten des anderen, und die Tangenten an zweien derselben in dem einen den Tangenten an den entsprechenden Punkten im anderen als homolog annimmt, so ist damit, wie oben bewiesen wurde, nicht nur die Collineation vollständig bestimmt, sondern man muß auch, als dem K_1 homologe Curve die gegebene K_2 erhalten, da nach § 12. Lehrsatz 12. A. 3) durch die genannten Stücke ein Kegelschnitt vollständig bestimmt ist, und es nur einen geben kann, der von drei Tangenten so berührt wird, daß die Berührungspunkte von zweien gegebene Punkte sind, oder der durch drei Punkte der Art geht, daß er in

zweien derselben von gegebenen Geraden berührt wird. Welche drei Tangentenpaare, oder welche drei Punktpaare man als homolog ansehen will, das ist aber beliebig, und deßhalb können auch zwei, verzeichnet vorliegende Kegelschnitte, auf unendlich viele Arten collinear auf einander bezogen werden. Der Lehrsatz 1. oder 4. läßt sich also nicht verallgemeinern, wie es mit seiner Umkehrung (Lehrsatz 5.) der Fall war, vielmehr müssen wir sagen:

8. Lehrsatz. Zwei ebene Systeme, deren jedes einen Kegelschnitt verzeichnet enthält, können **nicht** auf jede beliebige Weise collinear auf einander bezogen werden, wenn die beiden vorgeschriebenen Kegelschnitte homologe Curven der collinearen Systeme werden sollen; bezieht man aber die Systeme auf die in Lehrsatz 1. angegebene Weise collinear auf einander, so ist der Kegelschnitt in dem einen dem Kegelschnitt in dem anderen System homolog.

oder kurz, mit Berücksichtigung von Erklärung 2.:

9. Lehrsatz. Zwei verzeichnet vorliegende Kegelschnitte K_1, K_2 können **nicht** auf jede beliebige Art collinear auf einander bezogen werden, wohl aber stets auf die in Lehrsatz 1. angegebene Weise.

Auch die speciellen Arten der Collineation, Affinität und Aehnlichkeit können bei den Kegelschnitten vorkommen. Um uns hierüber zu orientiren, erinnern wir uns, daß bereits im § 12. ausgesprochen worden war, ein Kegelschnitt sei nicht allein durch die dort in Lehrsatz 12. A. angegebenen Stücke bestimmt. So ist z. B. leicht zu sehen, daß Kreis und Ellipse vollkommen bestimmt sind, wenn von ihm die Endpunkte eines Durchmessers und ein Endpunkt des ihm conjugirten Durchmessers gegeben ist, und daß eine Hyperbel bestimmt ist, wenn von ihr ein Paar conjugirter Durchmesser und die Strecke, die auf der Tangente im Endpunkt des einen Durchmessers von diesem und einer Asymptote eingeschlossen ist, gegeben ist, daß eine Parabel vollkommen bestimmt ist, wenn von ihr eine der Axe parallele Gerade, ihr im Endlichen liegender Durchschnittspunkt und die Richtung der Sehnen, die von dieser Geraden halbirt werden, und der eine Endpunkt einer so halbirten Sehne gegeben ist, zugleich mit dem Mittelpunkte der Sehne, und dem Abstande dieses Mittelpunktes von dem Punkte, in dem die der Axe parallele Gerade die Parabel schneidet. Denn es sei Fig. 132. a. in einer Ellipse $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$ ein Durchmesser, $\mathcal{A}$ ein Endpunkt des ihm conjugirten, so kennt man sogleich die Richtung σ'' des dem σ' conjugirten Durchmessers, denn man hat nach § 11. Erklärung 49. nur $\mathcal{A}$ mit dem Mittelpunkt M von $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$ zu verbinden; um den anderen Endpunkt $\mathcal{B}$ des conjugirten Durchmessers zu finden, hat man nur $(\mathcal{A} - \mathrm{M})$ um seine Länge $\mathrm{M}\mathcal{A} = \mathrm{M}\mathcal{B}$ über M hinaus zu verlängern. Zugleich weiß man nach § 11. Lehrsatz 50. a),

daß die Tangenten in $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ parallel σ'', die an $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ parallel σ' sind. Man kann dieselben also sofort zeichnen. Man hat also vier Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und ihre Tangenten, folglich noch mehr, als zur Bestimmung des Kegelschnittes nöthig ist (vergl. § 12. Lehrsatz 12. A. 2); 3)). Ebenso ist es beim Kreis, wo sogar nur ein Durchmesser gegeben zu sein braucht, denn von dem ihm conjugirten weiß man aus § 11. Lehrsatz 53., daß er senkrecht auf dem ersten steht, daß also nach § 11. Erklärung 52. beide ein Paar Axen sind, und da die Curve ein Kreis ist, so muß die kleine Axe gleich der großen sein, man hat also auch sogleich ihren Endpunkt. Sind in der Hyperbel Fig. 132. b. die conjugirten Durchmesser σ'', σ' und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ auf σ'' gegeben, so weiß man aus § 11. Lehrsatz 50. β), daß die Tangenten in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ parallel σ' sein müssen, man kann sie also sogleich zeichnen. Ferner soll zugleich gegeben sein die Strecke $\mathfrak{B}Q'$, die man also sofort abtragen kann. Verbindet man Q' mit dem Mittelpunkt M von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, so erhält man nach § 11. Lehrsatz 47. eine Asymptote r; und die andere q bestimmt sich nach § 11. Lehrsatz 50. β) sogleich dadurch, daß man eine Gerade q von der Art sucht, daß Strahlbüschel $M, \sigma' r \sigma'' q$ harmonisch ist. Man hat also vier Tangenten r, q, die in $\mathfrak{A}$ und in $\mathfrak{B}$, und auf zweien (oder, wenn man die unendlich entfernten Berührungspunkte der Asymptoten mitrechnet, auf vieren) die Berührungspunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, (∞, ∞), also mehr als zur Bestimmung der Curve nöthig ist (vgl. § 12. Lehrsatz 12. A. 2), 3)). Ist endlich von einer Parabel, Fig. 132. c. die Gerade σ' und auf ihr der Punkt $\mathfrak{A}'$ gegeben, so wie die Richtung σ'' oder σ, so hat man nur durch $\mathfrak{A}'$ eine Gerade α' in dieser Richtung zu ziehen, so ist sie nach § 11. Lehrsatz 50. γ) eine Tangente. Ist ferner also die Strecke $\mathfrak{A}'N$, und $N\mathfrak{A}$ gegeben, so hat man nur $(N - \mathfrak{A})$ um die Strecke $N\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{B}$ zu verlängern, um noch einen Punkt $\mathfrak{B}$ zu bekommen. Ferner weiß man aus § 11. Lehrsatz 50. γ), daß die Tangenten α, β, an $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sich auf σ' schneiden. Da nun der Durchschnittspunkt $(\alpha \cdot \beta)$ der Pol von $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$ ist, so muß Punktreihe $\sigma', (\alpha \cdot \beta)\mathfrak{A}'N\infty$ harmonisch, also der Abstand des Durchschnittspunktes $(\alpha \cdot \beta)$ von $\mathfrak{A}'$ gleich $\mathfrak{A}'N$ sein. Man hat also nur $\mathfrak{A}'\Sigma = \mathfrak{A}'N$ zu machen, und $(\Sigma - \mathfrak{A})$, $(\Sigma - \mathfrak{B})$ zu ziehen, um die Tangenten α, β zu erhalten. Es sind also jetzt drei Tangenten α, β, α' und ihre Berührungspunkte bekannt, folglich noch mehr, als zur Bestimmung der Parabel nöthig sind (vgl. § 12. Lehrsatz 12. A. 3)).

Sollen nun ein Paar Kegelschnitte affin auf einander bezogen werden, so ist leicht zu sehen, daß dieß nur bei jedem Paar solcher Kegelschnitte geschehen kann, die beide entweder keinen, oder beide einen, oder beide zwei unendlich entfernte Punkte haben. Denn, sollten z. B. eine Ellipse und eine Hyperbel affin auf einander bezogen werden, so müßte nach § 8. Lehrsatz 20. jedem der unendlich entfernten Punkte der Hyperbel auch ein unendlich entfernter Punkt der Ellipse homolog sein. Es müßte also letztere zwei unendlich entfernte Punkte haben,

was nicht möglich ist. Ebenso wenig kann sie auf eine Parabel affin bezogen werden, da sie dann einen unendlich entfernten Punkt haben müßte; und deßgleichen kann eine Parabel nicht auf eine Hyperbel affin bezogen werden, da sie sonst zwei unendlich entfernte Punkte haben müßte. Zugleich müssen jede zwei homologen Punktreihen proportional getheilt sein, nach § 8. Erklärung 19.; und zugleich müssen zwei parallelen Geraden des einen Systems zwei parallele Gerade des anderen homolog sein, nach § 8. Lehrsatz 25. Es müssen also jede zwei parallelen Tangenten des einen homolog sein parallelen Tangenten des anderen. Nach § 11. Lehrsatz 48. sind aber nur die Tangenten an den Endpunkten eines Durchmessers parallel; es müssen also dieselben homologe Richtungen der affinen Systeme sein. Nun wird nach § 8. Lehrsatz 22. γ. die Affinität durch drei Punkte bestimmt, die nicht auf derselben Geraden liegen. Man hat also, um ein Paar gegebene Kreise, ein Paar Ellipsen, einen Kreis und eine Ellipse affin auf einander zu beziehen, nur die die Affinität bestimmenden drei Punkte so anzunehmen, daß zwei derselben an den Endpunkten eines Durchmessers, der dritte am Ende des ihm conjugirten Durchmessers liegt, denn durch diese Elemente ist nicht allein die Affinität, sondern, wie wir eben sahen, auch die Curve vollständig bestimmt.

Es seien nun zwei verzeichnet vorliegende Kreise affin auf einander zu beziehen, Fig. 151., so hat man also, wenn A_1, B_1; A_2, B_2, Endpunkte je eines Durchmessers, C_1, C_2 der Endpunkt je eines auf ihm senkrechten ist, A_2 homolog A_1, B_2 homolog B_1, C_2 homolog C_1 zu setzen. Da aber dann $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_2B_2 = 1R$, $\angle C_1A_1B_1 = \angle C_2A_2B_2 = \frac{1}{2}R$; $\angle C_1B_1A_1 = \angle C_2B_2A_2 = \frac{1}{2}R$ ist, so ist $\triangle A_1C_1B_1 \sim \triangle A_2C_2B_2$. Es sind also nach § 8. Lehrsatz 42. γ. die Kreise nicht affin, sondern *ähnlich* auf einander bezogen. Und in der That, da $(A_1 - B_1)$ homolog $(A_2 - B_2)$, A_1 homolog A_2, B_1 homolog B_2 sein soll, so muß die Punktreihe auf $(A_1 - B_1)$ und die auf $(A_2 - B_2)$ proportional sein. Um also den dem Mittelpunkt M_1 von A_1B_1 homologen Punkt M_2 auf $(A_2 - B_2)$ zu finden, hat man zu setzen $(A_1 - B_1), A_1M_1B_1\infty \overline{\wedge} (A_2 - B_2), A_2M_2B_2\infty$ also $\frac{A^1M_1}{B_1M_1} = \frac{A_2M_2}{B_2M_2}$. Da nun $\frac{A_1M_1}{B_1M_1} = 1$ ist, so muß auch $\frac{A_2M_2}{B_2M_2} = 1$, also M_2 der Mittelpunkt des zweiten Kreises sein. Ebenso findet sich, daß $M_2D_2 = M_2C_2$ sein muß. Es ist also auch $\angle D_1A_1B_1 = \angle D_2A_2B_2 = \frac{1}{2}R$; $\angle D_1B_1A_1 = \angle D_2B_2A_2 = \frac{1}{2}R$. Es sind also zwei Paar homologe Strahlbüschel der beiden Systeme $A_1, (A_1 - C_1)$ $(A_1 - B_1)$ $(A_1 - D_1)$ und $A_2, (A_2 - C_2)$ $(A_2 - B_2)$ $(A_2 - D_2)$; $B_1, (B_1 - C_1)$ $(B_1 - A_1)$ $(B_1 - D_1)$ und $B_2, (B_2 - C_2)$ $(B_2 - A_2)$ $(B_2 - D_2)$ gleich, und es ist sogleich zu sehen, daß dieß mit jedem anderen Paar homologer Strahlbüschel ebenfalls der Fall sein muß (s. § 8. Aufgabe 41. Auflösung 2. α)). Es ist demnach nicht möglich, zwei Kreise affin auf einander zu beziehen.

Sollen ein Kreis und eine Ellipse affin auf einander bezogen werden,

ſo nehme man, Fig. 151., die Punkte A_2, B_2 in den Enden eines Durchmeſſers, C_2 im Endpunkte des conjugirten. Man überzeugt ſich nun leicht, auf dieſelbe Weiſe, wie bei Kreiſen, daß der Mittelpunkt M_2 von A_2B_2 dem Mittelpunkt M_1 und D_2 dem D_1 homolog iſt. Da ferner, wenn man die Tangenten in A_1, B_1; A_2, B_2 zieht, $a_1 \parallel (C_1 - D_1)$, $a_2 \parallel (C_2 - D_2)$ iſt, und $(A_1 - B_1)$ die C_1D_1, $(A_2 - B_2)$ die C_2D_2 halbirt, ſo iſt Strahlbüſchel $A_1,(A_1 - C_1)(A_1 - B_1)(A_1 - D_1)a_1$ und $A_2,(A_2 - C_2)(A_2 - B_2)(A_2 - D_2)a_2$ harmoniſch nach § 1. Lehrſatz 26., alſo ſind beide conform, folglich a_2 homolog a_1; ebenſo iſt b_2 homolog b_1, c_2 homolog c_1. Zieht man nun an den Kreis eine Tangente e_1, und beſtimmt an der Ellipſe auf a_2 und c_2, je einen Punkt $(a_2 \cdot e_2)$, $(c_2 \cdot e_2)$ ſo, daß Punktreihe $a_2,(a_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot e_2)A_2\infty \;\overline{\wedge}\; a_1,(a_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot e_1)A_1\infty$; $c_2,(c_2 \cdot a_2)(c_2 \cdot e_2)C_2\infty \;\overline{\wedge}\; c_1,(c_1 \cdot a_1)(c_1 \cdot e_1)C_1\infty$ iſt, oder daß $\frac{F_2G_2}{A_2G_2} = \frac{F_1G_1}{A_1G_1}$; $\frac{F_2H_2}{C_2H_2} = \frac{F_1H_1}{C_1H_1}$ iſt, und zieht $(G_2 - H_2)$, ſo iſt ſie die der e_2 homologe Gerade des zweiten Syſtems. Der dem Berührungspunkt E_1 homologe (noch unbekannte) Punkt $\mathfrak{E}$ im zweiten Syſtem beſtimmt ſich nun durch die Conformitätsgleichung $e_2,(e_2 \cdot a_2)\mathfrak{E}(e_2 \cdot c_2)(e_2 \cdot b_2) \;\overline{\wedge}\; e_1,(e_1 \cdot a_1)E_1(e_1 \cdot c_1)(e_1 \cdot b_1)$. Aber es iſt nun nach § 11. Lehrſatz 65., weil a_1, b_1, c_1, e_1 Tangenten ſind, Punktreihe $a_1,(a_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot e_1)A_1\infty \;\overline{\wedge}\; c_1,C_1(c_1 \cdot e_1)(c_1 \cdot a_1)(c_1 \cdot b_1)$. Da nun $a_2,(a_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot e_2)A_2\infty \;\overline{\wedge}\; a_1,(a_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot e_1)A_1\infty$, und $c_2,C_2(c_2 \cdot e_2)(c_2 \cdot a_2)(c_2 \cdot b_2) \;\overline{\wedge}\; c_1,C_1(c_1 \cdot e_1)(c_1 \cdot a_1)(c_1 \cdot b_1)$ iſt, ſo iſt auch $a_2,(a_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot e_2)A_2\infty \;\overline{\wedge}\; c_2,C_2(c_2 \cdot e_2)(c_2 \cdot a_2)(c_2 \cdot b_2)$, alſo iſt auch e_2 eine Tangente der Ellipſe. Berührt nun e_1 in E_1, e_2 in E_2, ſo iſt nach § 11. Lehrſatz 65., $e_1,(e_1 \cdot a_1)E_1(e_1 \cdot c_1)(e_1 \cdot b_1) \;\overline{\wedge}\; a_1,A_1(a_1 \cdot e_1)(a_1 \cdot c_1)\infty$; $e_2,(e_2 \cdot a_2)E_2(e_2 \cdot c_2)(e_2 \cdot b_2) \;\overline{\wedge}\; a_2,A_2(a_2 \cdot e_2)(a_2 \cdot c_2)\infty$. Da nun die Punktreihen auf a_1 und a_2 conform ſind, ſo muß auch $e_2,(e_2 \cdot a_2)E_2(e_2 \cdot c_2)(e_2 \cdot b_2) \;\overline{\wedge}\; e_1,(e_1 \cdot a_1)E_1(e_1 \cdot c_1)(e_1 \cdot b_1)$ ſein; es muß alſo $\mathfrak{E}$ mit E_2 zuſammenfallen, oder dem Berührungspunkt E_1 am Kreiſe iſt der Berührungspunkt E_2 an der Ellipſe homolog. Da ferner M_2 homolog M_1 war, ſo iſt $(E_1 - M_1)$ homolog $(E_2 - M_2)$. Dem Punkt K_1 muß, da E_1K_1 in M_1 halbirt wird, ein Punkt K_2 homolog ſein, ſo daß auch E_2K_2 in M_2 halbirt wird; es muß alſo K_2 der andere Endpunkt des durch E_2 gehenden Durchmeſſers ſein; alſo auch ein Punkt der durch A_2, B_2, C_2 beſtimmten Ellipſe. Der Tangente in K_1 muß ferner die in K_2 homolog ſein, denn ſie gehen durch homologe Punkte, und die Tangente in K_1 iſt parallel e_1, die Tangente in K_2 parallel e_2 u. ſ. w. Man ſieht alſo, daß jeder gegebene Kreis und jede gegebene Ellipſe affin auf einander bezogen werden können.

Sind zwei gegebene Ellipſen affin auf einander zu beziehen, ſo bleibt die Schlußfolge, da ſie nichts von den ſpeciellen Eigenſchaften des Kreiſes vorausſetzt, genau dieſelbe, man hat nur ſtatt des Kreiſes

$A_1C_1B_1$ eine Ellipse, A_1, B_1 an den Endpunkten eines Durchmessers, C_1 in einem Endpunkte des conjugirten Durchmessers zu nehmen.

Umgekehrt sieht man sogleich, daß, wenn man die einem Kreise affine Curve sucht, diese eine Ellipse sein muß. Denn daß man, wenn man zwei ebene Systeme auf irgend eine Art affin auf einander bezieht, als Curve, die einem Kegelschnitt des ersten homolog ist, wieder einen Kegelschnitt erhalten muß, folgt aus Lehrsatz 7., da Affinität nur ein specieller Fall der Collineation ist; es läßt sich übrigens auch ebenso beweisen, wie in Lehrsatz 5. und Lehrsatz 7. geschehen ist. Ferner muß man als dem Kreis homologen Kegelschnitt einen solchen erhalten, der keinen Punkt im Unendlichen hat, und ein Kreis kann er nicht sein, da wir oben sahen, daß kein Kreis auf einen andern affin bezogen werden kann; er muß demnach eine Ellipse sein. Genau auf dieselbe Weise überzeugt man sich, daß, wenn man die einer Ellipse affine Curve sucht, man einen Kegelschnitt, und zwar entweder einen Kreis oder eine Ellipse erhalten muß.

Um zwei gegebene Hyperbeln affin auf einander zu beziehen, setze man, Fig. 152., A_2 dem A_1, B_2 dem B_1, C_2 dem C_1 homolog, wenn A_1, B_1; A_2, B_2 die Endpunkte eines Durchmessers, C_2 und C_1 die Punkte sind, in denen zwei Scheiteltangenten b_1, b_2 je eine Asymptote schneiden. Man überzeugt sich dann, wie an Fig. 151., daß M_2 dem M_1, a_2 der a_1, b_2 der b_1, c_2 der c_1 homolog ist (letzteres weil C_2 und C_1 und M_2 und M_1 homologe Punkte sind), und daß jeder Tangente e_1 an der ersten eine Tangente e_2 an der zweiten Hyperbel, und dem Berührungspunkt E_1 der Berührungspunkt E_2 homolog ist, daß also beide Hyperbeln in der That homologe Curven affiner Systeme sind. Daß man umgekehrt, wenn man das System construirt, welches einem anderen, eine Hyperbel A_1B_1.... enthaltenden, affin ist, indem man das Dreieck $A_2B_2C_2$ homolog $A_1B_1C_1$ setzt, daß man dann wieder eine Hyperbel erhält, folgt ebenfalls aus Lehrsatz 5. und daraus, daß jede zwei Hyperbeln gleich viel unendlich entfernte Punkte besitzen. Uebrigens sieht man, daß bei gleichseitigen Hyperbeln, weil bei ihnen nicht, wie beim Kreise, jede zwei conjugirten Durchmesser senkrecht auf einander stehen, der Fall der Aehnlichkeit im Allgemeinen nicht eintritt, wohl aber dann, wenn man zwei solche Durchmesser A_1B_1, A_2B_2 einander homolog setzt, daß $\angle C_1M_1B_1 = \angle C_2M_2B_2$ ist. Denn dann macht nach § 11. Lehrsatz 58. auch der dem Durchmesser $(A_1 - B_1)$, $(A_2 - B_2)$ conjugirte σ_1, σ_2 mit c_1, c_2 gleiche Winkel, nach § 11. Lehrsatz 50. β) und es ist also auch $\angle B_1C_1M_1 = \angle B_2C_2M_2$, also ist dann $\triangle B_2C_2M_2 \sim \triangle B_1C_1M_1$ und $\triangle B_2A_2C_2 \sim \triangle B_1A_1C_1$ und die Systeme sind ähnlich. Es können endlich, ebenso wie ein Kreis und eine Ellipse, eine gleichseitige und eine gemeine Hyperbel affin auf einander bezogen werden.

Sollen zwei Parabeln, die verzeichnet vorliegen, Fig. 153., affin auf einander bezogen werden, so setze man die Endpunkte A_2, B_2; A_1, B_1,

einer beliebigen Sehne, als homolog, halbire die Sehne durch eine zur Axe parallele Gerade, und setze die auf ihr liegenden Curvenpunkte C_2, C_1 homolog. Dann sind, wenn man die Systeme affin auf einander bezieht, die Mittelpunkte N_2, N_1 homolog. Zieht man ferner an A_1, B_1, die Tangenten a_1, b_1, und sucht die homologen Geraden im affinen System, so müssen sie zunächst durch A_2, B_2 gehen. Ferner muß z. B. die der a_1 homologe Gerade a_2 die $(C_2 - N_2)$ in einem solchen Punkt Σ_2 schneiden, daß sich verhält $\Sigma_2 C_2 : N_2 C_2 = \Sigma_1 C_1 : N_1 C_1$ und also, da vermöge § 11. Lehrsatz 61. $\Sigma_1 C_1 = N_1 C_1$ ist, daß $\Sigma_2 C_2 = N_2 C_2$ ist. Dieß ist aber die Eigenschaft der Tangente a_2 an A_2, denn sie schneidet die $(C_2 - N_2)$ in einem solchen Punkt Σ_2, daß $\Sigma_2 C_2 = N_2 C_2$ ist, nach § 11. Lehrsatz 61. Es ist also a_2 eine Tangente, ebenso b_2. Da ferner die Tangente c_2 in C_2 parallel $(A_2 - B_2)$ ist, nach § 11. Lehrsatz 50. γ), so ist sie homolog der zu $(A_1 - B_1)$ parallelen Tangente c_1 in C_1. Um die einer beliebigen Tangente e_1 an der einen Parabel homologe Gerade e_2 an der anderen zu finden, verfährt man, wie in Fig. 151. gezeigt ward; man überzeugt sich, daß sie ebenfalls eine Tangente an der (wie wir oben sahen, durch die Stücke $C_2 N_2$, $N_2 A_2$ und die Richtung von $(C_2 - N_2)$ und $(A_2 - B_2)$ bestimmten) Parabel sein muß; deßgleichen, daß dem Berührungspunkt E_1 der Berührungspunkt E_2 homolog ist. Sollen umgekehrt das einem gegebenen System, welches eine Parabel $A_1 C_1 B_1$ enthält, affine System und die der Parabel homologe Curve gesucht werden, so muß die der Parabel affine Curve ein Kegelschnitt, und zwar, wie oben gezeigt ward, eine Parabel sein.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so sind es also folgende Gesetze:

10. Lehrsatz. Sollen zwei ebene Systeme, deren jedes einen Kegelschnitt enthält, affin auf einander bezogen werden, so daß die beiden Kegelschnitte homologe Curven sind, so ist dieß nur dann möglich, wenn beide dieselbe Anzahl unendlich entfernter Punkte besitzen, nämlich:

11. Lehrsatz. Zwei gegebene Kreise lassen sich **nicht** affin auf einander beziehen.

12. Lehrsatz. Jeder gegebene Kreis und jede gegebene Ellipse lassen sich affin auf einander beziehen, indem man die Endpunkte eines Durchmessers in beiden, und einen Endpunkt je des conjugirten Durchmessers homolog setzt.

13. Lehrsatz. Jede zwei gegebenen Ellipsen lassen sich affin auf einander beziehen, indem man die Endpunkte eines Durchmessers in beiden, und einen Endpunkt je des conjugirten Durchmessers homolog setzt.

14. Lehrsatz. Jede zwei gegebenen gleichseitigen Hyperbeln lassen sich affin auf einander beziehen, indem man die Endpunkte eines Durchmessers, der aber nicht in

beiden Hyperbeln mit den Asymptoten gleiche Winkel machen darf, und den Durchschnittspunkt je einer Asymptote mit je einer Tangente an einem Endpunkte dieser Durchmesser homolog setzt.

15. Lehrsatz. Jede gegebene gleichseitige Hyperbel und jede gegebene gemeine Hyperbel lassen sich affin auf einander beziehen, indem man die Endpunkte eines Durchmessers dem Durchschnittspunkt einer Asymptote mit je einer Tangente an einem Endpunkte dieser Durchmesser homolog setzt.

16. Lehrsatz. Jede zwei gegebenen gemeinen Hyperbeln lassen sich affin auf einander beziehen, indem man die Endpunkte eines Durchmessers und den Durchschnittspunkt einer Asymptote mit je einer Tangente an einem Endpunkte dieser Durchmesser homolog setzt.

17. Lehrsatz. Jede zwei gegebenen Parabeln lassen sich affin auf einander beziehen, indem man in jeder einen beliebigen Curvenpunkt und je die Endpunkte einer Sehne, welche von einer durch den ersten Punkt zur Axe parallelen Geraden halbirt wird, homolog setzt.

Wir sahen ferner oben, daß jede einem Kegelschnitt homologe Curve eines affinen Systems wieder ein Kegelschnitt sein muß. Da nun jedem Curvenpunkt des einen ein Curvenpunkt des anderen, jeder Tangente des einen eine Tangente des anderen homolog ist, und je zwei parallelen Tangenten des einen zwei parallele Tangenten des anderen homolog sein müssen, solche aber nur an Endpunkten der Durchmesser sich befinden (nach § 11. Lehrsatz 48.), so ist jeder Durchmesser des einen Kegelschnittes homolog einem im anderen, und also der Durchschnittspunkt zweier Durchmesser, d. h. der Mittelpunkt des einen Kegelschnittes homolog dem Mittelpunkte des anderen. Man sieht also nach dem Vorigen auch:

18. Lehrsatz. Wird zu einem gegebenen ebenen System, welches einen Kegelschnitt enthält, ein beliebiges affines und in diesem die dem Kegelschnitt des ersten Systems homologe Curve gesucht, so erhält man als solche allemal wieder einen Kegelschnitt; in beiden Kegelschnitten ist jedem Durchmesser in dem einen ein Durchmesser im anderen, dem Mittelpunkt des einen der Mittelpunkt des anderen homolog; nämlich:

α) Ist der Kegelschnitt des ersten Systems ein Kreis, so ist der des zweiten eine Ellipse.

β) Ist der Kegelschnitt des ersten Systems eine Ellipse, so ist der des zweiten ein Kreis oder eine Ellipse.

γ) Ist der Kegelschnitt des ersten Systems eine gleich-

seitige Hyperbel, so ist der des zweiten eine gleichseitige oder eine gemeine Hyperbel.

δ) Ist der Kegelschnitt des ersten Systems eine gemeine Hyperbel, so ist der des zweiten eine gleichseitige oder eine gemeine Hyperbel.

ε) Ist der Kegelschnitt des ersten Systems eine Parabel, so ist der des zweiten auch eine Parabel.

Stellen wir uns die Aufgabe, zwei gegebene Kegelschnitte ähnlich auf einander zu beziehen, so folgt, da nach § 8. Lehrsatz 39. in ähnlichen Systemen ebenso, wie in affinen jede zwei homologe Punktreihen proportional sind, daß auch nur solche Curven ähnlich auf einander bezogen werden können, die in Bezug auf Anzahl ihrer unendlich entfernten Punkte übereinstimmen. Allein es müssen nach § 8. Lehrsatz 36. auch jede zwei homologen Geraden gleiche Winkel bilden. Wir sahen nun schon bei den affinen Systemen, daß die Mittelpunkte homologe Punkte sein mußten; dasselbe muß auch bei ähnlichen Systemen, wegen der proportionalen Theilung homologer Punktreihen der Fall sein; es müssen daher auch jede zwei Durchmesser E_1K_1, E_2K_2 (vgl. Fig. 151., 152.) homolog sein. Zugleich müssen auch jede zwei conjugirte Durchmesser beider, affiner sowohl als ähnlicher Curven homolog sein. Denn zieht man (Fig. 151. 152.) eine Sehne in der Curve des ersten Systems, die von dem Durchmesser E_1K_1 halbirt wird, und sucht die homologe Sehne im Kegelschnitt des zweiten Systems, so muß diese vom Durchmesser E_2K_2 halbirt werden, da die Mittelpunkte jeder zwei homologen Strecken homolog, und E_1K_1 und E_2K_2 homologe Gerade sind. Es müssen aber auch jede zwei homologe Durchmesser gleiche Winkel bilden.

Nun bilden im Kreise jede zwei conjugirte Durchmesser rechte Winkel; dasselbe muß also auch in dem ähnlichen Kegelschnitt der Fall sein. Derselbe kann demnach nur, da dieß eine Eigenschaft ausschließlich des Kreises ist, ein Kreis sein. Es können also nur zwei gegebene Kreise ähnlich auf einander bezogen werden, diese aber stets. Denn sind zwei Kreise verzeichnet vorgelegt, so nehme man auf der Peripherie des einen drei beliebige Punkte A_1, B_1, C_1 an, und construire das Dreieck $A_1B_1C_1$. Sodann suche man im anderen Kreise ein ähnliches Dreieck. Zu dem Zwecke construire man einen Centriwinkel $B_2M_2C_2$ Fig. 154. doppelt so groß als $\angle B_1A_1C_1$, und an demselben einen Winkel, $A_2M_2C_2$ doppelt so groß als $\angle A_1B_1C_1$, und construire das Dreieck $A_2B_2C_2$, so ist dieß ähnlich dem Dreieck $A_1B_1C_1$, weil $\angle B_2A_2C_2 = \frac{1}{2} \cdot B_2M_2C_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot B_1A_1C_1 = B_1A_1C_1$ u. s. w. ist; und setze A_2 homolog A_1, B_2 homolog B_1, C_2 homolog C_1. Dann sind M_1, M_2 auch homologe Punkte, wenn die Systeme ähnlich auf einander bezogen werden, denn es ist $\angle C_2A_2M_2 = \angle C_1A_1M_1$, u. s. w. Ferner ist die Tangente a_2 an A_2 homolog der Tangente a_1 an A_1, denn a_2 bildet mit $(A_2 - B_2)$ einen

Winkel, der gleich dem Peripheriewinkel $A_2C_2B_2$ über der Sehne A_2B_2 ist, und a_1 bildet mit (A_1-B_1) einen Winkel, gleich $A_1C_1B_1$. Es ist also der von a_2 und (A_2-B_2) eingeschlossene Winkel gleich dem von a_1 und (A_1-B_1) gebildeten, also sind a_2 und a_1, ebenso b_2 und b_1, c_2 und c_1 homolog. Um den einem ferneren Punkt D_1 homologen zu finden, mache man einen Winkel $A_2M_2D_2 = \angle A_1M_1D_1$. Dann ist auch $\angle A_2C_2D_2 = \angle A_1C_1D_1$, und $\angle C_2A_2D_2 = \angle C_1A_1D_1$, also D_2 und D_1 ein Paar homologer Punkte, und so ist jedem Punkt des ersten ein Punkt des zweiten Kreises homolog; deßgleichen muß, wie sogleich zu sehen ist, die Tangente an D_2 homolog der Tangente an D_1 sein. Soll umgekehrt auf ein einen Kreis enthaltendes System ein anderes ähnlich bezogen und die dem Kreise homologe Curve gesucht werden, so muß dasselbe gelten, wie von affinen Systemen; diese Curve muß nämlich ein Kreis oder eine Ellipse sein, nach Lehrsatz 18. α). Da aber das zweite System nicht nur affin, sondern speciell ähnlich auf das erste bezogen ist, so kann die homologe Curve keine Ellipse sein, denn es müßten sonst ein Kreis und eine Ellipse ähnlich auf einander bezogen werden können, was nicht möglich ist, wie wir oben sahen; sie muß demnach ein Kreis sein.

Sollen zwei gegebene Ellipsen ähnlich auf einander bezogen werden, so müssen, wie oben gezeigt ward, jede zwei conjugirten Durchmesser in der zweiten Ellipse denselben Winkel bilden, wie die der ersten. Es müssen also den auf einander senkrecht stehenden Durchmessern der ersten, d. h. den Axen (nach § 11. Erklärung 52. α)) derselben die Axen der zweiten Ellipse homolog sein. Man hat also, Fig. 155. die Endpunkte A_2, B_2 der großen Axe der zweiten, den Endpunkten A_1, B_1 der großen Axe der ersten Ellipse, und den einen Endpunkt C_2 der kleinen Axe der zweiten dem einen Endpunkt C_1 der kleinen Axe der ersten Ellipse homolog zu setzen. (Man kann natürlich ebenso gut auch A_1, B_1, A_2, B_2 als Endpunkte der kleinen, C_1, C_2 als Endpunkt der großen Axe nehmen.) Indessen kann man auch dann noch im Allgemeinen die Ellipsen nicht ähnlich auf einander beziehen. Denn da die Mittelpunkte M_1, M_2 homolog sind, und in ähnlichen Systemen nach § 8. Lehrsatz 37. jede zwei homologen Dreiecke ähnlich sein müssen, muß, wenn sich die Ellipsen ähnlich auf einander beziehen lassen sollen, $\triangle A_2M_2B_2 \sim \triangle A_1M_1B_1$ sein, oder es müssen sich die Halbaxen verhalten: $A_2M_2 : B_2M_2 = A_1M_1 : B_1M_1$. Ist dieß nicht der Fall, so können die Ellipsen gar nicht ähnlich, sondern nur affin auf einander bezogen werden; ist aber diese Bedingung erfüllt, so sind, wenn man A_2, B_2, C_2 bezüglich homolog A_1, B_1, C_1 setzt, die Ellipsen ähnlich auf einander bezogen. Denn die Tangente a_2 in A_2 ist nach § 11. Lehrsatz 51. α) senkrecht auf (A_2-B_2), ebenso a_1 senkrecht auf (A_1-B_1), also ist der Winkel, den a_1, a_2 mit homologen Geraden einschließen, gleich, folglich sind a_1, a_2 homologe Gerade; ebenso b_1, b_2. Ist nun E_1 ein fernerer Punkt der ersten

Ellipse, so hat man, um E_2 zu finden, $\angle B_2A_2E_2 = \angle B_1A_1E_1$ zu machen. Es ist also, da dann auch $\angle C_2A_2E_2 = \angle C_1A_1E_1$ und da ferner $\angle C_2A_2B_2 = \angle C_1A_1B_1$ ist, Strahlbüschel A_2, $(A_2 - B_2)(A_2 - C_2)(A_2 - E_2)a_2$ gleich A_1, $(A_1 - B_1)(A_1 - C_1)(A_1 - E_1)a_1$. Nun ist nach § 11. Lehrsatz 65. Strahlbüschel $B_1, b_1 (B_1 - C_1)(B_1 - E_1)(B_1 - A_1) \overline{\wedge} A_1, (A_1 - B_1)(A_1 - C_1)(A_1 - E_1) a_1$ und $B_2, b_2 (B_2 - C_2)(B_2 - E_2)(B_2 - A_2) \overline{\wedge} A_2, (A_2 - B_2)(A_2 - C_2)(A_2 - E_2) a_2$, also auch Strahlbüschel $B_2, b_2 (B_2 - C_2)(B_2 - E_2)(B_2 - A_2) \overline{\wedge} B_1, b_1 (B_1 - C_1)(B_1 - E_1)(B_1 - A_1)$. Da nun der von b_2 mit $(B_2 - A_2)$ gebildete Winkel gleich dem von b_1 mit $(B_1 - A_1)$ gebildeten, $\angle C_2B_2A_2 = \angle C_1B_1A_1$ und also auch der von b_2 mit $(B_2 - C_2)$ gebildete Winkel gleich dem von b_1 mit $(B_1 - C_1)$ gebildeten ist, so muß auch $\angle E_2B_2A_2 = \angle E_1B_1A_1$ sein. Es ist also E_2 in der That der dem Punkt E_1 homologe Punkt der zweiten Curve. Es sind nun auch die Tangenten an C_2 und C_1 homologe Gerade, da sie mit den homologen kleinen Axen gleiche Winkel bilden, und ferner ist leicht zu sehen, daß auch die Tangenten e_1, e_2 an E_1, E_2 homologe Gerade der ähnlichen Systeme sind. Denn, wie man sogleich bemerkt, ist auch $\angle C_2E_2A_2 = \angle C_1E_1A_1$. Da nun e_2, e_1 Tangenten sind, so ist nach § 11. Lehrsatz 65. Strahlbüschel $E_2, e_2 (E_2 - A_2)(E_2 - B_2)(E_2 - C_2) \overline{\wedge} A_2, (A_2 - E_2) a_2 (A_2 - B_2)(A_2 - C_2)$ und $E_1, e_1 (E_1 - A_1)(E_1 - B_1)(E_1 - C_1) \overline{\wedge} A_1, (A_1 - E_1) a_1 (A_1 - B_1)(A_1 - C_1)$. Da nun der Strahlbüschel A_2 gleich dem Strahlbüschel A_1 ist, so ist $E_2, e_2 (E_2 - A_2)(E_2 - B_2)(E_2 - C_2) \overline{\wedge} E_1, e_1 (E_1 - A_1)(E_1 - B_1)(E_1 - C_1)$, und da $\angle A_2E_2B_2 = \angle A_1E_1B_1$, $\angle A_2E_2C_2 = \angle A_1E_1C_1$, $\angle B_2E_2C_2 = \angle B_1E_1C_1$ ist, so muß auch der von e_2 mit $(E_2 - A_2)$ eingeschlossene Winkel gleich dem von e_1 mit $(E_1 - A_1)$ eingeschlossenen sein. Es ist also e_2 die der Tangente e_1 homologe Gerade des ähnlichen Systems. Ein Gleiches gilt für jede andere Tangente. Ist umgekehrt zu einem eine Ellipse enthaltenden System ein ähnliches zu construiren, so könnte nach Lehrsatz 18. die der Ellipse homologe Curve im Allgemeinen nur ein Kreis oder eine Ellipse sein. Ersteres ist nicht möglich, sie muß also eine Ellipse sein, und zwar muß $\triangle A_2C_2M_2 \sim \triangle A_1C_1M_1$, also $A_2M_2 : C_2M_2 = A_1M_1 : C_1M_1$ sein.

Ist die einer gleichseitigen Hyperbel homologe ähnliche Curve zu suchen, so kann dieß nur eine Hyperbel sein, und zwar, weil, wenn man sich unter A_1B_1, A_2B_2, Fig. 152., die großen, unter B_1C_1, B_2C_2, also die kleinen Axen für den Augenblick vorstellt, $\triangle M_2B_2C_2 \sim \triangle M_1B_1C_1$ sein muß (aus denselben Gründen, wie bei der Ellipse), in einer gleichseitigen Hyperbel aber $B_1C_1 = B_1M_1$ ist, eine gleichseitige Hyperbel. Stellt man sich also unter den Hyperbeln, Fig. 152., ein Paar verzeichnet vorliegende gleichseitige vor, so lassen sich diese ähnlich auf einander beziehen. Man braucht nämlich, wie schon oben erwähnt wurde, nur zwei solche Durchmesser A_1B_1, A_2B_2 als homolog zu setzen (indem man sich also unter A_1B_1, A_2B_2 nicht mehr die

Axen vorstellt), die mit den Asymptoten c_1, c_2 gleiche Winkel bilden; dieß ist immer möglich, da nach § 11. Lehrsatz 57. in jeder gleichseitigen Hyperbel die Asymptoten denselben Winkel, nämlich einen Rechten, bilden. Ferner hat man C_2 homolog C_1 zu nehmen. Dann sind auch a_2, a_1; b_2, b_1 homolog, da sie mit (A_2-B_2), (A_1-B_1) gleiche Winkel machen. Da nun die der Axe (A_1-B_1) conjugirte σ_1 mit c_1 einen Winkel bildet, der gleich $\angle B_1M_1C_1$ ist, nach § 11. Lehrsatz 58., so ist $\angle \sigma_1 c_1 = \angle \sigma_2 c_2$, also, da $a_1 \parallel \sigma_1$, $a_2 \parallel \sigma_2$ ist, nach § 11. Lehrsatz 50. β), so ist $\triangle B_2M_2C_2 \sim \triangle B_1M_1C_1$. Ist nun E_1 irgend ein Punkt der ersten Hyperbel, so findet sich der homologe E_2 dadurch, daß man $\angle B_2A_2E_2 = \angle B_1A_1E_1$ macht. Dann ist aber zugleich nach § 11. Lehrsatz 56. auch der von b_2 und (A_2-E_2) eingeschlossene Winkel $=\angle B_2A_2E_2$, und der von b_1 und (A_2-E_2) gebildete $=\angle B_1A_1E_1$. Es ist also der von b_2 und (A_1-E_1) gebildete Winkel gleich dem von b_1 und (A_1-E_1) gebildeten. Es ist demnach E_2 homolog E_1. Davon, daß auch e_2 homolog e_1 ist, überzeugt man sich wie in Fig. 155. Construirt man zu einem, eine gleichseitige Hyperbel enthaltenden System ein ähnliches, so muß man als homologe Curve, nach Lehrsatz 18. γ), da eine gemeine Hyperbel einer gleichseitigen nicht ähnlich sein kann, wieder eine gleichseitige erhalten.

Daß zwei gemeine Hyperbeln nur dann ähnlich auf einander bezogen werden können, wenn sich ihre großen (Halb-) Axen verhalten wie die kleinen, ergiebt sich wie bei der Ellipse; deßgleichen, daß man, falls diese Bedingung erfüllt ist, die Endpunkte der großen, und einen Endpunkt der kleinen Axe homolog setzen muß. Stellen wir uns Fig. 152. unter A_1, B_1, A_2, B_2 erstere, unter C_1, C_2 letzteren vor, so sind auch die Scheiteltangenten a_1, b_1; a_2, b_2, die Mittelpunkte M_1, M_2, und die Asymptoten c_1, c_2 homolog. Macht man nun $\angle B_2A_2E_2 = \angle B_1A_1E_1$, so ist nach § 11. Lehrsatz 65., wenn wir die von A_1, B_1; A_2, B_2 nach dem unendlich entfernten Berührungspunkt der Asymptoten c_1, c_2 gerichteten Strahlen, m_1, n_1; m_2, n_2 nennen, Strahlbüschel $A_1, a_1 (A_1-E_1) m_1 (A_1-B_1) \overline{\wedge} B_1, (B_1-A_1)(B_1-E_1) n_1 b_1$; $A_2, a_2 (A_2-E_2) m_2 (A_2-B_2) \overline{\wedge} B_2, (B_2-A_2)(B_2-E_2) n_2 b_2$. Da nun Strahlbüschel A_1 und A_2 gleich sind (denn der von m_2 mit (A_2-B_2) gebildete Winkel ist gleich dem von c_2 mit (A_2-B_2) gebildeten, also $=\angle C_2M_2B_2$, und ebenso der von m_1 mit (A_1-B_1) gebildete $=\angle C_1M_1B_1$, also sind beide gleich), so ist Strahlbüschel B_2 conform Strahlbüschel B_1; und da n_2 und n_1 und alle übrigen Strahlen an B_2, B_1 gleiche Winkel bilden, auch $\angle A_2B_2E_2 = \angle A_1B_1E_1$. Es ist also E_2 homolog E_1. Ziehen wir von E_2, E_1 nach den unendlich entfernten Berührungspunkten von c_2, c_1 die Strahlen q_2, q_1, also parallel c_2, c_1, so ist der von q_2 mit (B_2-E_2) gebildete Winkel gleich dem von q_1 mit (B_1-E_1) eingeschlossenen. Nun ist Strahlbüschel $E_2, e_2 (E_2-A_2)(E_2-B_2) q_2 \overline{\wedge} A_2, (A_2-E_2) a_2 (A_2-B_2) m_2$; $E_1, e_1 (E_1-A_1)(E_1-B_1) q_1 \overline{\wedge} A_1, (A_1-E_1)(A_1-B_1) m_1$. Es ist aber Strahlbüschel A_2 gleich A_1, also Strahl-

büschel $E_2 \overline{\wedge} E_1$, und da alle übrigen Winkel gleich sind, auch der von e_2 und $(E_2 - A_2)$ gebildete gleich dem von e_1 und $(E_1 - A_1)$ gebildeten. Es ist also auch e_2 homolog e_1. Daß man endlich, wenn man ein System construirt, welches einem andern, eine gemeine Hyperbel enthaltenden ähnlich ist, eine gemeine Hyperbel wieder erhält, deren (Halb-) Axen zu denen der gegebenen dasselbe Verhältniß haben. folgt aus Lehrsatz 18. δ) und daraus, daß eine gemeine nicht einer gleichseitigen ähnlich sein kann.

Eine Curve, die einer Parabel ähnlich ist, kann nur wieder eine Parabel sein, da sie nur einen unendlich entfernten Punkt haben kann. Es müssen nun schon in affinen Parabeln jede zwei der Axe parallelen Geraden, welche homologe Sehnen A_1B_1, A_2B_2 halbiren, homolog sein. In ähnlichen Systemen müssen sie aber auch gleiche Winkel machen. Es müssen also auch die Axen selbst und die von ihr halbirten, auf ihr senkrecht stehenden Sehnen der einen homolog denselben Stücken der anderen Parabel sein. Es müssen demnach auch die Scheitel der beiden Parabeln homolog sein. Um also ein Paar gegebener Parabeln ähnlich auf einander zu beziehen, setze man (indem man sich in Fig. 153. unter C_1, C_2 die Scheitel, $(A_1 - B_2)$, $(A_2 - B_2)$ senkrecht auf $(C_1 - N_1)$, $(C_2 - N_2)$, unter $(C_1 - N_1)$, $(C_2 - N_2)$ die Axen vorstellt) die Scheitel C_1, C_2, Fig. 153., homolog, nehme in der ersten eine beliebige senkrecht zur Axe stehende Sehne A_1B_1 an, und auf der Axe der zweiten Parabel ein solches Stück C_2N_2, daß sich, wenn der Parameter der ersten durch p_1, der der zweiten durch p_2 bezeichnet wird, verhält: $C_2N_2 : p_2 = C_1N_1 : p_1$. Durch den so bestimmten Punkt N_2 lege man eine Sehne A_2B_2 senkrecht zur Axe, so ist $\triangle A_2C_2B_2 \sim \triangle A_1C_1B_1$. Denn es ist $N_1A_1 = \sqrt{p_1 \cdot C_1N_1}$; $N_2A_2 = \sqrt{p_2 \cdot C_2N_2}$; also $N_2A_2 : N_1A_1 = \sqrt{p_2 \cdot C_2N_2} : \sqrt{p_1 \cdot C_1N_1}$ oder: $\frac{N_2A_2}{N_1A_1} = \sqrt{\frac{p_2 \cdot C_2N_2}{p_1 \cdot C_1N_1}}$; da nun $\frac{C_2N_2}{C_1N_1} = \frac{p_2}{p_1}$ ist, so ist also $N_2A_2 : N_1A_1 = p_2 : p_1$. In den rechtwinkligen Dreiecken $C_2N_2A_2$, $C_1N_1A_1$ ist also $\angle N_2 = \angle N_1 = 1R$; $C_2N_2 : C_1N_1 = A_2N_2 : A_1N_1$ $(= p_2 : p_1)$, also sind die Dreiecke ähnlich, also $\angle A_2C_2N_2 = \angle A_1C_1N_1$; und ebenso $\angle B_2C_2N_2 = \angle B_1C_1N_1$; folglich $\triangle A_2C_2B_2 \sim \triangle A_1C_1B_1$; also auch $\angle B_2A_2C_2 = \angle B_1A_1C_1$; $\angle A_2B_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$, und, wenn man die von A_1, A_2; B_1, B_2 nach dem unendlich entfernten Punkt der Parabel gerichteten Geraden, m_1, m_2; n_1, n_2 nennt, der von m_2 und $(A_2 - B_2)$; von n_2 und $(B_2 - A_2)$ eingeschlossene Winkel gleich dem von m_1 und $(A_1 - B_1)$, von n_1 und $(B_1 - A_1)$ gebildeten. Ferner ist die Tangente a_2 in A_2 homolog a_1 in A_1, denn nach § 11. Lehrsatz 61. ist $\Sigma_2C_2 = N_2C_2$, $\Sigma_1C_1 = N_1C_1$, also $\Sigma_2C_2 = \Sigma_1C_1$ und $\angle \Sigma_2A_2C_2 = \angle \Sigma_1A_1C_1$; also a_2 homolog a_1; ebenso ist $\angle \Sigma_2B_2C_2 = \angle \Sigma_1B_1C_1$, also b_2 homolog b_1. Zieht man nun von A_1, B_1 nach einem beliebigen Punkt E_1 der ersten Parabel, und macht $\angle B_2A_2E_2 = \angle B_1A_1E_1$,

und ist E_2 der auf $(A_2 - E_2)$ liegende zweite Punkt der anderen Parabel, so ist nach § 11. Lehrsatz 65. Strahlbüschel $B_2, (B_2 - C_2) (B_2 - A_2) (B_2 - E_2) n_2 \;\overline{\wedge}\; A_2, (A_2 - C_2) a_2 (A_2 - E_2) m_2$; $B_1, (B_1 - C_1) (B_1 - A_1) (B_1 - E_1) n_1 \;\overline{\wedge}\; A_1, (A_1 - C_1) a_1 (A_1 - E_1) m_1$. Nun ist der Strahlbüschel A_2 gleich dem Büschel A_1, also der Strahlbüschel B_2 conform B_1, und da die drei übrigen Winkel an B_2, B_1 gleich sind, auch $\angle A_2B_2E_2 = \angle A_1B_1E_1$. Es ist also E_2 homolog E_1. Legen wir ferner an E_1, E_2 die Tangenten e_1, e_2, und ziehen von E_1, E_2 die halben Sehnen E_1R_1; E_2R_2 senkrecht zur Axe, so ist $\angle L_2E_2R_2 = \angle E_2B_2A_2$, $\angle L_1E_1R_1 = \angle E_1B_1A_1$, also, da $\angle E_2B_2A_2 = \angle E_1B_1A_1$ war, $\angle L_2E_2R_2 = \angle L_1E_1R_1$, ferner $\angle L_2R_2E_2 = \angle L_1R_1E_1 = 1R$, also $\triangle L_2E_2R_2 \sim \triangle L_1E_1R_1$, also $L_2R_2 : L_1R_1 = L_2E_2 : L_1E_1$. Nun ist auch, wenn man C_2E_2, C_1E_1 zieht, $\triangle C_2L_2E_2 \sim \triangle C_1L_1E_1$, also $L_2E_2 : L_1E_1 = C_2L_2 : C_1L_1$, oder $L_2E_2 : L_1E_1 = C_2N_2 + N_2L_2 : C_1N_1 + N_1L_1$. In den ähnlichen Dreiecken $N_2B_2L_2$, $N_1B_1L_1$ ist aber $N_2L_2 : N_1L_1 = B_2N_2 : B_1N_1$, d. h. wie wir oben sahen $= p_2 : p_1$; also ist $N_2L_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot N_1L_1$, folglich ist $L_2E_2 : L_1E_1 = C_2N_2 + \frac{p_2}{p_1} \cdot N_1L_1 : C_1N_1 + N_1L_1$. Es ist aber auch $C_2N_2 : C_1N_1 = p_2 : p_1$, also $C_2N_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot C_1N_1$, folglich ist $L_2E_2 : L_1E_1 = \frac{p_2}{p_1} (C_1N_1 + N_1L_1) : C_1N_1 + N_1L_1 = p_2 : p_1$; folglich auch $L_2R_2 : L_1R_1 = p_2 : p_1$. Es ist also $C_2N_2 : C_1N_1 = p_2 : p_1$; $N_2L_2 : N_1L_1 = p_2 : p_1$; $L_2R_2 : L_1R_1 = p_2 : p_1$, folglich auch $C_2R_2 : C_1R_1 = p_2 : p_1$, also $\angle C_2E_2R_2 = \angle C_1E_1R_1$, es ist also R_2 homolog R_1. Nun schneiden die Tangenten e_2, e_1, nach § 11. Lehrsatz 61. die Axe in solchen Punkten Q_2, Q_1, daß $Q_2C_2 = R_2C_2$, $Q_1C_1 = R_1C_1$, also $Q_2C_2 : Q_1C_1 = p_2 : p_1$ ist. Es ist also $\triangle R_2E_2Q_2 \sim \triangle R_1E_1Q_1$, also $\angle R_2E_2Q_2 = \angle R_1E_1Q_1$, folglich sind Q_2 und Q_1 homologe Punkte der Axen, und daher e_2 homolog e_1. Ebenso ist die Tangente an jedem anderen Punkt der zweiten Parabel homolog der Tangente am homologen Punkt der ersten. Daß man umgekehrt, wenn man zu einem eine Parabel enthaltenden System ein ähnliches construirt, als der Parabel homologe Curve wieder eine Parabel erhält, folgt sogleich aus Lehrsatz 18. ε).

Fassen wir das Bisherige zusammen, so haben wir also die Gesetze:

19. Lehrsatz. Sollen zwei ebene Systeme, deren jedes einen Kegelschnitt enthält, ähnlich auf einander bezogen werden, so daß die beiden Kegelschnitte homologe Curven sind, so ist dieß nur dann möglich, wenn beide Kegelschnitte zugleich Kreise oder zugleich Ellipsen, oder zugleich gleichseitige Hyperbeln, oder zugleich gemeine Hyperbeln, oder zugleich Parabeln sind, und auch dann nicht immer; nämlich:

20. Lehrsatz. Jede zwei gegebenen Kreise lassen sich ähnlich auf einander beziehen, und zwar auf beliebig viele Weisen, nämlich indem man einem eingeschriebenen Dreieck des einen ein ähnliches eingeschriebenes Dreieck des anderen homolog setzt.

21. Lehrsatz. **Nicht** jede zwei gegebenen Ellipsen lassen sich ähnlich auf einander beziehen, sondern nur solche, in denen die großen (Halb-) Axen dasselbe Verhältniß haben, wie die kleinen, und auch solche nur auf die eine Weise, daß man je die Endpunkte der großen und einen Endpunkt der kleinen Axe, oder je die Endpunkte der kleinen und einen Endpunkt der großen homolog setzt.

22. Lehrsatz. Jede zwei gegebenen gleichseitigen Hyperbeln lassen sich ähnlich auf einander beziehen, und zwar auf beliebig viele Weisen, indem man nämlich die Endpunkte je eines solchen Durchmessers, der in beiden mit den Asymptoten gleiche Winkel bildet, und den Punkt, in dem die Tangenten in zwei homologen Endpunkten von der Asymptote geschnitten werden, homolog setzt.

23. Lehrsatz. **Nicht** jede zwei gegebenen gemeinen Hyperbeln können ähnlich auf einander bezogen werden, sondern nur solche, in denen die großen (Halb-) Axen dasselbe Verhältniß, wie die kleinen, haben, und auch solche nur auf die eine Weise, daß man je die Endpunkte der großen und den einen Endpunkt der kleinen Axe homolog setzt.

24. Lehrsatz. Jede zwei gegebenen Parabeln lassen sich ähnlich auf einander beziehen, aber nur auf die eine Weise, daß man ihre Scheitel und die Endpunkte je einer solchen, auf den Axen senkrechten Sehne homolog setzt, deren Abstände vom Scheitel sich verhalten wie die Parameter der Parabeln.

25. Lehrsatz. Wird zu einem gegebenen ebenen Systeme, welches einen Kegelschnitt enthält, ein beliebiges ähnliches, und in diesem die dem Kegelschnitt des ersten homologe Curve gesucht, so erhält man allemal wieder einen Kegelschnitt; in beiden Kegelschnitten ist jedem Durchmesser in dem einen ein Durchmesser in dem anderen, dem Mittelpunkte des einen der Mittelpunkt des anderen, sind den Axen des einen die Axen des anderen homolog; nämlich:

α) Ist der Kegelschnitt des ersten Systems ein Kreis, so ist der des zweiten auch ein Kreis.

β) Ist der Kegelschnitt des ersten Systems eine Ellipse, so ist der des zweiten auch eine Ellipse, deren große Axe sich zur kleinen verhält, wie die große Axe der gegebenen Ellipse zur kleinen.

γ) Ist der Kegelschnitt des ersten Systems eine gleichseitige Hyperbel, so ist der des zweiten auch eine gleichseitige Hyperbel.

δ) Ist der Kegelschnitt des ersten Systems eine gemeine Hyperbel, so ist der des zweiten auch eine gemeine Hyperbel, deren große Axe sich zur kleinen verhält, wie die große Axe der gegebenen gemeinen Hyperbel zur kleinen.

ε) Ist der Kegelschnitt des ersten Systems eine Parabel, so ist der des zweiten auch eine Parabel.

Bevor wir zur perspectivischen Collineation übergehen, mag erst noch Folgendes erwähnt werden. Es seien zwei gegebene Kegelschnitte nach Lehrsatz 1. collinear auf einander bezogen, und P_1, P_2 seien ein Paar homologe Punkte, und zwar außerhalb der beiden Kegelschnitte gelegen, so sind nach Lehrsatz 1. auch die von P_1, P_2 an dieselben gelegten Tangenten, sowie deren Berührungspunkte homolog. Es ist also der Berührungssehne p_1 des einen die Berührungssehne p_2 des anderen, d. h. der Polaren p_1 von P_1 die Polare p_2 von P_2 homolog; und umgekehrt ist, wenn p_1 eine Secante des ersten, p_2 die homologe Secante des zweiten Kegelschnittes ist, nach Lehrsatz 1. die Tangente an je einem Durchschnittspunkt von p_2 mit der Curve homolog der Tangente an je einem Durchschnittspunkt von p_1 mit dem ersten Kegelschnitt. Es ist also auch P_2 homolog P_1, d. h. der Pol der Polaren p_2 homolog dem Pol der homologen Polaren p_1. Sind ferner P_1, P_2 ein Paar homologe innere Punkte der Kegelschnitte, und zieht man zwei Paar homologer Gerader durch P_1, P_2, nämlich p_2 homolog p_1, p_4 homolog p_3, so ist, wie wir eben sahen, der Pol $\mathfrak{P}_2$ von p_2 homolog dem Pol $\mathfrak{P}_1$ von p_1, der Pol $\mathfrak{P}_4$ von p_4 homolog dem Pol $\mathfrak{P}_3$ von p_3, also $(\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_4)$ homolog $(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_3)$, d. h. die Polare p_2 von P_2 homolog der Polaren p_1 von P_1. Sind umgekehrt $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$; $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ homologe Punkte homologer, die collinearen Kegelschnitte nicht schneidenden Geraden, so ist, wie wir eben sahen, die Polare p_2 von $\mathfrak{P}_2$ homolog der Polaren p_1 von $\mathfrak{P}_1$, die Polare p_4 von $\mathfrak{P}_4$ homolog der Polaren p_3 von $\mathfrak{P}_3$, also $(p_2 \cdot p_4)$ homolog $(p_1 \cdot p_3)$ oder P_2 homolog P_1 d. h. nach § 11. Lehrsatz 39. der Pol P_2 von p_2 homolog dem Pol P_1 von p_1. Man sieht also in allen Fällen:

26. Lehrsatz. Sind zwei ebene, je einen gegebenen Kegelschnitt enthaltende Systeme collinear so auf einander bezogen, daß die beiden Kegelschnitte homologe Curven sind, so sind die Polaren je zweier homologen Punkte homologe Gerade, die Pole je zweier homologen Geraden homologe Punkte beider Systeme.

Gehen wir nun über zur perspectivischen Collineation, so folgt sofort aus Lehrsatz 3. und 9. und aus § 7. Lehrsatz 4.:

27. Lehrsatz. Jede beliebigen zwei verzeichnet vorliegenden Kegelschnitte K_1, K_2 können auf unendlich viele Weisen collinear auf einander bezogen (jedoch mit Rücksicht auf Lehrsatz 9.) und in perspectivische Lage gebracht werden.

Und in der That, stellt man sich die:

28. Aufgabe. Gegeben zwei verzeichnet vorliegende, beliebige Kegelschnitte K_1, K_2; dieselbe in perspectivische Lage zu bringen,

so hat man sofort die

Auflösung. Man beziehe wegen Lehrsatz 9. K_1 und K_2 auf die in Lehrsatz 1. angegebene Weise collinear auf einander, setze also, Fig. 148., a_2, b_2, c_2, A_2, B_2 homolog bezüglich a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, und bringe die homologen vollständigen Vierecke $A_2B_2(b_2 \cdot c_2)(a_2 \cdot c_2)$, $A_1B_1(b_1 \cdot c_1)(a_1 \cdot c_1)$ nach § 8. Aufgabe 16. in perspectivische Lage, oder man setze A_2, B_2, C_2, a_2, b_2 homolog bezüglich A_1, B_1 C_1, a_1, b_1, und bringe die homologen vollständigen Vierseite $a_2b_2(B_2 - C_2)(A_2 - C_2)$, $a_1b_1(B_1 - C_1)(A_1 - C_1)$, (oder wenn man will, die homologen vollständigen Vierecke $(a_2 \cdot b_2)B_2C_2A_2$, $(a_1 \cdot b_1)B_1C_1A_1$) nach § 8. Aufgabe 16. in perspectivische Lage. Es läßt sich also nach § 8. Lehrsatz 17., wenn der eine Kegelschnitt K_1 als festliegend gedacht wird, der andere K_2 auf vier verschiedene Weisen so legen, daß K_1 und K_2 sich in Perspective befinden.

Da aber in jedem Kegelschnitt alle Strahlbüschel, die an beliebigen zwei Punkten entstehen, wenn man sie immer mit denselben anderen Curvenpunkten durch Strahlen verbindet, conform sind, und da jede beliebigen zwei Tangenten von denselben anderen conform geschnitten werden, so ist zu erwarten, daß bei der perspectivischen Lage der Kegelschnitte noch besondere Verhältnisse eintreten werden.

Dieß ist auch in der That so. Denn hat man die Kegelschnitte K_1, K_2 auf eine der nach § 8. Lehrsatz 17. für dasselbe Vierecks- oder Vierseits-Paar möglichen vier Arten in Perspective gebracht, so sind zunächst nach Lehrsatz 26. die Pole P, P′, der sich selbst homologen Collineationsaxe in beiden Kegelschnitten homologe Punkte, sie liegen daher nach § 8. Lehrsatz 4. auf demselben Collineationsstrahl. Ebenso sind nach Lehrsatz 26. die Polaren p, p′, des sich selbst homologen Collineationscentrums homologe Gerade in beiden Kegelschnitten und schneiden sich also nach § 8. Lehrsatz 4. auf der Collineationsaxe.

A) Es seien nun Fig. 156. zwei Kegelschnitte, K, K′, in perspectivische Lage gebracht, p die Polare vom Collineationscentrum Σ in K, p′ die Polare von Σ in K′. Man ziehe nun an K vier Tangenten a, b, c, d, so, daß $[(a \cdot c) - (b \cdot d)]$ mit der Polaren zusammenfällt, dann müssen die Berührungspunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ von a, c; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, von b, d je auf einem durch Σ gehenden Strahl liegen, weil nach § 11. Lehrsatz 44. der Kegelschnitt K für den Pol Σ als Involutionscen-

trum, und seine Polare p als Involutionsaxe involutorisch collinear ist. Zieht man also von Σ nach 𝔇, so geht dieser Strahl durch einen zweiten Punkt des Kegelschnittes, dessen Tangente mit der Tangente d von 𝔇 sich auf p schneidet. Dieß ist aber der Construction zufolge 𝔅, und einen zweiten solchen Punkt 𝔅′ kann es nicht geben, weil sonst von (b · d) oder (p · d) aus drei Tangenten an K gelegt werden könnten, was gegen § 11. Lehrsatz 25. wäre. Ferner ist nach § 11. Lehrsatz 38. α) die Diagonale [(a · b) — (c · d)] die Polare des Durchschnittspunktes der Diagonalen [(a · d) — (b · c)] und [(a · c) — (b · d)] oder p. Da aber dieser Durchschnittspunkt der Diagonalen auf p liegt, und p die Polare von Σ ist, so muß, wenn man von Σ nach dem Durchschnittspunkt der Diagonalen des umgeschriebenen Vierseits zieht, Σ der dem Durchschnittspunkt zugeordnete harmonische Punkt sein; es muß also die Polare [(a · b) — (c · d)] des Durchschnittspunktes durch Σ gehen. Da ferner p die Diagonale [(a · c) — (b · d)] des umgeschriebenen Vierseits ist, so muß nach § 11. Lehrsatz 38. β) ihr Pol Σ der Durchschnittspunkt der anderen beiden Diagonalen sein; es muß also auch [(a · d) — (b · c)] durch Σ gehen. Construirt man nun am Kegelschnitt K′ das homologe umgeschriebene Vierseit a′b′c′d′, so muß, da die Polaren p, p′ homologe Gerade der beiden Systeme sind, [(a′ · c′) — (b′ · d′)] mit p′ zusammenfallen und [(a′ · b′) — (c′ · d′)] und deßgleichen [(a′ · d′) — (b′ · c′)] durch Σ gehen, und zwar liegen (a · b), (c · d), (a′ · b′), (c′ · d′); und (a · d), (b · c), (a′ · d′), (b′ · c′); und (a′ · c′), (a · c), (b′ · d′), (b · d) je auf demselben Collineationsstrahle bezüglich n; m; h*). Zugleich müssen auch 𝔄′, 𝔈′; 𝔅′, 𝔇′ je auf demselben Collineationsstrahl liegen, wie 𝔄, 𝔈; 𝔅, 𝔇, weil die Kegelschnitte für das Collineationscentrum Σ perspectivisch liegen, und die Berührungspunkte von a′ und a, von b′ und b, von c′ und c′ von d′ und d sind. Ist ferner e, e′, je die Tangente am Durchschnittspunkte von (P — P′) mit K, K′ in den homologen Punkten der Collineation E, E′; so ist vermöge der Collineation:

Punktreihe a, (a · b) (a · d) (a · c) (a · e) $\overline{\wedge}$
Punktreihe a′, (a′ · b′) (a′ · d′) (a′ · c′) (a′ · e′).
Punktreihe c, (c · a) (c · b) (c · d) (c · e) $\overline{\wedge}$
Punktreihe c′, (c′ · a′) (c′ · b′) (c′ · d′) (c′ · e′),

Da nun (c · a) und (c′ · a′), (c · b) und (a′ · d′), (c · d) und (a′ · b′), je auf demselben Collineationsstrahl liegen, so ist, wenn wir den von Σ durch (c · e) gehenden Collineationsstrahl durch y bezeichnen: Punktreihe c, (c · a) (c · b) (c · d) (c · e) perspectivisch, also auch conform der Punktreihe a′, (a′ · c′) (a′ · d′) (a′ · b′) (a′ · y). Da nun (a′ · y) nicht der Berührungspunkt von a′ ist, so geht durch ihn jedenfalls noch eine Tangente des Kegelschnittes K′ (nach § 11. Lehrsatz 25.); diese noch

*) Man wird diese und mehrere im Folgenden vorkommende Linien, die in der Figur nicht verzeichnet sind, leicht selbst construiren (vgl. unten B)).

unbekannte Tangente heiße f′. So ist also, da (a′ · y) mit (a′ · f′) identisch ist, c, (c · a) (c · b) (c · d) (c · e) $\overline{\wedge}$ a′, (a′ · c′) (a′ · d′) (a′ · b′) (a′ · f′). Wir suchen nun die ihr homologe Tangente f am Kegelschnitt K, indem wir ihren Durchschnittspunkt mit a und c, also die Punkte (a · f), (c · f) zu bestimmen suchen. Es muß nach § 11. Lehrsatz 65. nun sein Punktreihe a, (a · b) (a · d) (a · e) (a · f) $\overline{\wedge}$ c, (c · b) (c · d) (c · e) (c · f). Es muß also, wenn der von Σ nach (a · e) und der von Σ nach (c · f) gehende Collineationsstrahl bezüglich u, x heißt, da (a · f) auf demselben Collineationsstrahl y liegen muß, wie (a′ · f′) und (c · e), sein: Strahlbüschel Σ,nmuy $\overline{\wedge}$ Σ,mnyx. Nun ist aber stets Strahlbüschel Σ,mnyx $\overline{\wedge}$ Σ,nmxy, denn es ist $\frac{\sin mn}{\sin yn} : \frac{\sin mx}{\sin yx} = \frac{\sin mn}{\sin xm} : \frac{\sin ny}{\sin xy}$ (vgl. § 1. VI. 1)), es ist also Strahlbüschel Σ,nmuy $\overline{\wedge}$ Σ,nmxy. Es muß also x mit u zusammenfallen, d. h. die Tangente f muß die c auf demselben Collineationsstrahl schneiden, der von Σ nach (a · e) geht. Es geht also in dem, der Curve K umgeschriebenen vollständigen Vierseit afce die Diagonale [(a · f) — (c · e)] oder y, und [(a · e) — (c · f)] oder u durch Σ. Es muß also nach § 11. Lehrsatz 38. *α*) die dritte Diagonale [(a · c) — (e · f)] mit der Polaren von Σ, d. h. mit p zusammenfallen. Es müssen sich demnach e und f auf p schneiden. Wegen der perspectivischen Collineation schneiden sich also auch e′ und f′ auf p′. Da ferner (a · e) und (c · f) auf dem Strahl u oder x liegen, so liegen die homologen Punkte (a′ · e′) und (c′ · f′) ebenfalls auf u. Es liegen demnach die Punktreihen c, (c · a) (c · f) (c · b) (c · d) (c · e) und a′, (a′ · c′) (a′ · e′) (a′ · d′) (a′ · b′) (a′ · f′) perspectivisch im Strahlbüschel Σ, humny. Also ist

Punktreihe c, (c · a) (c · f) (c · b) (c · d) (c · e) $\overline{\wedge}$
Punktreihe a′, (a′ · c′) (a′ · e′) (a′ · d′) (a′ · b′) (a′ · f′)

und wegen der Collineation also auch in demselben Strahlbüschel:

Punktreihe c′, (c′ · a′) (c′ · f′) (c′ · b′) (c′ · d′) (c′ · e′) $\overline{\wedge}$
Punktreihe a, (a · c) (a · e) (a · d) (a · b) (a · f).

Es sind also auch die Geraden a und c′, c und a′, e und f′, f und e′ d und b′, b und d′, homologe Gerade der die Kegelschnitte K, K′ enthaltenden Systeme, oder dieselben können auch so auf einander bezogen werden, daß a der c′, c der a′ u. s. w. homolog ist, und beide Systeme liegen auch dann für dasselbe Collineationscentrum Σ perspectivisch. Es ist jedoch die Collineationsaxe jetzt nicht mehr die frühere *σ*, auf der (a · a′), (b · b′), (c · c′) u. s. w. liegen, sondern die neue Collineationsaxe *σ*′ enthält die Punkte (a · c′), (c · a′), (e · f′), (f · e′), (d · b′), (b · d′), die nach § 7. Lehrsatz 2. auf einer und derselben Geraden liegen. Nun sahen wir oben, daß, wenn zwei Kegelschnitte perspectivisch collinear sind für ein Collineationscentrum Σ, die Polaren p, p′ von Σ sich auf der Collineationsaxe schneiden müssen. Es müssen sich also p, p′ auch auf der neuen Axe *σ*′ schneiden, oder *σ*′ muß durch (p · p′) gehen.

Es müssen nun, wie für die Axe σ und das Centrum Σ die Berührungspunkte der Tangenten e, e', f, f', also E, E', F, F' homolog waren, so für die Axe σ' und das Centrum Σ die Berührungspunkte von e und f', f und e', also E, F'; F, E' homolog sein. Es müssen also, da sich K, K' für Σ und σ perspectivisch collinear beziehen lassen, die Geraden (E — E'), (F — F') durch Σ gehen; und da sie sich für Σ und σ' perspectivisch collinear beziehen lassen, müssen auch (E — F'), (F — E') durch Σ gehen. Dieß ist aber nur möglich, wenn E, E', F, F' auf einer und derselben Geraden liegen. Da nun E, E' auf dem Collineationsstrahl liegen, der die Pole P, P' von σ enthält, so müssen auch F, F' auf demselben liegen, also f, f', die Tangenten je an den zweiten Durchschnittspunkt von (P — P') mit K, K' sein.

B) Nehmen wir ferner auf der Peripherie von K vier solche Punkte A, B, C, D an, daß [(A — C) · (B — D)] den Pol P der Axe σ bildet, so liegen nach § 11. Lehrsatz 38. β) die anderen beiden Durchschnittspunkte der Gegenseiten [(A — B) · (C — D)], [(A — D) · (B — C)] auf der Polaren von P, d. h. also auf der Collineationsaxe σ. Sind nun A', B', C', D' die den Punkten A, B, C, D homologen des Kegelschnittes K', liegen also A, A'; B, B'; C, C'; D, D' je auf demselben Collineationsstrahl, so liegt wegen der Collineation, da dem Pol P der Pol P' homolog ist, der Punkt [(A' — C') · (B' — D')] in P'; [(A' — B') · (C' — D') fällt mit [(A — B) · (C — D)] auf σ zusammen, und [(A' — D') · (B' — C')] mit [(A — D) · (B — C)] ebenfalls auf σ. Ferner schneiden sich (D — B) und (D' — B') in L; (A — C) und (A' — C') in H. Es seien ferner E, E' die Durchschnittspunkte von (P — P') mit K, K', und zwar die homologen der Collineation. Nun ist vermöge derselben

Strahlbüschel A, (A — B) (A — D) (A — E) (A — C) $\overline{\wedge}$
Strahlbüschel A', (A' — B') (A' — D') (A' — E') (A' — C');
Strahlbüschel C, (C — A) (C — E) (C — D) (C — B) $\overline{\wedge}$
Strahlbüschel C', (C' — A') (C' — E') (C' — D') (C' — B').

Da nun (C — A) und (C' — A'), (C — B) und (A' — D'), (C — D) und (A' — B') je durch denselben Collineationspunkt gehen, so ist, wenn wir den Durchschnittspunkt von (C — E) mit σ durch Y bezeichnen, Strahlbüschel C, (C — A) (C — E) (C — D) (C — B) perspectivisch, also auch conform Strahlbüschel A', (A' — C') (A' — Y) (A' — B') (A' — D'). Da nun (A' — Y) nicht die Tangente in A' ist, so liegt auf ihr jedenfalls noch ein Curvenpunkt F'. Wir können also sagen, es ist Strahlbüschel C, (C — A) (C — E) (C — D) (C — B) $\overline{\wedge}$ A', (A' — C') (A' — F') (A' — B') (A' — D'). Suchen wir nun den dem Punkt F' homologen an K, indem wir die Strahlen (A — F), (C — F) bestimmen, wodurch F selbst gefunden ist. Der Durchschnittspunkt von (A — E) mit σ heiße U, der unbekannte Durchschnittspunkt von (C — F) mit σ heiße X, der Durchschnittspunkt von (A — F) mit σ ist natürlich derselbe, wie der von (A' — F') oder (C — E), nämlich Y. Es ist nun nach § 11.

Lehrsatz 65. Strahlbüschel A, (A − B) (A − D) (A − E) (A − F) $\overline{\wedge}$ C, (C − B) (C − D) (C − E) (C − F), folglich Punktreihe σ,NMUY $\overline{\wedge}$ σ,MNYX. Nun ist immer (s. § 1. VI. 1)) σ,MNYX $\overline{\wedge}$ σ,NMXY. Es ist also Punktreihe σ,NMUY $\overline{\wedge}$ σ,NMXY. Also fällt X nach U. Es geht also die Verbindungsgerade von C mit F durch denselben Collineationspunkt, wie die (A − E). In dem der Curve K eingeschriebenen vollständigen Viereck AFCE liegen also die Durchschnittspunkte der Gegenseiten [(A − F) · (C − E)] oder Y und [(A − E) · (C − F)] oder U auf σ. Es muß also nach § 11. Lehrsatz 38. α) der dritte Durchschnittspunkt der Gegenseiten [(A − C) · (E − F)] mit dem Pol von σ zusammenfallen. Es geht also (E − F) durch P, also (E′ − F′) durch P′. Da sich ferner (A − E) und (C − F) in U schneiden, so gehen auch (A′ − E′), (C′ − F′) durch U. Es liegen also die Strahlbüschel C, (C − A) (C − E) (C − D) (C − F) (C − B) und A′, (A′ − C′) (A′ − F′) (A′ − B′) (A′ − E′) (A′ − D′) perspectivisch für die Punktreihe σ,HYNUM. Also ist

Strahlbüschel C, (C − A) (C − E) (C − D) (C − F) (C − B) $\overline{\wedge}$
Strahlbüschel A′, (A′ − C′) (A′ − F′) (A′ − B′) (A′ − E′) (A′ − D′),

und wegen der Collineation auch über derselben Punktreihe:

Strahlbüschel C′, (C′ − A′) (C′ − E′) (C′ − D′) (C′ − F′) (C′ − B′) $\overline{\wedge}$
Strahlbüschel A, (A − C) (A − F) (A − B) (A − E) (A − D).

Es sind also A und C′, C und A′, E und F′, F und E′, D und B′, B und D′ homologe Punkte der die Kegelschnitte K, K′ enthaltenden Systeme, oder dieselben können für dieselbe Axe σ auch so auf einander bezogen werden, daß A und C′, C und A′ u. s. w. homolog sind. Das Collineationscentrum kann aber nicht mehr das frühere Σ sein, denn da (A − A′), (C − C′) u. s. w. durch Σ gehen, so können nicht auch (A − C′), (C′ − A) u. s. w. durch Σ gehen; es müssen sich also (A − C′), (C − A′), (B − D′), (D − B′), (E − F′), (F − E′) in einem anderen Collineationscentrum Σ' schneiden, nach § 7. Lehrsatz 2. Nun sahen wir oben, daß, wenn zwei Kegelschnitte für eine Collineationsaxe σ perspectivisch collinear liegen, die Pole P, P′, von σ auf einem Collineationsstrahl liegen müssen. Es müssen also auch P, P′, da die Axe σ unverändert bleibt, auf einem durch Σ' gehenden Collineationsstrahle liegen, oder Σ' muß auf (P − P′) sich befinden; es müssen also Σ, P, P′ Σ', auf einer und derselben Geraden liegen.

α) Wir sehen also: Liegen zwei Kegelschnitte K, K′ für ein Centrum Σ und eine Axe σ perspectivisch, so liegen sie auch für dasselbe Centrum Σ und eine andere Axe σ' perspectivisch. Nämlich, wenn sich die homologen Tangenten a, a′; b, b′; c, c′; d, d′ je auf σ, und a, c; b, d; a′, c′; b′, d′ je auf der Polaren p, p′ von Σ schneiden, so schneiden sich a, c′; c, a′; b, d′; d, b′ auf der andern Axe σ'.

β) Liegen zwei Kegelschnitte K, K′ für eine Axe σ und ein Centrum Σ perspectivisch, so liegen sie auch für dieselbe Axe σ und

ein anderes Centrum Σ' perspectivisch. Nämlich, wenn die Verbindungsgeraden der homologen Punkte A, A'; B, B'; C, C'; D, D'; durch Σ und die von A, C; B, D; A', C'; B', D' je durch die Pole P, P' von σ gehen, so gehen die Verbindungsgeraden von A, C'; C, A'; B, D'; D, B' durch das andere Centrum Σ'.

Es müssen also die Kegelschnitte, da sie für Σ und σ' perspectivisch sind, nach β) auch für σ' und ein zweites Centrum Σ'' perspectivisch sein. Und, da sie für σ und Σ' perspectivisch sind, so müssen sie nach α) auch für Σ' und eine zweite Axe σ'' perspectivisch sein.

C) Da nun, wie wir in der Untersuchung B) sahen, E, F'; F, E' homologe Punkte der Kegelschnitte für das Centrum Σ' und die Axe σ sind, so müssen sich die Tangenten e in E und f' in F'; f in F und e' in E', je auf σ schneiden. In der Untersuchung A) aber sahen wir, daß auch e und f'; f und e' sich auf der Axe σ' schneiden mußten, es müssen sich also e und f'; f und e' im Durchschnittspunkt von σ' mit σ, also im Punkt $(p \cdot p')$ schneiden. Es ist also $(E - F)$ oder $(\Sigma - \Sigma')$ die Polare von $(p \cdot p')$. Es muß demnach der noch unbekannte Pol $\mathfrak{P}$ der Axe σ' auf $(\Sigma - \Sigma')$ liegen. Denn es muß jede durch $\mathfrak{P}$ gezogene Secante in den Durchschnittspunkten mit K, in $\mathfrak{P}$ und dem Durchschnittspunkt mit σ' harmonisch getheilt werden. Nun ist $(p \cdot p')$ ein Punkt der σ', es muß also auch die von $\mathfrak{P}$ nach $(p \cdot p')$ gezogene Secante so getheilt werden, daß $(p \cdot p')$ und $\mathfrak{P}$ zugeordnete harmonische Punkte sind. Es muß aber der dem $(p \cdot p')$ zugeordnete harmonische Punkt auch auf der Polaren $(\Sigma - \Sigma')$ von $(p \cdot p')$ sich befinden; folglich liegt $\mathfrak{P}$ auf $(\Sigma - \Sigma')$. Ferner muß die noch unbekannte Polare $\mathfrak{p}$ von Σ' durch $(p \cdot p')$ oder $(\sigma \cdot \sigma')$ gehen. Denn zieht man von Σ' irgend eine Secante durch K, so müssen die an die Durchschnittspunkte gelegten Tangenten sich auf der Polaren von Σ' schneiden, nach § 11. Lehrsatz 34. α. oder § 11. Lehrsatz 28. (indem man sich von Σ' erst an K die Tangenten t, p' gelegt denken kann; denn Σ' muß außerhalb der K liegen, da für Σ' die Punkte E, F'; E', F homolog sind, und, wenn man den Durchschnittspunkt von $(\Sigma - \Sigma')$ und σ mit Z bezeichnet, die Aufeinanderfolge der homologen Punkte auf dem Collineationsstrahl $(\Sigma' - \Sigma)$ dieselbe sein muß, indem $(\Sigma' - \Sigma), \Sigma'FE'Z$ $\overline{\wedge}$ $(\Sigma' - \Sigma), \Sigma'E'FZ$ ist; was nicht möglich ist, wenn Σ' in dem einen der beiden Kegelschnitte liegt). Es ist aber eine solche durch Σ' gehende Secante $(F - E)$. Da sich nun die Tangenten e, f in E, F in $(\sigma \cdot \sigma')$ schneiden, so muß also die Polare $\mathfrak{p}$ von Σ' durch $(\sigma \cdot \sigma')$ gehen. Ebenso liegt der Pol $\mathfrak{P}'$ von σ' für den Kegelschnitt K' auch auf $(\Sigma - \Sigma')$, und die Polare $\mathfrak{p}'$ von Σ' für den Kegelschnitt K' geht auch durch den Punkt $(\sigma \cdot \sigma')$.

Man sieht nun aus dem Vorigen, daß, wenn man zwei Kegelschnitte K, K' für ein Centrum Σ und eine Axe σ in perspectivische Lage gebracht hat, man sofort eine zweite Axe σ' und ein zweites Centrum Σ' von der Beschaffenheit finden kann, daß K, K' für Σ und σ', für σ und Σ' ebenfalls perspectivisch liegen. Man braucht

nämlich, um σ' zu finden, nur in K Tangenten a, b, c, d so zu ziehen, daß sie sich zu zweien a und c, b und d auf der Polaren p des ursprünglichen Centrums Σ schneiden, und die homologen Tangenten an K′ zu suchen, so bestimmen die Durchschnittspunkte (a · c′), (c · a′) (b · d′), (d · b′) nach A) oder α) die zweite Axe σ'. Um Σ' zu finden, braucht man nur in K vier solche Punkte A, B, C, D zu wählen, daß die Verbindungsgeraden von zwei Paaren, von A und C, B und D durch den Pol P der ursprünglichen Axe σ gehen, und die homologen Punkte auf K′ zu suchen, so bestimmen die Verbindungsgeraden (A — C′), (C — A′), (B — D′), (D — B′) nach B) oder β) das zweite Centrum Σ'.

Es scheint also auf den ersten Anblick, als könnte man zwei Kegelschnitte auf unzählig viele Arten perspectivisch auf einander beziehen, indem man zu der neu gefundenen Axe σ' nach der Methode B) ein neues Centrum Σ'', für das neue Centrum Σ' nach A) eine neue Axe σ'', für das Centrum Σ'' nach A) wieder eine neue Axe σ''', für die Axe σ'' nach B) ein neues Centrum Σ''' finden, und auf diese Weise beliebig fortfahren könnte. Es läßt sich jedoch zeigen, daß, wenn man zur Axe σ' ein neues Centrum sucht, dieses mit Σ' zusammenfallen muß, und daß, wenn man zum Centrum Σ' eine neue Axe sucht, diese mit σ' zusammenfallen muß. Dieß ergiebt sich so:

Wir sahen oben aus der Untersuchung A), daß, wenn wir, vom Centrum Σ und der Axe σ ausgehend, eine neue Axe σ' suchten, diese durch den Durchschnittspunkt von (p · p′) gehen mußte. Ebenso muß nun auch, wenn wir, vom Centrum Σ' und der Axe σ ausgehend, eine neue Axe σ'' suchen, diese durch den Durchschnittspunkt (p · p′) der Polaren des Centrums Σ' gehen. Nach C) aber fällt (p · p′) mit (p · p′), und (σ · σ') zusammen; es muß also auch σ'' durch den Durchschnittspunkt von p, p′, p, p′, σ, σ' gehen. Ferner sahen wir oben, aus der Untersuchung B), daß, wenn wir vom Centrum Σ und der Axe σ ausgehend, ein neues Centrum Σ' suchten, dieses auf derselben Geraden liegen muß, auf der Σ und die Pole P, P′ der Axe σ sich befinden. Ebenso muß nun auch, wenn wir, vom Centrum Σ und der Axe σ' ausgehend, ein neues Centrum Σ'' suchen, dieses auf derselben Geraden liegen, wie Σ und die Pole 𝔓, 𝔓′ der Axe σ'. Letztere aber liegen nach der Untersuchung C) auch auf (Σ — Σ') oder (Σ — P — P′). Es muß demnach auch Σ'' auf der durch Σ, P, P′, Σ', 𝔓, 𝔓′ gehenden Geraden sich befinden. Es seien nun, Fig. 157., vgl. Fig. 156. d und d'_1 ein Paar für das Centrum Σ und die Axe σ homologe Tangenten, d und d'_2 ein Paar für das Centrum Σ und die Axe σ', d und d'_3 ein Paar für das Centrum Σ' und die Axe σ homologe Tangenten. Von dem Punkte (σ' · d'_2) oder (d · d'_2) sei die nach § 11. Lehrsatz 25. mögliche zweite Tangente d'_4 an K′ gelegt. Da nun im System Σ, σ (wenn man die collinearen Systeme, die für das Collineationscentrum Σ und die Collineationsaxe σ perspectivisch liegen, kurz unter dem Namen: „System Σ, σ“ zusammenfaßt) e und e′

homologe Tangenten sind, so sind $(d \cdot e)$ und $(d'_1 \cdot e')$ in demselben System homologe Punkte und $[(d \cdot e) - (d'_1 \cdot e')]$ geht durch Σ; da im System Σ, σ' e und f' homologe Tangenten sind, so sind in ihm $(d \cdot e)$ und $(d'_2 \cdot f')$ homologe Punkte und $[(d \cdot e) - (d'_2 \cdot f')]$ geht durch Σ, und zwar fällt diese Gerade zusammen mit $[(d \cdot e) - (d'_1 \cdot e')]$, denn sie haben beide die Punkte Σ und $(d \cdot e)$ gemein; da ferner e und f' auch im System Σ', σ homologe Tangenten sind, so sind $(d \cdot e)$ und $(d'_3 \cdot f')$ homologe Punkte in demselben und $[(d \cdot e) - (d'_3 \cdot f')]$ geht durch Σ'. Zugleich schneiden sich d und d'_1 auf σ, da sie homologe Tangenten im System Σ, σ sind; es schneiden sich ferner aber auch d und d'_3 auf σ, da sie homologe Tangenten im System Σ', σ sind; es liegt also der Durchschnittspunkt $(d \cdot d'_1 \cdot d'_3)$ der drei Tangenten d, d'_1, d'_3 auf σ. Nun ist ein dem Kegelschnitt K' umgeschriebenes Sechsseit entstanden $d'_3 d'_1 e' d'_4 d'_2 f'$, in welchem sich die Verbindungsgeraden der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Ecke*), also $[(d'_1 \cdot d'_3) - (d'_2 \cdot d'_4)]$; $[(d'_1 \cdot e') - (d'_2 \cdot f')]$; $[(d'_4 \cdot e') - (d'_3 \cdot f')]$ nach § 12. Lehrsatz 4. in einem und demselben Punkte schneiden. Erstere beide nun schneiden sich in $(d \cdot e)$, also muß auch $[(d'_4 \cdot e') - (d'_3 \cdot f')]$ durch $(d \cdot e)$ gehen. Diese hat also mit der Geraden $[(d \cdot e) - (d'_3 \cdot f')]$ die beiden Punkte $(d \cdot e)$, $(d'_3 \cdot f')$ gemein, und fällt daher ganz mit ihr zusammen. Da nun, wie wir soeben sahen, $[(d \cdot e) - (d'_3 \cdot f')]$ durch Σ' geht, so muß auch $[(d'_4 \cdot e') - (d'_3 \cdot f')]$ durch Σ' gehen. Bezeichnen wir nun die Berührungspunkte von e', f' bezüglich mit E', F', so geht also $(E' - F')$ durch Σ'. Zugleich geht auch die Verbindungsgerade $[(d'_3 \cdot f') - (d'_4 \cdot e')]$ durch Σ'. Bezeichnen wir die Berührungspunkte von d'_3, d'_4 bezüglich mit $\mathfrak{D}'_3$, $\mathfrak{D}'_4$, so muß nach § 11. Lehrsatz 31. rechts der Durchschnittspunkt der Gegenseiten $(E' - F')$, $(\mathfrak{D}'_3 - \mathfrak{D}'_4)$ im eingeschriebenen Viereck $E'F'\mathfrak{D}'_3\mathfrak{D}'_4$ zusammenfallen mit dem Durchschnittspunkt der Diagonalen $[(d'_3 \cdot f') - (d'_4 \cdot e')]$, $[(d'_3 \cdot e') - (d'_4 \cdot f')]$, oder es müssen durch den Durchschnittspunkt von $(E' - F')$ und $[(d'_3 \cdot f') - (d'_4 \cdot e')]$ auch gehen die Seite $(\mathfrak{D}'_3 - \mathfrak{D}'_4)$ des eingeschriebenen Vierecks und die Diagonale $[(d'_3 \cdot e') - (d'_4 \cdot f')]$ des umgeschriebenen Vierseits. Der Durchschnittspunkt von $(E' - F')$ und $[(d'_3 \cdot f') - (d'_4 \cdot e')]$ ist aber Σ'; es geht also auch die Diagonale $[(d'_3 \cdot e') - (d'_4 \cdot f')]$ durch Σ'; und folglich fällt die dritte Diagonale $[(e' \cdot f') - (d'_3 \cdot d'_4)]$ nach § 11. Lehrsatz 38. α) links mit der Polaren $\mathfrak{p}'$ von Σ' zusammen, oder d'_3 und d'_4 schneiden sich auf der Polaren $\mathfrak{p}'$ von Σ'. Ferner ist, wenn wir den Berührungspunkt von d'_2 mit $\mathfrak{D}'_2$ bezeichnen, der Durchschnittspunkt von $(E' - F')$, $(\mathfrak{D}'_2 - \mathfrak{D}'_4)$ nach § 11. Lehrsatz 31. rechts identisch mit dem Durchschnittspunkte der Diagonalen $[(d'_2 \cdot e') - (d'_4 \cdot f')]$, $[(d'_2 \cdot f') - (d'_4 \cdot e')]$. Letzterer aber ist nach § 11. Lehrsatz 38. β) links der Pol von $[(e' \cdot f') - (d'_2 \cdot d'_4)]$ oder von σ'. Es geht also

---

*) In der Figur fällt die dritte und sechste Ecke sehr nahe an die Peripherie der Curve., und $(\mathfrak{D} - \Sigma')$ muß durch diese Ecken 6. und 3. gehen.

$(\mathfrak{D}'_2 - \mathfrak{D}'_4)$ durch den Pol $\mathfrak{P}'$ von σ'. Um nun, vom System Σ, σ' ausgehend, ein zweites Centrum Σ'' zu finden, haben wir nach B), wenn $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'_2$ homologe Punkte des Systems Σ, σ' sind, von $\mathfrak{D}'_2$ durch den Pol $\mathfrak{P}'$ von σ' eine Gerade zu ziehen, so erhält man einen Punkt $\mathfrak{D}'_4$, dessen Verbindungsgerade $(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}'_4)$ mit $\mathfrak{D}$ durch das neue Centrum Σ'' geht. Zugleich liegt dieß, wie wir oben sahen, auf der Geraden $(\Sigma - P - P')$. Nun geht aber, wie wir eben zeigten, $(\mathfrak{D}'_3 - \mathfrak{D}'_4)$ durch Σ'; und da $\mathfrak{D}'_3$ der dem $\mathfrak{D}$ homologe Punkt im System Σ', σ ist, so geht auch $(\mathfrak{D}'_3 - \mathfrak{D})$ durch Σ'; also geht auch, da letztere mit $(\mathfrak{D}'_3 - \mathfrak{D}'_4)$ zwei Punkte, $\mathfrak{D}'_3$, Σ' gemein hat, und also mit ihr zusammenfällt, $(\mathfrak{D}'_4 - \mathfrak{D})$ durch Σ', und schneidet also die $(\Sigma - P - P')$ in Σ'. Es fällt demnach das gesuchte Centrum Σ'' nach Σ'. Man erhält demnach, wenn man, vom System Σ, σ' ausgehend, das zweite Centrum sucht, dasselbe Centrum Σ' wieder, welches sich ergab, als man, vom System Σ, σ ausgehend, das zweite Centrum suchte. Sucht man umgekehrt, vom System Σ', σ ausgehend, die zweite Axe σ'', so hat man nach A), wenn d, d'_3 ein Paar homologer Tangenten in Σ', σ sind, eine solche Tangente d'_4 zu suchen, die mit d'_3 auf der Polaren p' von Σ' convergirt; ihr Durchschnittspunkt mit d liegt dann auf der gesuchten Axe σ''. Nun schneidet aber d'_4 die d auf σ', wie wir sahen; da nun σ'' auch durch $(p \cdot p')$ gehen muß, und auch σ' durch diesen Punkt geht, so fällt demnach σ'' mit σ' zusammen. Man erhält also, wenn man, vom System Σ', σ ausgehend, die zweite Axe sucht, dieselbe Axe σ' wieder, welche sich ergab, als man, vom System Σ, σ ausgehend, die zweite Axe suchte.

Ein Gleiches ergiebt sich, wenn wir, vom System Σ', σ ausgehend, eine neue Axe σ'' suchen. Es seien, Fig. 158., vgl. Fig. 156., $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'_1$ ein Paar für die Axe σ und das Centrum Σ, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'_2$ ein Paar für die Axe σ und das Centrum Σ', $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'_3$ ein Paar für die Axe σ' und das Centrum Σ homologer Curvenpunkte. Auf der Geraden $(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}'_2)$ oder $(\Sigma' - \mathfrak{D}'_2)$ werde der nach § 11. Lehrsatz 25. nothwendig liegende zweite Curvenpunkt $\mathfrak{D}'_4$ im Kegelschnitt K' bestimmt. Nun sind E und E' im System Σ, σ homologe Punkte, also $(\mathfrak{D} - E)$, $(\mathfrak{D}'_1 - E')$ homologe Gerade in diesem System; es schneiden sich dieselben also auf der Axe σ; im System Σ', σ sind E und F' homologe Punkte, also $(\mathfrak{D} - E)$, $(\mathfrak{D}'_2 - F')$ homologe Gerade, und ihr Durchschnittspunkt liegt ebenfalls auf σ, es schneiden sich also $(\mathfrak{D} - E)$, $(\mathfrak{D}'_1 - E')$, $(\mathfrak{D}'_2 - F')$ in demselben Punkte der Axe σ; endlich sind E und F' auch im System Σ, σ' homologe Punkte, also schneiden sich die homologen Geraden $(\mathfrak{D} - E)$, $(\mathfrak{D}'_3 - F')$ auf σ'. Zugleich geht $(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}'_1)$ durch Σ, deßgleichen auch $(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}'_3)$ durch Σ, es liegen also $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'_1$, $\mathfrak{D}'_3$ auf einer und derselben durch Σ gehenden Geraden $(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}'_1 - \mathfrak{D}'_3)$. Nun ist ein dem Kegelschnitt K' eingeschriebenes Sechseck entstanden $\mathfrak{D}'_3\mathfrak{D}'_1E'\mathfrak{D}'_4\mathfrak{D}'_2F'$, in welchem die Durchschnittspunkte der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Seite, also $[(\mathfrak{D}'_1 - \mathfrak{D}'_3) \cdot (\mathfrak{D}'_2 - \mathfrak{D}'_4)]$; $[(\mathfrak{D}'_1 - E') \cdot (\mathfrak{D}'_2 - F')]$; $[(\mathfrak{D}'_4 - E')$

$\cdot (\mathfrak{C}'_3 - F')]$ nach § 12. Lehrsatz 4. auf derselben Geraden liegen. Erstere zwei liegen nun auf $(\mathfrak{C} - E)$, also muß auch $[(\mathfrak{C}'_4 - E') \cdot (\mathfrak{C}'_3 - F')]$ auf $(\mathfrak{C} - E)$ liegen. Letztgenannter Punkt liegt nun sowohl auf $(\mathfrak{C}'_4 - E')$, als auf $(\mathfrak{C}'_3 - F')$, als auf $(\mathfrak{C} - E)$ und muß also mit $[(\mathfrak{C} - E) \cdot (\mathfrak{C}'_3 - F')]$ zusammenfallen. Dieser Punkt aber liegt auf σ'; also muß auch $[(\mathfrak{C}'_4 - E') \cdot (\mathfrak{C}'_3 - F')]$ auf σ' liegen. Bezeichnen wir nun die Tangenten an E', F' mit e', f', die Tangenten an $\mathfrak{C}'_1$, $\mathfrak{C}'_2$, $\mathfrak{C}'_3$, $\mathfrak{C}'_4$ bezüglich mit d'_1, d'_2, d'_3, d'_4 (sie sind in der Figur nicht verzeichnet, man vergleiche aber die analogen Verhältnisse an Fig. 157.), so liegt also $(e' \cdot f')$ auf σ', und ebenso der Durchschnittspunkt $[(\mathfrak{C}'_3 - F') \cdot (\mathfrak{C}'_4 - E')]$. Ferner muß nach § 11. Lehrsatz 31. links die Diagonale $[(e' \cdot f') - (d'_3 \cdot d'_4)]$ im umgeschriebenen Vierseit $e'f'd'_3d'_4$ zusammenfallen mit der Verbindungsgeraden der Durchschnittspunkte der Gegenseiten $[(\mathfrak{C}'_3 - F') \cdot (\mathfrak{C}'_4 - E')]$, $[(\mathfrak{C}'_3 - E') \cdot (\mathfrak{C}'_4 - F')]$, oder auf der Verbindungsgeraden von $(e' \cdot f')$ und $[(\mathfrak{C}'_3 - F') \cdot (\mathfrak{C}'_4 - E')]$ liegen auch die Ecke $(d'_3 \cdot d'_4)$ des umgeschriebenen Vierseits und der Durchschnittspunkt $[(\mathfrak{C}'_3 - E') \cdot (\mathfrak{C}'_4 - F')]$ des eingeschriebenen Vierecks. Die Verbindungsgerade von $(e' \cdot f')$ und $[(\mathfrak{C}'_3 - F') \cdot (\mathfrak{C}'_4 - E')]$ ist aber σ'; es liegt also auch der Durchschnittspunkt $[(\mathfrak{C}'_3 - E') \cdot (\mathfrak{C}'_4 - F')]$ der Gegenseiten auf σ' und folglich fällt der dritte Durchschnittspunkt $[(E' - F') \cdot (\mathfrak{C}'_3 - \mathfrak{C}'_4)]$ der Gegenseiten nach § 11. Lehrsatz 38. α) rechts mit dem Pol $\mathfrak{P}'$ von σ' zusammen. Ferner ist die Verbindungsgerade von $(e' \cdot f')$ mit $(d'_2 \cdot d'_4)$, wenn d'_2 die Tangente im Punkte $\mathfrak{C}'_2$ ist, nach § 11. Lehrsatz 31. links identisch mit der Verbindungsgeraden der Durchschnittspunkte $[(\mathfrak{C}'_2 - E') \cdot (\mathfrak{C}'_4 - F')]$, $[(\mathfrak{C}'_2 - F') \cdot (\mathfrak{C}'_4 - E')]$ der Gegenseiten. Nach § 11. Lehrsatz 38. β) rechts ist aber letztere die Polare von $[(E' - F') \cdot (\mathfrak{C}'_2 - \mathfrak{C}'_4)]$ oder von Σ'. Es liegt also $(d'_2 \cdot d'_4)$ auf der Polaren p' von Σ'. Um nun, vom System Σ', σ ausgehend, eine zweite Axe σ'' zu finden, haben wir nach A), wenn d, d'_2, homologe Tangenten im System Σ', σ sind, vom Durchschnittspunkt von d'_2 mit der Polaren p' von Σ' eine Tangente d'_4 an K' zu legen, so liegt der Durchschnittspunkt $(d \cdot d'_4)$ auf der gesuchten Axe σ''; zugleich geht dieselbe, wie oben gezeigt wurde, durch den Durchschnittspunkt $(\sigma \cdot p \cdot p')$. Nun liegt aber, wie wir soeben zeigten, $(d'_3 \cdot d'_4)$ auf σ' und, da d'_3 die der d homologe Tangente im System Σ, σ' ist, so liegt auch $(d'_3 \cdot d)$ auf σ'; also liegt auch $(d'_4 \cdot d)$ auf σ'; und da σ' auch durch $(\sigma \cdot p \cdot p')$ geht, so muß sie identisch sein mit σ'', oder σ'' muß mit σ' zusammenfallen. Man erhält also, wenn man, vom System Σ', σ ausgehend, die zweite Axe sucht, dieselbe Axe σ' wieder, die sich ergab, als man, vom System Σ, σ ausgehend, die zweite Axe suchte. Sucht man umgekehrt, vom System Σ, σ' ausgehend, das zweite Centrum Σ'', so hat man nach B), wenn $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'_3$ ein Paar homologer Curvenpunkte in Σ, σ' sind, einen solchen Curvenpunkt $\mathfrak{C}'_4$ zu suchen, daß die Verbindungsgerade $(\mathfrak{C}'_3 - \mathfrak{C}'_4)$ durch den Pol $\mathfrak{P}'$ von σ' geht. Die Verbindungsgerade dieses so gefundenen Curvenpunktes $\mathfrak{C}'_4$ mit $\mathfrak{C}$ geht dann durch

das gesuchte Centrum Σ''. Zugleich muß dieses auf $(P - P')$ liegen. Nun geht aber $(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}'_4)$, wie wir oben sahen, durch Σ', und Σ' liegt auch auf $(P - P')$; es fällt also Σ'' mit Σ' zusammen. Man erhält demnach, wenn man, vom System Σ, σ' ausgehend, das zweite Centrum sucht, dasselbe Centrum Σ' wieder, welches sich ergab, als man, vom System Σ, σ ausgehend, das zweite Centrum suchte*).

Endlich bemerkt man sogleich, daß, wenn man nach A), vom System Σ, σ ausgehend, die zweite Axe σ' sucht, ein vollständiges Viereck $(\sigma \cdot c)(c \cdot \sigma')(\sigma' \cdot a)(a \cdot \sigma)$, Fig. 156., entsteht, in welchem σ, σ'; c, a; c', a' je ein Paar Gegenseiten sind, und in welchem p, p' ein Paar Verbindungsgerade der Durchschnittspunkte der Gegenseiten sind. Es ist also nach § 3. Lehrsatz 17. Strahlbüschel $(\sigma \cdot \sigma')$, $\sigma p \sigma' p'$ harmonisch. Hätte man, vom System Σ', σ ausgehend, die zweite Axe σ' gesucht nach A), so hätte sich ebenso gefunden, daß auch Strahlbüschel $(\sigma \cdot \sigma')$, $\sigma p \sigma' p'$ harmonisch ist. Ferner bemerkt man, daß, wenn man, vom System Σ, σ ausgehend, nach B) ein zweites Centrum Σ' sucht, ein vollständiges Vierseit $(\Sigma - C)(C - \Sigma')(\Sigma' - A)(A - \Sigma)$ entsteht, in welchem Σ, Σ'; C, A; C', A' Fig. 156. ein Paar Ecken und P, P' ein Paar Durchschnittspunkte der Diagonalen sind; es ist also nach § 3. Lehrsatz 17. Punktreihe $(\Sigma - \Sigma')$, $\Sigma P \Sigma' P'$ harmonisch. Hätte man, vom System Σ, σ' ausgehend, das zweite Centrum Σ' gesucht nach B), so hätte sich ebenso gefunden, daß auch Punktreihe $(\Sigma - \Sigma')$, $\Sigma \mathfrak{P} \Sigma' \mathfrak{P}'$ harmonisch ist.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so erhalten wir also mit Berücksichtigung von § 8. Lehrsatz 12. folgende Gesetze:

29. Lehrsatz. **Befinden sich zwei collinear auf einander bezogene Kegelschnitte K, K' für ein Collineationscentrum Σ und eine Collineationsaxe σ in perspectivischer Lage, so befinden sie sich auch allemal zugleich für dasselbe**

---

*) In dem Falle, daß, wie in der Figur angenommen ist, K und K' ganz außerhalb einander liegen, ist es leicht einzusehen, daß es außer Σ nur noch ein einziges Centrum Σ' geben kann. Denn da das Collineationscentrum ein sich selbst homologer Punkt beider Systeme ist, so muß es dann außerhalb beider liegen. Denn läge es nur außerhalb K, und innerhalb K', so könnten von ihm aus an K Tangenten gezogen werden, an K' aber nicht, es müßte also jeder dieser beiden Tangenten an K eine Gerade im zweiten System homolog sein, die K' nicht berührte, gegen § 10. Lehrsatz 3. Liegen also K, K' ganz außer einander, so müssen alle Collineationscentra Σ, Σ', Σ'' u. s. w. außerhalb K und K' liegen. Zieht man also von Σ' zwei Tangenten an K, so sind sie auch Tangenten an K', ebenso die von Σ an K gelegten Tangenten. Die Kegelschnitte haben dann also vier Tangenten (zwei von Σ, zwei von Σ' ausgehende) gemein. Mehr aber können sie nicht gemein haben, weil sie sonst ganz zusammenfallen mußten, nach § 12. Lehrsatz 12. A. 1); also kann es außer Σ und Σ' kein Collineationscentrum mehr geben. Liegen aber K und K' ganz oder zum Theil in einander (der Anfänger wird wohl thun, diese Fälle auch zu verzeichnen und sich über die dann eintretende Lage der betreffenden Punkte und Linien zu orientiren, vgl. Fig. 160.), so lassen sich diese Schlüsse nicht ziehen. Es ist daher im Obigen ein auch dann geltender Beweis gegeben worden.

Centrum Σ und eine zweite Axe σ', für dieselbe Axe σ und ein zweites Centrum Σ', und für das zweite Centrum Σ' und die zweite Axe σ' in perspectivischer Lage, und zwar nur für diese, so lange ihre gegenseitige Lage nicht verändert wird. Ferner ist in zweien dieser vier Systeme, im System Σ, σ, und im System Σ', σ' die perspectivische Collineation entgegengesetzt, in den beiden übrigen Systemen Σ, σ', und Σ' σ einstimmig. Fig. 159.

30. Lehrsatz. Liegen zwei Kegelschnitte K, K' perspectivisch, so erhält man, von einem System, z. B. Σ, σ, ausgehend, die zweite Axe σ', indem man, wenn d, d' ein Paar homologe Tangenten im System Σ, σ sind, vom Durchschnittspunkt (d·p) der einen Tangente mit der Polaren p des Centrums Σ im Kegelschnitt K, an denselben eine zweite Tangente b legt, oder, was dasselbe ist, indem man an den zweiten Durchschnittspunkt 𝔟 des Collineationsstrahls (Σ − 𝔇) mit K an diesen eine zweite Tangente b legt; dann liegt der Durchschnittspunkt (b·d') auf der zweiten Axe σ'. Fig. 159.

31. Lehrsatz. Die Polaren p, p'; 𝔭, 𝔭' der Collineationscentra Σ, Σ' in den Kegelschnitten K, K' schneiden sich alle im Durchschnittspunkte (σ · σ') der beiden Axen σ, σ' und es ist sowohl Strahlbüschel (σ · σ'), σpσ'p', als (σ · σ'), σ𝔭σ'𝔭' harmonisch. Fig. 156.

32. Lehrsatz. Liegen an zwei perspectivisch liegenden Kegelschnitten K, K', die Durchschnittspunkte (d · d'),

30. Lehrsatz. Liegen zwei Kegelschnitte K, K', perspectivisch, so erhält man, von einem Systeme, z. B. Σ, σ, ausgehend, das zweite Centrum Σ', indem man, wenn 𝔇, 𝔇'' ein Paar homologer Curvenpunkte im System Σ, σ sind, auf der Verbindungsgeraden (𝔇 − P) des einen Punktes mit dem Pol P der Axe σ im Kegelschnitt K auf demselben den zweiten Curvenpunkt B bestimmt, oder, was dasselbe ist, indem man auf der vom Collineationspunkt (σ · d) an K gezogenen zweiten Tangente den Berührungspunkt B bestimmt; dann geht die Verbindungsgerade (B − 𝔇'') durch das zweite Centrum Σ'. Fig. 159.

31. Lehrsatz. Die Pole P, P'; 𝔓, 𝔓' der Collineationsaxen σ, σ' in beiden Kegelschnitten K, K' liegen alle auf der Verbindungsgeraden (Σ − Σ') der beiden Centra Σ, Σ'; und es ist sowohl Punktreihe (Σ − Σ'), ΣPΣ'P', als (Σ − Σ'), Σ𝔓Σ'𝔓' harmonisch. Fig. 156.

32. Lehrsatz. Gehen an zwei perspectivisch liegenden Kegelschnitten K, K' die Verbindungsgeraden (𝔇−𝔇''),

$(b \cdot b')$ der im System Σ, σ homologen Tangenten d, d'; b, b', von denen $(d \cdot b)$ auf der Polaren p von Σ, $(d' \cdot b')$ auf der Polaren p' von Σ liegt, auf der ersten Axe σ; so liegen die inversen Durchschnittspunkte $(d \cdot b')$, $(b \cdot d')$ der Tangenten d, b'; b, d' auf der zweiten Axe σ'; liegen die Durchschnittspunkte $(d \cdot d'_3)$, $(d_4 \cdot d'_4)$ der im System Σ', σ homologen Tangenten d, d'_3; d_4, d'_4, von denen $(d \cdot d_4)$ auf der Polaren $\mathfrak{p}$ von Σ', $(d'_3 \cdot d'_4)$ auf der Polaren $\mathfrak{p}'$ von Σ' liegt, auf der ersten Axe σ, so liegen die inversen Durchschnittspunkte $(d \cdot d'_4)$, $(d_4 \cdot d'_3)$ der Tangenten d, d'_4; d_4, d'_3 auf der zweiten Axe σ'. Fig. 159.

$(B - B')$ der im System Σ, σ homologen Curvenpunkte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}''$; B, B', von denen $(\mathfrak{D} - B)$ durch den Pol P von σ, $(\mathfrak{D}'' - B')$ durch den Pol P' von σ geht, durch das erste Centrum Σ, so gehen die inversen Verbindungsgeraden $(\mathfrak{D} - B')$, $(B - \mathfrak{D}'')$ der Curvenpunkte $\mathfrak{D}, B'$; $B, \mathfrak{D}''$ durch das zweite Centrum Σ'; gehen die Verbindungsgeraden $(\mathfrak{D} - B')$ $(\mathfrak{D}_4 - \mathfrak{D}'_4)$ der im System Σ σ' homologen Curvenpunkte, von denen $(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_4)$ durch den Pol $\mathfrak{P}$ von σ', $(\mathfrak{B}' - \mathfrak{D}'_4)$ durch den Pol $\mathfrak{P}'$ von σ' geht, durch das erste Centrum Σ, so gehen die inversen Verbindungsgeraden $(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}'_4)$, $(\mathfrak{D}_4 - \mathfrak{B}')$, der Curvenpunkte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'_4$; $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{B}'$ durch das zweite Centrum Σ'. Fig. 159.

Es ist in manchen Fällen leicht zu erkennen, daß zwei Kegelschnitte perspectivisch liegen, besonders dann, wenn die von einem Punkte Σ Fig. 159. in ihrer Ebene an K, K' gelegten Tangenten m, n; m', n' denselben Winkel, $\angle mn = \angle m'n'$ bilden, und m' mit m, n' mit n zusammenfällt. Denn man kann dann, wenn man die Berührungspunkte von m, n; m', n' an K, K' bezüglich mit M, N; M' N' bezeichnet, nach Lehrsatz 3. m' homolog m, n' homolog n, M' homolog M, N' homolog N setzen, kann von Σ aus eine beliebige Gerade δ ziehen, und die Tangenten d, d' in ihren Durchschnittspunkten $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}''$ homolog setzen. Dann sind K, K' collinear auf einander bezogen; es ist $(m' \cdot n')$ homolog $(m \cdot n)$, also Σ sich selbst homolog, also $(\Sigma - \mathfrak{D})$ homolog $(\Sigma - \mathfrak{D}'')$; also haben beide Systeme einen Strahlbüschel $\Sigma, m\delta n$, $\Sigma, m'\delta n'$ gemein, und liegen also nach § 7. Lehrsatz 26. links perspectivisch für den Punkt Σ als Collineationscentrum. Schneiden ferner K, K' auf einer in ihrer Ebene liegenden Geraden σ Fig. 160. dasselbe Stück $M'N' = MN$ ab, so kann man M' homolog M, N' homolog N, Tangente m' homolog m, n' homolog n setzen, kann von einem beliebigen Punkte Δ der σ Tangenten d, d' an K, K' legen und ihre Berührungspunkte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ homolog setzen. Dann sind nach Lehrsatz 3. die Kegelschnitte K, K' collinear auf einander bezogen, es ist ferner σ eine sich selbst homologe Gerade, und M oder M', N oder N', Δ oder $(\sigma \cdot d)$ oder $(\sigma \cdot d')$ ein sich selbst homologer Punkt. Beide

Systeme haben also eine Punktreihe σ,MNΔ, σ,M'N'Δ gemein, und liegen also nach § 7. Lehrsatz 26. rechts perspectivisch für die Gerade σ als Collineationsaxe. Man sieht also:

33. Lehrsatz. Zwei in derselben Ebene liegende, demselben Winkel m'n' = mn eingeschriebene Kegelschnitte K, K' liegen allemal perspectivisch für den Punkt (m · n) oder (m' · n') als Collineationscentrum. Fig. 159.*).

33. Lehrsatz. Zwei in derselben Ebene liegende, dieselbe Strecke M'N' = MN abschneidende Kegelschnitte K, K' liegen allemal perspectivisch für die Gerade (M − N) oder (M' − N') als Collineationsaxe. Fig. 160.*)

§ 14.

Polarität und Reciprocität der Kegelschnitte.

1. Erklärung. Die in § 11. Lehrsatz 32., 33., 34., 35., 36., 38., 39. aufgestellten Eigenschaften der Kegelschnitte werden der in § 11. Erklärung 37. aufgestellten Definition wegen zusammengefaßt unter dem gemeinsamen Namen: **„Polarität der Kegelschnitte"**.

Mit Hülfe der genannten Lehrsätze lassen sich mehrere Aufgaben lösen, z. B.

2. Aufgabe. Gegeben ein verzeichnet vorliegender Kegelschnitt K, und ein Punkt P außerhalb desselben; gesucht die Tangenten von P an K.

Auflösung **). Man ziehe von P aus zwei Gerade, deren jede K in zwei Punkten schneidet, die eine in A und B, die andere in C und D, suche den Durchschnittspunkt [(A − D) · (B − C)] oder E und [(A − C) · (B − D)] oder F und ziehe (F − E), so schneidet diese den Kegelschnitt K in den Punkten Q, R, in denen die von P an K gelegten Tangenten denselben berühren; es sind also (P − Q), (P − R) die gesuchten Tangenten q, r selbst. Denn nach § 11. Lehrsatz 38. α) rechts ist (F − P) wegen des vollständigen Vierecks ABCD die Polare von E und nach § 11. Lehrsatz 31. gehen die Tangenten von P an K durch Q und R. Diese Methode ist stets anwendbar, mag K ein Kreis,

*) Es wäre nun die Theorie der Osculationen zu entwickeln. Wir verweisen jedoch hierüber auf Paulus: „Grundlinien der neueren Geometrie". Neuntes Buch D incl. bis H incl., wo man diese Lehre ausführlich abgehandelt findet.

**) Wo keine Figur angegeben ist, wird man sich dieselbe nach den Angaben im Texte leicht construiren können. — Eine andere Auflösung, als die oben angegebene theilt Steczkowski in Grunert's Archiv der Mathematik und Physik, Theil 34., Heft 3., Seite 302. mit. Dieselbe gründet sich, wie man sich sogleich überzeugt, auf § 11. Lehrsatz 44.

eine Ellipse, eine Hyperbel oder Parabel sein. Ja, man braucht gar nicht zu wissen, welcher dieser vier Arten eine verzeichnete Curve angehört, wenn man nur überhaupt weiß, daß sie ein Kegelschnitt ist. Auch braucht nicht die ganze Curve verzeichnet vorzuliegen, sondern nur ein solches Stück von ihr, daß auf ihm noch die Berührungspunkte der von P an K zu legenden Tangenten sich befinden. — Eine andere Aufgabe ist die

3. Aufgabe. Gegeben ein verzeichnet vorliegender Kegelschnitt K und ein Punkt P in seiner Ebene; gesucht die Polare p dieses Punktes.

3. Aufgabe. Gegeben ein verzeichnet vorliegender Kegelschnitt K und eine Gerade p in seiner Ebene; gesucht der Pol P dieser Geraden.

Auflösung der Aufgabe links. Man ziehe, P mag inner- oder außerhalb K liegen, durch ihn zwei Secanten, die K bezüglich in A und B; C und D schneiden, suche den Punkt $[(A - D) \cdot (B - C)]$ oder E und $[(A - C) \cdot (B - D)]$ oder F, und ziehe $(E - F)$, so ist dieß die verlangte Polare p nach § 11. Lehrsatz 38. β) rechts. Liegt insbesondere P auf der Peripherie des Kegelschnittes, z. B. Fig. 161. a. in S, so ist leicht zu sehen, daß die Tangente s in demselben Punkt seine Polare sein muß. Denn läßt man einen innern Pol A immer näher nach der Peripherie rücken, so nähert sich auch seine Polare a demselben immer mehr. Oder auch, wenn a die Polare von A ist, so ist $\frac{SA}{S'A} = \frac{SA'}{S'A'}$. Fällt nun A mit S zusammen, so muß auch $SA' = 0$ sein, also A′ nach S fallen. Zugleich kann die Polare von S keinen zweiten Punkt mit K gemein haben, oder K schneiden, denn sonst müßte ihr Pol außer K liegen; auch kann sie nicht ganz außerhalb K sich befinden, denn sonst läge ihr Pol innerhalb. Sie muß also K berühren.

Auflösung der Aufgabe rechts. Mag p den Kegelschnitt K schneiden oder nicht, in beiden Fällen kann man auf p (wenn sie den Kegelschnitt schneidet, auf der außerhalb von K liegenden Strecke von p) zwei Punkte P_1, P_2 annehmen, von denen man nach Aufgabe 2. an K je zwei Tangenten q_1, r_1; q_2, r_2 legen kann, die bezüglich in Q_1, R_1; Q_2, R_2 berühren. Dann ziehe man $(Q_1 - R_1)$, $(Q_2 - R_2)$; ihr Durchschnittspunkt $[(Q_1 - R_1) \cdot (Q_2 - R_2)]$ ist der gesuchte Pol P von p. Denn nach § 11. Lehrsatz 31. rechts fällt im eingeschriebenen Viereck $Q_1 R_1 Q_2 R_2$ der Punkt $[(Q_1 - R_2) \cdot (Q_2 - R_1)]$ zusammen mit dem Durchschnittspunkt der Diagonalen $[(q_1 \cdot r_1) - (q_2 \cdot r_2)]$ und $[(q_1 \cdot q_2) - (r_1 \cdot r_2)]$ des umgeschriebenen Vierseits $q_1 r_1 q_2 r_2$; er liegt also auf $[(q_1 \cdot r_1) - (q_2 \cdot r_2)]$ oder auf p; der Durchschnittspunkt $[(Q_1 - Q_2) \cdot (R_1 - R_2)]$ fällt zusammen mit dem Durchschnittspunkt der Diagonalen $[(q_1 \cdot r_1) - (q_2 \cdot r_2)]$ und $[(q_1 \cdot r_2) - (r_1 \cdot q_2)]$, es liegt also $[(Q_1 - Q_2) \cdot (R_1 - R_2)]$ jedenfalls auf $[(q_1 \cdot r_1) - (q_2 \cdot r_2)]$

d. h. auf p, der Punkt $[(Q_1 - R_1) \cdot (Q_2 - R_2)]$ endlich fällt zusammen mit dem Durchschnittspunkte der Diagonalen $[(q_1 \cdot q_2) - (r_1 \cdot r_2)]$ und $[(q_1 \cdot r_2) - (r_1 \cdot q_2)]$; also ist nach § 11. Lehrsatz 38. α) rechts der Punkt $[(Q_1 - R_1) \cdot (Q_2 - R_2)]$ der Pol von p. Im Falle p eine den Kegelschnitt K schneidende Gerade und es aus irgend einem Grunde unzulässig wäre, sie über ihre Durchschnittspunkte V, W mit der Peripherie von K zu verlängern, kann man auch so verfahren: Man verbinde V und W mit drei beliebigen Curvenpunkten X, Y, Z von K, so daß die Strahlbüschel entstehen V, (V − W) (V − X) (V − Y) (V − Z) und W, (W − V) (W − X) (W − Y) (W − Z). Nun bestimme man im Büschel V einen Strahl v so, daß er dem Strahl (W − V) entspricht, daß also V, (V − X) (V − Y) (V − Z) v $\barwedge$ W, (W − X) (W − Y) (W − Z) (W − V) ist, und in W einen Strahl w so, daß W, (W − X) (W − Y) (W − Z) w $\barwedge$ V, (V − X) (V − Y) (V − Z) (V − W) ist; dann sind v und w Tangenten an V und W nach § 11. Lehrsatz 65. und (v · w) ist der gesuchte Pol von (V − W) oder p nach § 11. Lehrsatz 34. α. rechts. — Ferner ergeben sich aus dem Bisherigen ein Paar allgemeinere Lösungen von Aufgaben, die bereits früher gelöst sind, z. B. von den Aufgaben 31. und 32. in § 1., also:

4. Aufgabe. Gegeben drei Punkte A, C, B einer Punktreihe s; c liege entweder auf der Strecke AB oder auf A∞B; gesucht der ihm zugeordnete harmonische Punkt D.

4. Aufgabe. Gegeben drei Strahlen a, c, b eines Strahlbüschels S; c liege entweder in der Fläche des Winkels ab oder in 180° — ab; gesucht der ihm zugeordnete harmonische Strahl d.

Auflösung der Aufgabe links. Man construire einen beliebigen, durch A und B gehenden Kegelschnitt K (am einfachsten natürlich einen Kreis, doch kann jeder andere benutzt werden) und suche die Polare c des Punktes C, so schneidet diese die Gerade s im gesuchten Punkte (s · c) oder D. — Um die Aufgabe rechts zu lösen, construire man einen beliebigen Kegelschnitt K, der die Strahlen a, b, berührt (am einfachsten einen Kreis), suche den Pol C der Geraden c, und ziehe dann (S − C), so ist diese der verlangte Strahl D.

Ferner ergiebt sich mit Hülfe der aus den Polaritätsgesetzen abgeleiteten involutorischen Eigenschaft der Kegelschnitte eine allgemeine Lösung der schon in § 4. Aufgabe 23. abgehandelten:

5. Aufgabe. Gegeben zwei Paar entsprechender Punkte $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$; $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ einer Involution, gesucht die Hauptpunkte derselben, wenn solche vorhanden sind.

5. Aufgabe. Gegeben zwei Paar entsprechender Strahlen α, α'; c, c' einer Involution; gesucht die Hauptstrahlen derselben, wenn solche vorhanden sind.

Auflösung der Aufgabe links. Man construire einen beliebigen Kegelschnitt K (am einfachsten einen Kreis), der die Richtung s der

Punktreihe $s, \mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{C}'\mathcal{A}'$ berührt, und ziehe von $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{A}'$ aus an denselben die Tangenten, bezüglich a, c, c', a', die den Kegelschnitt in den Punkten bezüglich A, C, C', A' berühren. In dem umgeschriebenen Vierseit $aca'c'$ bestimme man den Durchschnittspunkt Σ der Diagonalen $[(a \cdot c) - (a' \cdot c')]$ und $[(a \cdot c') - (c \cdot a')]$, und ziehe von Σ aus die Tangenten t, t' an K, so schneiden dieselben die s in den Hauptpunkten $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$. Denn nach § 11. Lehrsatz 31. liegt auch $[A - A') \cdot (C - C')]$ in Σ, und $[(A - C') \cdot (C - A')]$ fällt zusammen mit dem Durchschnittspunkt der Diagonalen $[(a \cdot a') - (c \cdot c')]$ und $[(a \cdot c) - (a' \cdot c')]$, und $[(A - C) \cdot (A' - C')]$ mit dem Durchschnittspunkt von $[(a \cdot a') - (c \cdot c')]$ und $[(a \cdot c') - (a' \cdot c)]$. Es ist also $[(a \cdot a') - (c \cdot c')]$ oder σ die Polare von Σ. Es gehen also die Tangenten t, t' durch die Durchschnittspunkte T, T' von σ mit K. Nach § 11. Lehrsatz 44. ist nun K für Σ als Centrum und σ als Axe sich selbst involutorisch collinear. Es ist also Punktreihe $a, (a \cdot c)\, A\, (a \cdot t)\, (a \cdot a')\, (a \cdot c')\, (a \cdot t') \;\overline{\wedge}\; a', (a' \cdot c')\, A'\, (a' \cdot t)\, (a' \cdot a)\, (a' \cdot c)\, (a' \cdot t')$; aber nach § 11. Lehrsatz 65. ist auch $a', (a' \cdot c')\, A'\, (a' \cdot t)\, (a' \cdot a)\, (a' \cdot c)\, (a' \cdot t') \;\overline{\wedge}\; a, (a \cdot c')\, (a \cdot a')\, (a \cdot t)\, A\, (a \cdot c)\, (a \cdot t')$, also ist $a, (a \cdot c)\, A\, (a \cdot t)\, (a \cdot a')\, (a \cdot c')\, (a \cdot t') \;\overline{\wedge}\; a, (a \cdot c')\, (a \cdot a')\, (a \cdot t)\, A\, (a \cdot c)\, (a \cdot t')$. Es entsteht demnach auf a eine involutorische Punktreihe. Nun ist nach § 11. Lehrsatz 65. Punktreihe $s, (s \cdot a)\, (s \cdot c)\, (s \cdot t')\, (s \cdot c')\, (s \cdot a')\, (s \cdot t) \;\overline{\wedge}\; a, A\, (a \cdot c)\, (a \cdot t')\, (a \cdot c')\, (a \cdot a')\, (a \cdot t)$. Da nun $a, A\, (a \cdot c)\, (a \cdot t')\, (a \cdot c')\, (a \cdot a')\, (a \cdot t) \;\overline{\wedge}\; a, (a \cdot a')\, (a \cdot c')\, (a \cdot t')\, (a \cdot c)\, A\, (a \cdot t)$ ist, so muß auch $s, (s \cdot a)\, (s \cdot c)\, (s \cdot t')\, (s \cdot c')\, (s \cdot a')\, (s \cdot t) \;\overline{\wedge}\; s, (s \cdot a')\, (s \cdot c')\, (s \cdot t')\, (s \cdot c)\, (s \cdot a)\, (s \cdot t)$ oder $s, \mathcal{A}\mathcal{C}\mathfrak{T}'\mathcal{C}'\mathcal{A}'\mathfrak{T} \;\overline{\wedge}\; s, \mathcal{A}'\mathcal{C}'\mathfrak{T}'\mathcal{C}\mathcal{A}\mathfrak{T}$, also involutorisch mit den Hauptpunkten $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ sein (vgl. § 11. Lehrsatz 45.). — Um die Aufgabe rechts zu lösen, construire man einen beliebigen Kegelschnitt K (am einfachsten einen Kreis), der durch den Scheitel S des Strahlbüschels $S, \alpha c c' \alpha'$ geht, und von α, c, c', α' bezüglich in A, C, C', A' geschnitten wird. Die Tangenten an diesen Punkten heißen a, c, c', a'. Im eingeschriebenen Viereck $ACC'A'$ bestimme man die Verbindungsgerade σ der Durchschnittspunkte der Gegenseiten $[(A - C) \cdot (A' - C')]$ und $[(A - C') \cdot (C - A')]$ und ihre Durchschnittspunkte T, T' mit K, und ziehe dann $(S - T)$, $(S - T')$, so sind dieß die Hauptstrahlen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$. Denn nach § 11. Lehrsatz 31. fällt auch $[(a \cdot a') - (c \cdot c')]$ in σ und $[(a \cdot c') - (c \cdot a')]$ fällt zusammen mit der Verbindungsgeraden der Durchschnittspunkte der Gegenseiten $[(A - A') \cdot (C - C')]$ und $[(A - C) \cdot (A' - C')]$, und $[(a \cdot c) - (a' \cdot c')]$ mit der Verbindungsgeraden von $[(A - A') \cdot (C - C')]$ und $[(A - C') \cdot (A' - C)]$. Es ist also $[(A - A') \cdot (C - C')]$ oder Σ der Pol von σ. Es liegen also die Curvenpunkte T, T' auf den von Σ an K gelegten Tangenten t, t'. Nach § 11. Lehrsatz 44. ist nun K für σ als Axe und Σ als Centrum sich selbst involutorisch collinear, also Strahlbüschel $A, (A - C)\, a\, (A - T')\, (A - A')\, (A - C')\, (A - T) \;\overline{\wedge}\; A', (A' - C')\, a'\, (A' - T')\, (A' - A)\, (A' - C)\, (A' - T)$, aber nach § 11. Lehrsatz 65. ist auch $A', (A' - C')\, a'\, (A' - T')\, (A' - A)\, (A' - C)\, (A' - T) \;\overline{\wedge}\; A, (A - C')$

(A − A′) (A − T′) a (A − C) (A − T). Es ist also A, (A − C) a (A − T′) (A − A′) (A − C′) (A − T) $\overline{\wedge}$ A, (A − C′) (A − A′) (A − T′) a (A − C) (A − T). Es entsteht demnach an A ein involutorischer Strahlbüschel mit den Hauptstrahlen (A − T), (A − T′). Nach § 11. Lehrsatz 65. ist nun auch Strahlbüschel S, (S − A) (S − C) (S − T′) (S − C′) (S − A′) (S − T) $\overline{\wedge}$ A, a (A − C) (A − T′) (A − C′) (A − A′) (A − T), und da A, a (A − C) (A − T′) (A − C′) (A − A′) (A − T) $\overline{\wedge}$ A, (A − A′) (A − C′) (A − T′) (A − C) a (A − T) ist, so muß auch S, (S − A) (S − C) (S − T′) (S − C′) (S − A′) (S − T) $\overline{\wedge}$ S, (S − A′) (S − C′) (S − T′) (S − C) (S − A) (S − T) oder $S_{,act'c'a't} \,\overline{\wedge}\, S_{,a'c't'cat}$ sein (vgl. § 11. Lehrsatz 45.). Es sind also t, t′ die Hauptstrahlen des involutorischen Strahlbüschels S. Man wird bemerken, daß die zu § 4. Aufgabe 23. rechts gegebene Lösung nur ein particulärer Fall dieser allgemeinen Lösung ist, indem dort für den Kegelschnitt K ein specieller, nämlich der Kreis, als einfachster, benutzt worden war, für den sich die Richtigkeit der Auflösung schon mit den aus der Elementar-Geometrie bekannten Mitteln beweisen läßt.

Aus dem Gesetze § 11. Lehrsatz 44. ergiebt sich sofort noch ein anderes. Es sei nämlich, Fig. 161. a., 161. b. K ein Kegelschnitt, p eine Gerade in seiner Ebene, und auf derselben die Punkte A, B, C, D gegeben. Suchen wir die Polaren a, b, c, d derselben, so müssen dieselben offenbar alle durch den Pol P von p gehen. Denn nach § 11. Lehrsatz 44. ist der Kegelschnitt K für P als Involutionscentrum und p als Involutionsaxe sich selbst involutorisch collinear, d. h. er ist in zwei involutorisch liegenden ebenen Systemen eine sich selbst homologe Curve. Da nun A, B, C, D, ... auf der Axe p liegen, so ist z. B. A ein sich selbst homologer Punkt beider involutorisch liegender Systeme, also muß, da ein Pol nur eine einzige Polare haben kann, die Polare a von A eine sich selbst homologe Gerade beider Systeme sein, nach § 13. Lehrsatz 26. Nach § 9. Lehrsatz 16. liegen aber zwei involutorische Systeme allemal perspectivisch, und nach § 8. Lehrsatz 3. giebt es in zwei perspectivisch liegenden ebenen Systemen außer der Collineationsaxe und den Collineationsstrahlen keine sich selbst homologe Gerade. Da nun die Polare von A nicht die Collineationsaxe, oder hier die Involutionsaxe sein kann, weil A nicht mit P zusammenfällt, so muß die Polare a von A ein Involutionsstrahl sein, d. h. durch das Involutionscentrum P gehen. Deßgleichen müssen die Polaren b, c, d .... von B, C, D .... und ebenso die Polaren a′, b′, c′, d′ .... von A′, B′, C′, D′ .... durch P gehen. Ist umgekehrt K ein Kegelschnitt, P ein Punkt, und sind a, b, c, d .... durch P gehende Gerade, so müssen ihre Pole A, B, C, D .... sämmtlich auf der Polaren p von P liegen. Denn nach § 11. Lehrsatz 44. ist K für p als Axe, P als Centrum sich selbst involutorisch collinear, also sind a, b, c, d .... Collineationsstrahlen, also ist jeder von ihnen, z. B. a sich selbst homolog. Folglich muß auch sein Pol A sich selbst homolog sein, nach § 13. Lehrsatz 26. Nach § 9. Lehr-

satz 16. liegen aber zwei involutorische Systeme auch allemal perspectivisch, und nach § 8. Lehrsatz 3. giebt es in perspectivisch liegenden Systemen außer dem Collineationscentrum und den Punkten der Collineationsaxe keinen sich selbst homologen. Da nun a nicht mit p zusammenfällt, so kann A nicht das Involutionscentrum sein, es muß demnach A ein Punkt der Involutionsaxe p sein, also auf p liegen. Ebenso müssen die Pole B, C, D, ... von b, c, d, ..., und die Pole A', B', C', D', ... von a', b', c', d', ... auf p sich befinden. Es lassen sich diese Beziehungen übrigens auch leicht, wenn auch umständlicher, mit Hülfe der in Erklärung 1. dieses Paragraphen angezogenen Sätze beweisen. Man erhält demnach den

6. Lehrsatz. Liegen mehrere Punkte A, B, C, D, A', B', C', D' .... in der Ebene eines Kegelschnittes K auf einer und derselben Geraden p, so gehen ihre Polaren a, b, c, d, a', b', c', d', ... sämmtlich durch einen und denselben Punkt P derselben Ebene, nämlich durch den Pol der Geraden p. Fig. 161. a., 161. b.

6. Lehrsatz. Gehen mehrere Gerade a, b, c, d, a', b', c', d', ... in der Ebene eines Kegelschnittes K durch einen und denselben Punkt P, so liegen ihre Pole A, B, C, D, A', B', C', D', ... sämmtlich auf einer und derselben Geraden p derselben Ebene, nämlich auf der Polaren des Punktes P. Fig. 161. a, 161. b.

7. Erklärung. Diese Eigenschaft der Kegelschnitte wird mit dem Namen: „**Reciprocität der Kegelschnitte**" bezeichnet.

Es seien nun, Fig. 161. a., Fig. 161. b., a, b, c, d die Polaren von den auf derselben Geraden p liegenden Punkten A, B, C, D; sie schneiden dieselbe in A', B', C', D'. Nach § 11. Lehrsatz 44. sind nun A und A'; B und B'; C und C'; D und D' entsprechende Punkte der auf der Involutionsaxe p erzeugten Involution. Es ist also Punktreihe p,ABCDD'C'B'A' oder p,ABCDA'B'C'D' involutorisch, also Punktreihe p,ABCD $\overline{\wedge}$ p,A'B'C'D'; also ist auch Punktreihe p,ABCD $\overline{\wedge}$ Strahlbüschel P,abcd, und Punktreihe p,A'B'C'D' $\overline{\wedge}$ Strahlbüschel P,a'b'c'd' und ebenso ist Punktreihe p,ABCDA'B'C'D' $\overline{\wedge}$ Strahlbüschel P,abcda'b'c'd'. Umgekehrt, sind A, B, C, D die Pole der durch P gehenden Geraden a, b, c, d, so sind nach § 11. Lehrsatz 44. a, a'; b, b'; c, c'; d, d' entsprechende Strahlen der am Involutionscentrum P entstehenden Involution. Es ist also Strahlbüschel P,abcdd'c'b'a' oder P,abcda'b'c'd' involutorisch; also Strahlbüschel P,abcd $\overline{\wedge}$ P,a'b'c'd'; also auch Strahlbüschel P,abcd $\overline{\wedge}$ Punktreihe p,ABCD und Strahlbüschel P,a'b'c'd' $\overline{\wedge}$ Punktreihe p,A'B'C'D' und ebenso ist Strahlbüschel P,abcda'b'c'd' $\overline{\wedge}$ Punktreihe p,ABCDA'B'C'D'. Man hat also den

8. Lehrsatz. Liegen in der Ebene eines Kegelschnittes

8. Lehrsatz. Gehen in der Ebene eines Kegelschnittes

K die Punkte A, B, C, D .... oder A′, B′, C′, D′ .... oder A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ .... auf einer und derselben Geraden p, und sind bezüglich a, b, c, d, ... oder a′, b′, c′, d′, ... oder a, b, c, d, a′, b′, c′, d′, ... ihre durch einen und denselben Punkt P gehenden Polaren, so ist allemal Punktreihe p,ABCD $\overline{\wedge}$ Strahlbüschel P,abcd; Punktreihe p, A′B′C′D′ $\overline{\wedge}$ Strahlbüschel P, a′b′c′d′; Punktreihe p,ABCD A′B′C′D′ $\overline{\wedge}$ Strahlbüschel P, abcda′b′c′d′. Fig 161. a; 161. b.

K die Geraden a, b, c, d, ... oder a′, b′, c′, d′, ... oder a, b, c, d, a′, b′, c′, d′, ... durch einen und denselben Punkt P, und sind bezüglich A, B, C, D, ... oder A′, B′, C′, D′, ... oder A, B, C, D, A′, B′, C′, D′, ... ihre auf einer und derselben Geraden p liegenden Pole, so ist allemal Strahlbüschel P,abcd $\overline{\wedge}$ Punktreihe p,ABCD; Strahlbüschel P,a′b′c′d′ $\overline{\wedge}$ Punktreihe p,A′B′C′D′; Strahlbüschel P,abcda′b′c′d′ $\overline{\wedge}$ Punktreihe p,ABCDA′B′C′D′. Fig. 161. a; 161. b.

Dieses Verhalten führt, verglichen mit dem in § 7. Lehrsatz 9. von collinearen Systemen ausgesprochenen, auf den Gedanken, zwei ebene Systeme zu construiren, in denen nicht, wie bei collinearen, jedem Punkt des einen ein Punkt des anderen, jeder Geraden des einen eine Gerade des anderen homolog ist, sondern in denen jedem Punkt A, B, ... A′, B′, ... des einen eine Gerade a, b, ... a′, b′, ... des anderen, und jeder Geraden a, b, ..., a′, b′, ... des einen ein Punkt A, B, ... A′, B′, ... des anderen entspricht, nämlich jedem Pol in dem einen seine Polare in dem anderen System und jeder Polaren in dem einen ihr Pol in dem anderen System. Man kann dann eine ähnliche Reihe von Sätzen, wie in § 7. Lehrsatz 1. bis 15. entwickelt worden ist, aufstellen. Der dortige Lehrsatz 13. ist sofort auch hier gültig, der oben aufgestellte Lehrsatz 8. entspricht dem Lehrsatz 14. in § 7. u. s. w. Da also jedem Pol in dem einen seine Polare im anderen System, und umgekehrt, entspricht, so definirt man im Hinblick auf Erklärung 7.:

9. Erklärung. Zwei ebene Systeme, in denen jedem Punkt des einen eine Gerade im anderen, und jeder Geraden in dem einen ein Punkt in dem anderen entspricht, heißen: „ebene **Polar-Systeme**", oder auch wohl: „ebene **reciproke Systeme**". Von zwei ebenen Systemen festsetzen, daß jedem Punkt des einen eine Gerade im anderen, und umgekehrt, entsprechen soll, heißt, die ebenen Systeme **reciprok** auf einander beziehen.

Auch wendet man hier nicht mehr den bei collinearen Systemen üblichen Ausdruck „homolog" (s. § 7. Erklärung 8.) an, sondern man sagt, mit Rücksicht auf § 11. Lehrsatz 49., Analoges mit gleichen Namen bezeichnend:

10. Erklärung. In zwei Polar- oder reciproken Systemen heißen jeder Punkt des einen und die ihm entsprechende Gerade im anderen System: **conjugirte Elemente** der Systeme; der Punkt heißt „der Geraden", die Gerade „dem Punkte" conjugirt.

Man wird übrigens leicht übersehen, daß die Polaritäts- und Reciprocitäts-Gesetze nur eine nothwendige Folge aus dem Dualismus sind, der sich vom Anfang an zwischen „Punkt" und „Gerade", „Punktreihe" und „Strahlbüschel", „Verbindungsgerade" und „Durchschnittspunkt", „Curvenpunkt" und „Berührungsgerade" oder Tangente, „Verbindungsgerade der Gegenecken" oder Diagonale und „Durchschnittspunkt der Gegenseiten" geltend gemacht hat. Es spricht das Gesetz der Polarität und Reciprocität diese Verhältnisse nur kurz aus, und weist ihren Ursprung nach. Wir sind also somit gewissermaßen wieder auf den Anfang unserer Untersuchung zurückgekommen.

Es wäre hiermit zwar dieselbe eigentlich abgeschlossen; doch sollen im Folgenden noch einige der mit Hülfe der in den vorigen drei Kapiteln entwickelten Begriffe und Gesetze sich ergebenden Eigenschaften der einzelnen Kegelschnitte abgeleitet werden, theils wegen der großen Wichtigkeit dieser Curven, theils, weil manche Sätze, die sonst nur schwierig zu beweisen sein dürften, sich aus dem Bisherigen mit überraschender Leichtigkeit ergeben.

Kap. IV.

Eigenschaften der Kegelschnitte im Einzelnen.

§ 15.

Der Kreis.

Nach § 13. Lehrsatz 20. lassen sich jede zwei beliebigen Kreise ähnlich auf einander beziehen. Aehnliche Systeme aber lassen sich nach § 8. Lehrsatz 49. allemal in perspectivische Lage bringen nach § 8. Aufgabe 50. Es lassen sich also zwei beliebige Kreise stets in perspectivische Lage bringen, ja sie können stets, sobald sie nur in derselben Ebene liegen, als homologe Curven ähnlicher perspectivisch liegender Systeme angesehen werden. Stellt man nämlich die

1. Aufgabe. Zwei in derselben Ebene gelegene Kreise, K, K' ähnlich auf einander zu beziehen, so daß beide sich zugleich in perspectivischer Lage befinden,

so hat man sofort die

Auflösung. Man ziehe in dem einen Kreise Fig. 162., z. B. in K drei beliebige Halbmesser MA, MB, MC, und in K' drei parallele Halbmesser M'A' || MA, M'B' || MB, M'C' || MC, und verbinde ihre Endpunkte durch die Geraden AB, AC, BC; A'B', A'C', B'C'; so ist $\angle B'M'C' = \angle BMC$, $\angle A'M'C' = \angle AMC$, $\angle A'M'B' = \angle AMB$, also auch die drei Peripheriewinkel $\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle B$, $\angle C' = \angle C$. Also ist $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. Also sind nach § 13. Lehrsatz 20. die beiden Kreise ähnlich auf einander bezogen. Da zugleich A'M' || AM, B'M' || BM war, so ist auch A'B' || AB, ebenso ist A'C' || AC, B'C' || BC. Es liegen also nach § 8. Lehrsatz 48. beide Systeme zugleich perspectivisch. Es schneiden sich also (A'—A), (B'—B) (C'—C) in einem und demselben Punkte, nämlich im Aehnlichkeitscentrum Σ. Nach § 13. Lehrsatz 25. sind nun auch die Mittelpunkte M, M' homologe Punkte der ähnlichen Systeme, es geht also auch (M'—M) durch das Aehnlichkeitscentrum Σ, oder: Σ liegt auf der Centralen (M'—M). Zugleich bemerkt man, daß man zwei verzeichnet vorliegende Kreise stets auf zweifache Weise ähnlich auf einander beziehen kann. Man kann nämlich die Radien M'A', M'B', M'C' entweder je auf derselben Seite der Centrallinie (M'—M) ziehen, in welchem Falle man das Aehnlichkeitscentrum Σ erhält, man kann aber auch M'A', M'B', M'C' je auf der entgegengesetzten Seite der Centrallinie (M'—M) verzeichnen, als auf welcher die ihnen parallelen Halbmesser MA, MB, MC, des Kreises K sich befinden. Dann erhält man das Aehnlichkeitscentrum Σ'. Da nach § 8. Lehrsatz 38. in ähnlichen Systemen jede zwei von homologen Punkten begrenzte Strecken ein und dasselbe Verhältniß haben, so erhält man zwei homologe Punkte Q, Q' der ähnlichen Systeme, indem man auf einem Paare homologer Geraden, z. B. auf (M—A), (M—A') zwei solche Punkte Q, Q' annimmt, daß sich verhält M'Q' : MQ = M'A' : MA. Dann also sind Q, Q' homologe Punkte, und also geht nach § 8. Lehrsatz 4. (Q—Q') durch das Aehnlichkeitscentrum Σ oder Σ'. Offenbar gilt diese, eben angegebene Methode, ein Paar Kreise perspectivisch ähnlich auf einander zu beziehen, in allen Fällen, wie dieselben auch liegen mögen. Es können nämlich fünf verschiedene Lagen statt haben, denn es können K und K' I. einer ganz außerhalb des anderen (Fig. 162.), II. einer den anderen von außen berührend, III. einer theilweise innerhalb des anderen, so daß sie eine Sehne gemein haben, IV. einer den anderen von innen berührend, V. einer ganz innerhalb des anderen liegen. Die speciellen Fälle II. und IV. sollen im Folgenden nicht weiter berücksichtigt werden*).

Wir hatten nun in § 8. den Fall der Affinität aus dem der

---

*) Man überzeugt sich dann leicht, daß der Berührungspunkt der beiden Kreise im Fall II. das innere, im Fall IV. das äußere Aehnlichkeitscentrum ist. Uebrigens wird es auch hier gut sein, die Fälle III. und V. zu construiren, und sich zu überzeugen, daß das im Text im Falle I. Bewiesene auch bei ihnen genau dasselbe bleibt.

perspectivischen Collineation abgeleitet, indem wir das Collineationscentrum, den Fall der Aehnlichkeit, indem wir die Collineationsaxe in das Unendliche rücken ließen, und hatten nachgewiesen, daß zwei ähnliche Systeme sich stets in perspectivische Lage bringen lassen, indem man ein Paar homologer Dreiecke so legt, daß ihre homologen Seiten parallel sind. In perspectivisch collinearen Systemen aber schneiden sich jede zwei homologen Geraden auf der Collineationsaxe; liegen also zwei Paar homologer Gerader, z. B. (M′ − A′) und (M − A), (M′ − B′) und (M − B) parallel, ihre Durchschnittspunkte also auf einer unendlich entfernten Geraden, so muß der Durchschnittspunkt auch jedes anderen Paares homologer Gerader im Unendlichen liegen, d. h. sie müssen parallel sein (vgl. § 8. Erklärung 44.). Man erhält also aus dem Bisherigen den:

2. Lehrsatz. Werden in zwei, in derselben Ebene liegenden, Kreisen K, K′ parallele Radien gezogen und ihre Endpunkte A, A′; B, B′; u. s. w. oder solche Punkte Q, Q′, 𝔔, 𝔔′ auf ihnen, deren Entfernungen vom Mittelpunkte M′Q′, MQ, sich verhalten wie die Radien der Kreise, durch Gerade mit einander verbunden; so schneiden sich diese Geraden alle in demselben Punkte. Solcher Punkte giebt es zwei, Σ, Σ′, je nachdem die Radien auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Centrallinie gezogen werden. Und umgekehrt:

Werden von einem der beiden Punkte Σ, Σ′ beliebige Gerade gezogen durch die beiden Kreise, und diejenigen Durchschnittspunkte A, A′, die den Punkten Σ, Σ′ zugleich die näheren, oder zugleich die entfernteren sind, durch Gerade mit den Mittelpunkten M, M′ verbunden, so sind diese Radien MA, M′A′ parallel.

Es gelten diese Sätze natürlich auch, wenn man Q, Q′ nicht gerade auf zwei Halbmessern, sondern auch auf einem anderen Paar homologer Gerader in den ähnlichen Systemen wählt, und die Umkehrung auch, wenn man in den ähnlichen Systemen den Durchschnittspunkt eines Aehnlichkeitsstrahles mit einem Paar homologer Gerader sucht, und diesen Durchschnittspunkt mit einem anderen Paar homologer Punkte verbindet; es sind z. B. auch (Q′ − B′) und (Q − B), (Q′ − C′) und (Q − C), ferner (Q′ − 𝔔′) und (Q − 𝔔) u. s. w. parallel; es sollen jedoch, da uns hier das System als solches nur Mittel, die Betrachtung der Curve Hauptsache und Zweck ist, nur die sich unmittelbar auf letztere beziehenden Gesetze aufgestellt werden, welche über ihre Natur Aufschlüsse herbeiführen. Die übrigen Beziehungen sind bereits im zweiten Kapitel behandelt, und sollen daher als bekannt vorausgesetzt werden.

Daß es für jede zwei Kreise zwei Aehnlichkeitscentra geben muß, und daß es deren nicht mehr geben kann, erhellt sofort aus § 13. Lehr-

satz 29., denn die perspectivische Aehnlichkeit ist nur ein specieller Fall der perspectivischen Collineation. Wir sehen also aus § 13. Lehrsatz 29., daß, wenn zwei Kreise für ein Collineationscentrum Σ und eine unendlich entfernte Axe σ perspectivisch, also in perspectivisch ähnlicher Lage für das Aehnlichkeitscentrum Σ liegen, sie sich auch allemal noch für ein zweites Centrum Σ' und dieselbe Axe σ in perspectivischer Lage befinden, daß es also dann noch ein zweites Aehnlichkeitscentrum Σ' geben muß, aber auch sonst keines. Ferner wissen wir aus § 13. Lehrsatz 29., daß die Kreise auch noch für eine andere Axe σ' und sowohl Σ als Σ' als Collineationscentrum in perspectivischer Lage sich befinden müssen.

Wir untersuchen zunächst die beiden Aehnlichkeitscentra Σ, Σ', in Bezug auf ihre Lage. Daß beide auf der Centrallinie $(M' - M)$ sich befinden müssen, ist schon erwähnt worden. In dem mehr erwähnten § 13. Lehrsatz 29. sahen wir nun, daß, wenn die perspectivische Collineation für ein System von Centrum und Axe, z. B. für Σ, σ, entgegengesetzt war, die perspectivische Collineation für dieselbe Axe σ und das zweite Centrum einstimmig war, und umgekehrt. Um unsere jetzige Fig. 162. mit der früheren, Fig. 159. vollständig in Uebereinstimmung zu bringen, wollen wir die unendlich entfernte Aehnlichkeitsaxe mit σ' bezeichnen. Denn offenbar ist dann hier, wie dort die Collineation für das System Σ, σ' einstimmig, weil die Punktreihen auf dem Aehnlichkeitsstrahl $(M' - M)$ oder m, also $m, \Sigma \mathfrak{A} M \infty$ und $m, \Sigma \mathfrak{A}' M' \infty$ einstimmig, die Punktreihen $m, \Sigma' \mathfrak{A} M \infty$ und $m, \Sigma' \mathfrak{A}' M' \infty$ entgegengesetzt verlaufen. Da nun nach § 13. Lehrsatz 29., wenn die Collineation für das eine Centrum einstimmig ist, die für das andere nothwendig entgegengesetzt sein muß, so folgt, daß das eine Aehnlichkeitscentrum, hier Σ, allemal auf der Strecke $M \infty M'$, das andere, Σ', auf der Strecke MM' sich befinden muß. Man erhält also den

3. Lehrsatz. Liegen zwei Kreise K, K' in einer und derselben Ebene, so haben sie allemal zwei, aber auch nur zwei, Aehnlichkeitscentra, Σ, Σ'.

Beide Aehnlichkeitscentra liegen auf der Centrallinie $(M' - M)$ oder m der beiden Kreise.

Das eine Aehnlichkeitscentrum liegt allemal auf der Strecke $M \infty M'$, das andere auf der Strecke MM', wenn M, M' die Mittelpunkte der beiden Kreise bezeichnen. Fig. 162.

Daß, wenn die beiden Kreise K, K' ganz außerhalb einander liegen, sowohl Σ, als Σ' außerhalb K und K' sich befinden müssen, ist schon oben erörtert worden, da, wenn einer innerhalb des einen Kreises und außerhalb des anderen läge, vom Centrum aus an letzteren Tangenten gelegt werden könnten, und an den ersteren nicht. Ebenso wenig kann, wenn von den beiden Kreisen der eine ganz innerhalb des anderen liegt, ein Centrum außer beiden liegen, denn sonst müßten die von ihm an den einen gelegten Tangenten auch den anderen berühren, was unmöglich ist, da der eine innerhalb des anderen liegt. Deßgleichen

kann in diesem Falle kein Centrum außerhalb des kleineren, und innerhalb des größeren sich befinden, denn sonst ließen sich an ersteren Tangenten legen, an letzteren aber nicht. Liegen K, K′ zum Theil inner-, zum Theil außerhalb einander, so muß Σ außerhalb beider, Σ′ auf der Strecke MM′ liegen, und zwar kann letzteres nur auf der Strecke der Centrallinie liegen, welche ein Theil des Halbmessers sowohl des einen, als des anderen Kreises ist, muß also sowohl innerhalb K, als innerhalb K′ sich befinden. Die letzte Abtheilung des Lehrsatzes 3. bedingt nun die Unterscheidung der beiden Centra durch besondere Namen; nämlich:

4. Erklärung. Dasjenige Aehnlichkeitscentrum Σ zweier Kreise, welches auf der Strecke M∞M′ liegt, heißt stets „das äußere"; dasjenige Centrum Σ′, welches auf der Strecke MM′ sich befindet, heißt „das innere Aehnlichkeitscentrum".

Stellen wir uns nun die

5. Aufgabe. Gegeben zwei Kreise K und K′ in derselben Ebene; gesucht die beiden Aehnlichkeitscentra derselben. Fig. 162.

so ergiebt sich sofort aus Lehrsatz 2. und 3. die

Auflösung. Man ziehe in K und K′ zwei beliebige, parallele Radien MA, M′A′ und ziehe die Gerade (A′ − A), welche ihre Endpunkte verbindet; so schneidet dieselbe die Centrallinie (M′ − M) im äußeren oder inneren Aehnlichkeitscentrum, je nachdem man MA, M′A′ auf denselben oder auf verschiedenen Seiten der Centrallinie angenommen hat.

Nach § 13. Lehrsatz 31. wird die von den Polen der Aehnlichkeitsaxe σ′ in K und K′ eingeschlossene Strecke von Σ und Σ′ harmonisch getheilt. Es liegen ferner nach § 13. Lehrsatz 31. die Pole von σ′ auf der Geraden (Σ − Σ′) oder (M′ − M). Da nun σ′ sich im Unendlichen befindet, so muß der Pol, bezüglich 𝔓, 𝔓′, dieser Aehnlichkeitsaxe in den Mittelpunkt M des Kreises K, und in den Mittelpunkt M′ des Kreises K′ fallen. Es wird also die Strecke MM′ von Σ und Σ′ harmonisch getheilt. Dieß läßt sich auch direkt nachweisen. Denn, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ΣMA, ΣM′A′ verhält sich, Fig. 162. M′Σ : MΣ = M′A′ : MA und M′Σ′ : MΣ′ = M′A′ : MA. Es verhält sich also, da MA′ und MA in beiden Figuren Radien desselben Kreises sind, und also in beiden Gleichungen M′A′ : MA denselben Werth hat, M′Σ : MΣ = M′Σ′ : MΣ′. Man sieht also:

6. Lehrsatz. Die Strecke zwischen den Mittelpunkten M, M′ zweier in derselben Ebene liegender Kreise K, K′ wird von den beiden Aehnlichkeitscentren Σ, Σ′ harmonisch getheilt.

Um uns ferner Aufschlüsse über die andere Axe σ zu verschaffen, haben wir zunächst nach § 13. Lehrsatz 31. zu bedenken, daß die Polaren, sowohl von Σ als von Σ', also p, p'; $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ sich im Durchschnittspunkt der beiden Axen σ und σ' schneiden. Da nun σ' im Unendlichen liegt, so folgt, daß auch ihr Durchschnittspunkt mit σ, und also auch, daß die Durchschnittspunkte $(p \cdot p')$ und $(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}')$ im Unendlichen liegen; es ist also $p' \parallel p$; $\mathfrak{p}' \parallel \mathfrak{p}$. Dieß folgt auch schon aus § 13. Lehrsatz 26., indem p' und p; $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}$ homologe Gerade der ähnlichen Systeme, und also, da sie sich auf der unendlich entfernten Aehnlichkeitsaxe σ' schneiden müssen, parallel sind. Da sich ferner die Tangenten in F, $\mathfrak{F}$, am Kreise K, sowie die Tangenten F', $\mathfrak{F}'$ Fig. 163. an K' auf der Polaren p, p', des Punktes Σ, schneiden müssen, alle Tangenten am Kreise aber senkrecht zum Radius sind, so ist $f \perp m$, $\mathfrak{f} \perp m$, $f' \perp m$, $\mathfrak{f}' \perp m$; es muß also auch, da sie sich im Unendlichen schneiden, weil sie parallel sind, und zugleich $(f \cdot \mathfrak{f})$ auf p, $(f' \cdot \mathfrak{f}')$ auf p' liegen soll, p und $p' \perp m$ sein. Ebenso müssen sich f und $\mathfrak{f}$; f' und $\mathfrak{f}'$ auf den Polaren $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ von Σ' schneiden; es müssen also auch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ senkrecht auf m stehen. Man erhält also den

7. Lehrsatz. Liegen zwei Kreise K, K' in derselben Ebene, so sind die Polaren p, p' des äußeren Aehnlichkeitscentrums Σ, sowie die Polaren $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ des inneren Aehnlichkeitscentrums einander parallel, nämlich $p \parallel p'$ und $\mathfrak{p} \parallel \mathfrak{p}'$. Zugleich stehen p, p', $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$, senkrecht auf der Centrallinie. Fig. 162., Fig. 163.

Die zweite Axe σ muß nun nach § 13. Lehrsatz 31. so beschaffen sein, daß Strahlbüschel $(\sigma \cdot \sigma')$, $\sigma' p \sigma p'$ und $(\sigma \cdot \sigma')$, $\sigma' \mathfrak{p} \sigma \mathfrak{p}'$ harmonisch ist. Es müssen also diese Strahlbüschel auf der Centrallinie $(\Sigma - \Sigma')$ eine harmonische Punktreihe erzeugen. Da aber σ' im Unendlichen liegt, so schneidet sie die m im Unendlichen; es muß also σ den von p und p' erzeugten Abschnitt RR', sowie den von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ gebildeten Abschnitt $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ halbiren. Und da ferner σ durch den Durchschnittspunkt $(p \cdot p')$ und $(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}')$ gehen muß, und beide im Unendlichen liegen, so muß $\sigma \parallel p \parallel p' \parallel \mathfrak{p} \parallel \mathfrak{p}'$ sein. Es läßt sich dieß auch direkt zeigen. Denn ziehen wir, Fig. 163. an die für das System Σ, σ' homologen Punkte A, A' der Peripherie der Kreise die Tangenten a, a' und an den zweiten Durchschnittspunkt $\mathfrak{A}'$ des Aehnlichkeitsstrahls $(A - A')$ mit einem derselben, z. B. mit K' die Tangente α', ziehen wir ferner die Geraden $(A - F)$, $(A - B)$, $(A - \mathfrak{F})$, $(A' - F')$, $(A' - B')$, $(A' - \mathfrak{F}')$ u. s. w., so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $AF\mathfrak{A}$ und $A'F'\mathfrak{A}'$, $A\mathfrak{A}\mathfrak{F}$ und $A'\mathfrak{A}'\mathfrak{F}'$ u. s. w., und weil jedes Paar solcher Punkte aus homologen in ähnlichen Systemen besteht:

Strahlbüschel $A, a\,(A - \mathfrak{A})\,(A - \mathfrak{F})\,(A - \mathfrak{B})\,(A - B)\,(A - F) =$
Strahlbüschel $A', a'\,(A' - \mathfrak{A}')\,(A' - \mathfrak{F}')\,(A' - \mathfrak{B}')\,(A' - B')\,(A' - F')$.

Da aber K' auch sich selbst involutorisch collinear ist, so ist auch:

Strahlbüschel $A', a' (A'-\mathfrak{A}') (A'-\mathfrak{F}') (A'-\mathfrak{B}') (A'-B') (A'-F') \barwedge$
Strahlbüschel $\mathfrak{A}', \alpha' (\mathfrak{A}'-A') (\mathfrak{A}'-F') (\mathfrak{A}'-B') (\mathfrak{A}'-\mathfrak{B}') (\mathfrak{A}'-\mathfrak{F}')$.
Es ist also auch:

Strahlbüschel $A, a (A-\mathfrak{A}) (A-\mathfrak{F}) (A-\mathfrak{B}) (A-B) (A-F) \barwedge$

Strahlbüschel $\mathfrak{A}', \alpha' (\mathfrak{A}'-A') (\mathfrak{A}'-F') (\mathfrak{A}'-B') (\mathfrak{A}'-\mathfrak{B}') (\mathfrak{A}'-\mathfrak{F}')$

und zwar liegen sie, da sie mit einem Paar entsprechender Strahlen $(A-\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A}'-A')$ zusammenfallen, perspectivisch, und jedes Paar entsprechender Strahlen schneidet sich auf der zweiten Axe σ; auf dieser liegen aber auch nach § 13. Lehrsatz 30. die Durchschnittspunkte $(f \cdot \mathfrak{f}')$, $(\mathfrak{f} \cdot f')$ der für diese Axe homologen Tangenten $f, \mathfrak{f}'; \mathfrak{f}, f'$ (in Fig. 156. $e, f'; f, e'$). Nun ist $f \parallel \mathfrak{f} \parallel \mathfrak{p}$; $\mathfrak{f}' \parallel f' \parallel \mathfrak{p}'$; also da $\mathfrak{p} \parallel \mathfrak{p}'$ ist, so ist $f \parallel \mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f} \parallel f'$. Es muß also auch $\sigma \parallel \mathfrak{p} \parallel \mathfrak{p}'$ sein. Es sind ferner für das System Σ, σ die Tangenten a und α'; α und a' homolog, also liegt auch $(a \cdot \alpha')$ und $(\alpha \cdot a')$ auf σ (nach § 13. Lehrsatz 30). Da aber a und a', α und α' homologe Gerade in den ähnlichen Systemen mit dem Centrum Σ sind, so ist $a' \parallel a$, $\alpha' \parallel \alpha$. Zugleich sind also $(a \cdot \alpha)$ und $(a' \cdot \alpha')$ ein Paar homologer Punkte in demselben System, sie liegen also auf einem Aehnlichkeitsstrahl. Es ist also das Viereck CEDE' ein Parallelogramm und die zweite Axe σ und der Aehnlichkeitsstrahl $(E-E')$ seine Diagonalen. In einem Parallelogramm halbiren sich aber die Diagonalen, also wird die Strecke EE' von σ in S halbirt. Da nun auch $p \parallel p' \parallel \mathfrak{p} \parallel \mathfrak{p}'$ ist, weil sich p und p', $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ im unendlich entfernten Durchschnittspunkt $(\sigma \cdot \sigma')$ der σ mit σ' schneiden nach § 13. Lehrsatz 31., so ist auch $\sigma \parallel p \parallel p'$. Es verhält sich also auf irgend einem Aehnlichkeitsstrahl, z. B. auf $(E-A-A')$ $OQ : O'Q = ES : E'S$. Da nun $ES = E'S$ ist, so muß auch $OQ = O'Q$ sein. Es wird also auf irgend einem beliebigen Aehnlichkeitsstrahl die von den Polaren des Aehnlichkeitscentrums Σ abgeschnittene Strecke OO' von der zweiten Axe σ in Q halbirt. Ebenso läßt sich zeigen, daß auch die von den Polaren $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ des Centrums Σ' abgeschnittene Strecke $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$ auf jedem Aehnlichkeitsstrahl halbirt wird. Man erhält also, da $\sigma \parallel p \parallel p' \parallel \mathfrak{p} \parallel \mathfrak{p}'$ und also $\perp (M-M')$ ist, nach § 13. Lehrsatz 29. den

8. Lehrsatz. Liegen zwei Kreise K, K' in derselben Ebene, so befinden sie sich stets für die beiden Aehnlichkeitscentra Σ, Σ' als Collineationscentra, und eine, aber nur eine einzige, in endlicher Entfernung liegende Gerade σ als Collineationsaxe, in perspectivischer Collineation. Dieselbe ist entgegengesetzt für das äußere Aehnlichkeitscentrum Σ als Collineationscentrum, einstimmig für das innere Aehnlichkeitscentrum Σ' als Collineationscentrum. Fig. 163.

und

9. Lehrsatz. Die in endlicher Entfernung liegende Collineationsaxe σ steht stets senkrecht auf der Central-

linie und halbirt die von den Polaren p, p'; $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ der beiden Aehnlichkeitscentra auf allen Aehnlichkeitsstrahlen abgeschnittenen Strecken OO'; $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$ u. s. w., und ist parallel den Polaren $p, p', \mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ der beiden Aehnlichkeitscentra. Fig. 163.

Liegen die Kreise einer ganz außerhalb des anderen, so kann auch die Collineationsaxe σ keinen von ihnen schneiden, da auf ihr lauter sich selbst homologe Punkte liegen, und also, wenn sie einen Kreis schnitte, dieser Durchschnittspunkt zugleich ihr Durchschnittspunkt mit dem anderen sein müßte, was in dem angenommenen Falle unmöglich ist. Ebenso wenig kann σ, wenn von K, K' der eine Kreis ganz innerhalb des anderen liegt, einen von ihnen schneiden, denn es ist dann unmöglich, daß sie in demselben Punkte von dem anderen Kreis geschnitten werde. Liegen aber beide Kreise theilweise in einander, so muß nach § 13. Lehrsatz 33., wenn man sich in Fig. 160. unter den beiden Kegelschnitten zwei Kreise vorstellt, die gemeinschaftliche Secante $(M - N)$ oder $(M' - N')$ die Collineationsaxe sein*). Was die Aufsuchung der Axe σ nach § 13. Lehrsatz 30. rechts betrifft, so mag an das schon oben bemerkte erinnert werden, daß die Pole $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ der Axe σ' mit den Mittelpunkten M, M' der Kreise K, K' zusammenfallen (vgl. Fig. 164.).

Es seien nun, Fig. 164., $A, \mathfrak{A}'$ ein Paar im System Σ, σ homologe Punkte der Peripherien der Kreise, also $(A - \mathfrak{A}')$ oder α ein Aehnlichkeitsstrahl, a die Tangente an A, α' die an $\mathfrak{A}'$, α die an $\mathfrak{A}$, a' die an A', und vom Durchschnittspunkt $(a \cdot \alpha')$ oder T seien noch zwei Tangenten, $\mathfrak{c}$ an K, c' an K' gelegt, so ist $a' \parallel a$, $\alpha' \parallel \alpha$, weil sie homologe Gerade in den ähnlichen Systemen Σ, σ' sind. Es ist also $\angle a\alpha = \angle a'\alpha$. Da aber a' und α' Tangenten von E' an den Kreis K' sind, so ist $E'A' = E'\mathfrak{A}'$, also $\triangle A'E'\mathfrak{A}'$ gleichschenklig, also auch $\angle \alpha'\alpha = \angle a'\alpha$; folglich ist $\angle a\alpha = \angle \alpha'\alpha$, also auch $\triangle AT\mathfrak{A}'$ gleichschenklig, also $TA = T\mathfrak{A}'$. Nun ist $TA = T\mathfrak{C}$ als Tangenten an K, $TC' = T\mathfrak{A}'$ als Tangenten an K'. Es ist also $TA = T\mathfrak{C} = T\mathfrak{A}' = TC'$. Man hat also den

10. Lehrsatz. Die von einem Punkte T der im Endlichen liegenden Collineationsaxe σ zweier Kreise an dieselben gelegten vier Tangenten sind alle von gleicher Länge, $TA = T\mathfrak{C}' = T\mathfrak{A}' = TC'$. Fig. 164.

Es war also $\angle a\alpha = \angle \alpha'\alpha$; ebenso läßt sich nun auch zeigen, daß auch $\angle c\gamma = \angle c'\gamma$ ist. Denn es ist $c' \parallel c$, $\mathfrak{c}' \parallel \mathfrak{c}$, also $\angle c\gamma = \angle \mathfrak{c}'\gamma$, ferner ist $F'\mathfrak{C}' = F'C'$, also $\triangle C'F'\mathfrak{C}'$ gleichschenklig, folglich $\angle \mathfrak{c}'\gamma = \angle c'\gamma$, also $\angle c\gamma = \angle c'\gamma$. Ferner ist auch wegen der Aehnlichkeit Fig. 163. $(A' - \mathfrak{B}') \parallel (A - \mathfrak{B})$, und $(\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}') \parallel (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$, also $\angle \Sigma\mathfrak{B}'A' = \angle \Sigma\mathfrak{B}A$, oder $\angle B'\mathfrak{B}'A' = \angle \Sigma\mathfrak{B}A$. Es ist aber $\angle B'\mathfrak{B}'A' = \angle B'\mathfrak{A}'A'$

*) Berührt ein Kreis den andern, sei es von außen oder von innen, so ist allemal die im Berührungspunkt gemeinschaftliche Tangente die Collineationsaxe σ.

$= \angle B'\mathfrak{A}'\Sigma$ als Peripheriewinkel, also ist auch $\angle B'\mathfrak{A}'\Sigma = \angle \Sigma\mathfrak{B}A$ oder $\angle \Sigma\mathfrak{A}'B' = \angle \Sigma\mathfrak{B}A$. Da ferner auch $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \parallel (\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}')$ und $(\mathfrak{A}' - B') \parallel (\mathfrak{A} - B)$ ist, so ist auch $\angle \Sigma\mathfrak{A}'B' = \angle \Sigma\mathfrak{A}B$, oder $\angle A'\mathfrak{A}'B' = \angle \Sigma\mathfrak{A}B$. Nun ist $\angle A'\mathfrak{A}'B' = \angle A'\mathfrak{B}'B' = \angle A'\mathfrak{B}'\Sigma = \angle \Sigma\mathfrak{B}'A'$, also auch $\angle \Sigma\mathfrak{B}'A' = \angle \Sigma\mathfrak{A}B$. Wir haben also $\angle a\alpha = \angle \mathfrak{a}'\alpha$; $\angle \mathfrak{c}\gamma = \angle c'\gamma$ Fig. 164., $\angle \Sigma\mathfrak{A}'B' = \angle \Sigma\mathfrak{B}A$; $\angle \Sigma\mathfrak{B}'A' = \angle \Sigma\mathfrak{A}B$. Fig. 163., oder den

11. **Lehrsatz.** Liegen zwei Kreise K, K' für das Centrum Σ (oder Σ') und die Axe σ perspectivisch und sind A und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ und B' zwei beliebige Paare in diesem Systeme Σ, σ (oder Σ', σ) homologer Punkte der Peripherien, $\mathfrak{A}$ und A', B und $\mathfrak{B}'$ die anderen auf demselben Collineationsstrahl α, β liegenden Paare homologer Punkte desselben Systems Σ, σ, so bilden die homologen Geraden $(A - \mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{A}' - B')$; $(B - \mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{B}' - A')$ je mit dem Collineationsstrahl α; β, gleiche, aber entgegengesetzt liegende Winkel; $\angle \Sigma\mathfrak{A}B = \angle \Sigma\mathfrak{B}'A'$; $\angle \Sigma\mathfrak{B}A = \angle \Sigma\mathfrak{A}'B'$. Fig. 163.

Sind ferner a und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}$ und c' je irgend ein Paar homologer Tangenten in dem System Σ, σ, (oder Σ', σ), so bilden auch a und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ und c' je mit dem Collineationsstrahl α, γ, der durch ihre Berührungspunkte geht, gleiche, aber entgegengesetzt liegende Winkel; $\angle a\alpha = \angle \mathfrak{a}'\alpha$; $\angle \mathfrak{c}\gamma = \angle c'\gamma$. Fig. 164.

Da sich nun $(A - \mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{A}' - B')$, Fig. 163., weil sie homologe Gerade in dem System Σ, σ sind, in einem Punkt P der Collineationsaxe σ schneiden, so entsteht ein Dreieck $B'P\mathfrak{B}$. In diesem ist $\angle P\mathfrak{B}B' = \angle B\mathfrak{B}A$, $\angle PB'\mathfrak{B} = \angle \mathfrak{A}'B'\mathfrak{B}'$. Nun ist $\angle B\mathfrak{B}A = \angle B\mathfrak{A}A = \angle A\mathfrak{A}B$, also $\angle P\mathfrak{B}B' = \angle A\mathfrak{A}B$; $\angle \mathfrak{A}'B'\mathfrak{B}'$ ist gleich $\angle \mathfrak{A}'A'\mathfrak{B}'$, also $\angle PB'\mathfrak{B} = \angle \mathfrak{A}'A'\mathfrak{B}'$. Da nun $(\mathfrak{A} - B) \parallel (\mathfrak{A}' - B')$ ist, so ist $\angle A\mathfrak{A}B = \angle A\mathfrak{A}'B'$, und da $(A - \mathfrak{B}) \parallel (A' - \mathfrak{B}')$ ist, so ist $\angle \mathfrak{A}'A'\mathfrak{B}' = \angle \mathfrak{A}'A\mathfrak{B}$. Es ist folglich $\angle P\mathfrak{B}B' = \angle A\mathfrak{A}'B'$, $\angle PB'\mathfrak{B} = \angle \mathfrak{A}'A\mathfrak{B}$, oder $\angle P\mathfrak{B}B' = \angle A\mathfrak{A}'P$; $\angle PB'\mathfrak{B} = \angle \mathfrak{A}'AP$. Also ist $\triangle AP\mathfrak{A}' \sim \triangle B'P\mathfrak{B}$. Daher verhält sich:

$$PA : P\mathfrak{A}' = PB' : P\mathfrak{B}$$

oder, es ist

$$PA \cdot P\mathfrak{B} = P\mathfrak{A}' \cdot PB'.$$

Im Falle K und K' ganz außer- oder ganz innerhalb einander liegen, ergiebt sich dieß auch aus Lehrsatz 10. Denn das Produkt $PA \cdot P\mathfrak{B}$ ist gleich dem Quadrat der von P an K, das Produkt $P\mathfrak{A}' \cdot PB'$ gleich dem der von P an K' gelegten Tangente. Beide Tangenten sind aber nach Lehrsatz 10. gleich lang, also $PA \cdot P\mathfrak{B} = P\mathfrak{A}' \cdot PB'$. Liegen K und K' theilweise in einander, so läßt sich derselbe Schluß anwenden für jeden Punkt P, der außerhalb der beiden Kreise liegt. Für einen Punkt P, der auf dem Stücke von σ liegt, welches gemeinschaftliche Sehne ist, hat man, Fig. 60., wenn wir da-

selbst M und N (wie in Fig. 160.) statt G_1, G_2, $\mathcal{A}'$ statt $\mathfrak{A}'$, $\mathcal{B}'$ statt $\mathfrak{B}'$, schreiben: $PM \cdot PN = PA \cdot P\mathcal{B}$ und $PM \cdot PN = P\mathcal{A}' \cdot PB'$, also $PA \cdot P\mathcal{B} = P\mathcal{A}' \cdot PB'$. Da nun, wenn man, Fig. 163. und 60., von P aus irgend eine beliebige, den Kreis K in A_1 und $\mathcal{B}_1$ schneidende Secante zieht, bekanntlich stets $PA_1 \cdot P\mathcal{B}_1 = PA \cdot P\mathcal{B}$, und ebenfalls, wenn man von P eine beliebige, den Kreis K' in $\mathcal{A}'_1$, B'_1 schneidende Secante zieht, $P\mathcal{A}'_1 \cdot PB'_1 = P\mathcal{A}' \cdot PB'$ ist, so sieht man:

12. Lehrsatz. Werden von einem beliebigen Punkt P der Collineationsaxe σ zweier Kreise beliebige Secanten durch dieselben gezogen, so sind die Produkte aus den Entfernungen der Durchschnittspunkte dieser Secanten mit den Kreisen von P einander gleich. $PA \cdot P\mathcal{B} = P\mathcal{A}' \cdot PB'$. Fig. 163.

Wegen dieser Eigenschaft wird die Collineationsaxe mit einem besonderen Namen bezeichnet. Nämlich:

13. Erklärung. Wird durch einen außer- oder innerhalb eines Kreises K gelegenen Punkt P eine Gerade (bezüglich Secante oder Sehne) gezogen, welche den Kreis in den beiden Punkten A, $\mathcal{B}$ schneidet, so heißt der für alle durch denselben Punkt P gehende Secanten oder Sehnen desselben Kreises constante Werth des Productes $PA \cdot P\mathcal{B}$ die **„Potenz des Punktes P für den Kreis K_1“**. Fig. 163., 60.

Man drückt daher den Satz 12. auch so aus:

14. Lehrsatz. Die Potenzen jedes Punktes P der Collineationsaxe σ für beide Kreise K, K' sind einander gleich. Fig. 163.

und definirt daher:

15. Erklärung. Die im Endlichen liegende Collineationsaxe σ zweier Kreise K, K', die in derselben Ebene sich befinden, heißt: **„Potenzlinie der beiden Kreise K, K'“**. Fig. 163.

Umgekehrt läßt sich leicht zeigen, daß jeder Punkt P in der Ebene zweier Kreise K, K', dessen Potenzen für dieselben gleich sind, auf der Potenzlinie liegen muß. Denn, nennen wir die Centraldistanz MM' der beiden Kreise K, K': e, Fig. 167., und fällen von dem gegebenen Punkt P ein Loth PD auf MM', nennen den Radius des Kreises K: R, den des Kreises K': R', so muß, wenn wir (P – M), (P – M') ziehen und ihre Durchschnittspunkte mit K, K' bezüglich X, Y; X', Y' nennen, der Definition von „Potenz“ zufolge sein: $PX \cdot PY = PX' \cdot PY'$ oder $(PM - R)(PM + R) = (PM' - R') \cdot (PM' + R')$ oder $PM^2 - R^2 = PM'^2 - R'^2$, folglich $PM'^2 = PM^2 + R'^2 - R^2$. Nun ist $M'D = e - MD$, und $MD^2 = PM^2 - PD^2$; $M'D^2 = PM'^2 - PD^2 = PM^2 + R'^2 - R^2 - PD^2$, oder $(e - MD)^2 = PM^2 + R'^2 - R^2 - PD^2$.

Aus dieser Gleichung folgt nun sogleich $PD^2 = PM^2 + R'^2 - R^2 - (e - MD)^2$ und aus $MD^2 = PM^2 - PD^2$ folgt $PD^2 = PM^2 - MD^2$. Man hat also durch Vergleichung der beiden Werthe für PD^2 die Gleichung: $MD^2 - PM^2 = (e - MD)^2 - PM^2 - R'^2 + R^2$ oder $MD^2 = e^2 - 2e \cdot MD + MD^2 - R'^2 + R^2$, also $MD = \frac{e}{2} - \frac{R'^2}{2e} + \frac{R^2}{2e}$ und ebenso $M'D = e - MD = \frac{e}{2} + \frac{R'^2}{2e} - \frac{R^2}{2e}$. Es ist also die Entfernung des Fußpunktes D des Perpendikels PD von der Lage des Punktes P ganz unabhängig, also für dieselben zwei Kreise K, K' und für dieselbe Centraldistanz e constant. Es muß also das von jedem Punkt P, dessen Potenzen für K und K' gleich sind, auf MM' gefällte Loth die MM' in demselben Punkte D treffen. Dieß ist aber nur möglich, wenn alle Punkte P, deren Potenzen gleich sind, auf einer Geraden liegen, die senkrecht auf MM' steht, und durch den Punkt D geht. Ist nun Σ das äußere Aehnlichkeitscentrum von K, K', Fig. 163., so sind M, M' homologe Punkte der Aehnlichkeit, und Σ sich selbst homolog, und zugleich ist jedem Punkt auf dem Umfange von K ein Punkt auf dem Umfange von K' homolog, z. B. F und F'. Es verhält sich also nach § 8. Lehrsatz 46. $\Sigma F : \Sigma F' = \Sigma M : \Sigma M'$ oder $\Sigma F : \Sigma M = \Sigma F' : \Sigma M'$ oder $\Sigma M - R : \Sigma M = \Sigma M' - R' : \Sigma M'$ oder $\Sigma M : \Sigma M' = R : R'$. Es ist aber $MM' = e$, also hat man $\Sigma M : \Sigma M + e = R : R'$, oder $\Sigma M : e = R' - R : R$, folglich $\Sigma M = \frac{Re}{R' - R}$. Ist ferner R (welches also außer dem Radius von K noch eine andere Bedeutung hat) der Durchschnittspunkt der Polaren p von Σ mit $(M - M')$, so hat man die harmonische Proportion: $\Sigma F : \mathrm{R}F = \Sigma \mathfrak{F} : \mathrm{R}\mathfrak{F}$ oder $\Sigma M - R : \Sigma\mathrm{R} - \Sigma F = \Sigma M + R : \Sigma F + 2R - \Sigma\mathrm{R}$ oder $\Sigma M - R : \Sigma\mathrm{R} - (\Sigma M - R) = \Sigma M + R : (\Sigma M - R) + 2R - \Sigma\mathrm{R}$ oder: $\Sigma M - R : \Sigma\mathrm{R} - \Sigma M + R = \Sigma M + R : \Sigma M + R - \Sigma\mathrm{R}$; hieraus folgt: $\Sigma M - R : \Sigma\mathrm{R} = \Sigma M + R : 2(\Sigma M + R) - \Sigma\mathrm{R}$ oder: $\Sigma M - R : \Sigma M + R = \Sigma\mathrm{R} ; 2\Sigma M + 2R - \Sigma\mathrm{R}$; also $\Sigma M - R : 2\Sigma M = \Sigma\mathrm{R} : 2\Sigma M + 2R$; daher $\Sigma M^2 - R^2 = \Sigma M \cdot \Sigma\mathrm{R}$, also $\Sigma\mathrm{R} = \frac{\Sigma M^2 - R^2}{\Sigma M}$. Vermöge des Werthes $\Sigma M = \frac{Re}{R' - R}$ hat man daher $\Sigma\mathrm{R} = \frac{e^2 - (R' - R)^2}{e(R' - R)} \cdot R$. Ebenso ergiebt sich $\Sigma\mathrm{R}' = \frac{e^2 - (R' - R)^2}{e(R' - R)} \cdot R'$ (wie auch schon aus § 8. Lehrsatz 46. folgt). Also ist $\Sigma\mathrm{R}' - \Sigma\mathrm{R}$ oder $\mathrm{R}\mathrm{R}' = \frac{e^2 - (R' - R)^2}{e(R' - R)} \cdot (R' - R)$ oder $\mathrm{R}\mathrm{R}' = \frac{e^2 - (R' - R)^2}{e}$. Die Entfernung des Mittelpunktes Δ von $\mathrm{R}\mathrm{R}'$, d. h. nach Lehrsatz 9. die Entfernung des Durchschnittspunktes der Collineationsaxe σ von R, oder $\mathrm{R}\Delta$ ist $= \frac{e^2 - (R' - R)^2}{2e}$. Nun ist $\mathrm{R}M = \Sigma M - \Sigma\mathrm{R} = \frac{Re}{R' - R} - \frac{e^2 - (R' - R)^2}{e(R' - R)} \cdot R = \frac{(R' - R)R}{e}$ also $M\Delta = \mathrm{R}\Delta - \mathrm{R}M = \frac{e^2 - R'^2 + 2RR' - R^2 - 2RR' + 2R^2}{2e} = \frac{e}{2} - \frac{R'^2}{2e} + \frac{R^2}{2e}$. Es ist also

die Entfernung des Durchschnittspunktes Δ der Potenzlinie σ mit $(M-M')$ von M ebenso groß, als die Entfernung des Punktes D Fig. 167., in welchem die Gerade die $(M-M')$ schneidet, auf der jeder Punkt P, dessen Potenzen für K und K' gleich sind, liegen muß. Da nach Lehrsatz 9. auch σ senkrecht auf MM_1 steht, so muß also jeder Punkt P von der angegebenen Beschaffenheit auf σ sich befinden, und man erhält den

16. **Lehrsatz.** Jeder Punkt P in der Ebene zweier Kreise K, K', dessen Potenzen für dieselben gleich sind, muß auf der Potenzlinie σ an K und K' liegen. Fig. 163.

Da es also außer σ keinen einzigen, viel weniger mehrere Punkte geben kann, deren Potenzen gleich sind, so folgt sogleich weiter:

17. **Lehrsatz.** Zwei in derselben Ebene liegende Kreise K, K' können nur eine einzige Potenzlinie haben.

18. **Erklärung.** Die in Lehrsatz 14., 16., 17. ausgesprochenen Eigenschaften des Kreises werden zusammengefaßt unter dem Ausdrucke: „**Potenzialität** des Kreises“.

Eine ähnliche Eigenschaft, wie sie in Lehrsatz 14. von der Collineationsaxe σ ausgesprochen wurde, läßt sich von den Aehnlichkeitscentren Σ, Σ' nachweisen. Sind nämlich, Fig. 163., α und β zwei beliebige Aehnlichkeitsstrahlen, so ist in den Dreiecken $\Sigma A\mathfrak{B}$ und $\Sigma\mathfrak{A}'B'$ der $\angle A\Sigma\mathfrak{B} = \angle \mathfrak{A}'\Sigma B'$, und nach Lehrsatz 11. $\angle \Sigma\mathfrak{B}A = \angle \Sigma\mathfrak{A}'B'$. Es ist also $\triangle A\Sigma\mathfrak{B} \sim \triangle B'\Sigma\mathfrak{A}'$; also hat man die Proportion: $\Sigma A : \Sigma\mathfrak{B} = \Sigma B' : \Sigma\mathfrak{A}'$ oder $\Sigma A \cdot \Sigma\mathfrak{A}' = \Sigma\mathfrak{B} \cdot \Sigma B'$. Ferner ist, da $(A-B) \parallel (A'-B')$ ist, $\angle \Sigma AB = \angle \Sigma A'B'$. Da aber $A'B'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ ein dem Kreise K' eingeschriebenes Viereck ist, und nach einem bekannten Satze der Planimetrie in jedem einem Kreise eingeschriebenen Viereck der Außenwinkel an einer Ecke gleich dem gegenüberliegenden Innenwinkel ist, so ist $\angle \Sigma A'B' = \angle B'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}' = \angle \Sigma\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$. Es ist also in den Dreiecken $A\Sigma B$ und $\mathfrak{B}'\Sigma\mathfrak{A}'$ der $\angle A\Sigma B = \angle \mathfrak{B}'\Sigma\mathfrak{A}'$; $\angle \Sigma AB = \angle \Sigma\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$; also ist $\triangle A\Sigma B \sim \triangle \mathfrak{B}'\Sigma\mathfrak{A}'$ und es verhält sich $\Sigma A : \Sigma B = \Sigma\mathfrak{B}' : \Sigma\mathfrak{A}'$; oder es ist $\Sigma A \cdot \Sigma\mathfrak{A}' = \Sigma B \cdot \Sigma\mathfrak{B}'$. Ferner ist wegen der Aehnlichkeit der Kreise $(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) \parallel (\mathfrak{A}'-\mathfrak{B}')$, also $\angle \Sigma\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \angle \Sigma\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$. An dem dem Kreise K' eingeschriebenen Viereck $A'B'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ ist aber $\angle \Sigma\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \angle A'\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \angle \Sigma B'A'$. Es ist also $\angle \Sigma\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \angle \Sigma B'A'$, daher auch $\triangle \mathfrak{A}\Sigma\mathfrak{B} \sim \triangle B'\Sigma A'$. Also verhält sich $\Sigma\mathfrak{A} : \Sigma\mathfrak{B} = \Sigma B' : \Sigma A'$; oder es ist $\Sigma\mathfrak{A} \cdot \Sigma A' = \Sigma\mathfrak{B} \cdot \Sigma B'$. Man hat also die Gleichung:

$$\Sigma A \cdot \Sigma\mathfrak{A}' = \Sigma\mathfrak{A} \cdot \Sigma A' = \Sigma\mathfrak{B} \cdot \Sigma B' = \Sigma B \cdot \Sigma\mathfrak{B}'.$$

Man hat also, da α und β beliebige Aehnlichkeitsstrahlen waren und sich ebenso zeigen läßt, daß auf einem beliebigen ferneren Aehnlichkeitsstrahl γ auch $\Sigma A \cdot \Sigma\mathfrak{A}' = \Sigma\mathfrak{A} \cdot \Sigma A' = \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\mathfrak{G}' = \Sigma\mathfrak{G} \cdot \Sigma\Gamma'$ ist, wenn Γ, Γ'; $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ homologe Punkte der Aehnlichkeit sind, den

19. **Lehrsatz.** Auf allen Aehnlichkeitsstrahlen $\alpha, \beta, \ldots.$ ist das Produkt aus den Entfernungen des Aehnlichkeits-

centrums Σ (oder Σ') von zwei für das System Σ, σ (oder Σ', σ) homologen Punkten, A und $\mathfrak{A}'$; $\mathfrak{A}$ und A'; B und $\mathfrak{B}'$; $\mathfrak{B}$ und B'; .... constant. Fig. 163.

Wegen der Analogie dieses Satzes mit Lehrsatz 12. stellt man eine der Erklärung 13. ähnliche Definition auf, nämlich:

20. Erklärung. Das Produkt der Entfernungen eines der Aehnlichkeitscentra Σ (oder Σ') von zwei Punkten, die für Σ (oder Σ') als Collineationscentrum und die Potenzlinie σ als Collineationsaxe homolog sind, wie $A, \mathfrak{A}'$; $\mathfrak{A}, A'$; u. s. w. heißt die **„Potenz der beiden Kreise K, K′ für den Punkt Σ (oder Σ')"***).

Zwei im System Σ, σ (oder $\Sigma'\ \sigma$) homologe Punkte: $A, \mathfrak{A}'$; $\mathfrak{A}, A'$ u. s. w. heißen: **„potenzhaltende Punkte"**. Fig. 163.

Da ferner nach Lehrsatz 11. $\angle \Sigma\mathfrak{B}A = \angle \Sigma\mathfrak{A}'B'$, oder $\Sigma\mathfrak{B}A = \angle A\mathfrak{A}'B'$ ist, so ist $\angle A\mathfrak{A}'B' + \angle B'\mathfrak{B}A = 180^0$, also läßt sich um das Viereck $A\mathfrak{B}B'\mathfrak{A}'$ ein Kreis beschreiben. Ferner ist nach Lehrsatz 11. $\angle \Sigma\mathfrak{A}B = \angle \Sigma\mathfrak{B}'A'$, oder $\angle \Sigma\mathfrak{A}B = \angle B\mathfrak{B}'A'$, also $\angle A'\mathfrak{A}B + \angle B\mathfrak{B}'A' = 180^0$; also läßt sich um das Viereck $\mathfrak{A}B\mathfrak{B}'A'$ ein Kreis beschreiben. Ferner ist, wie wir zum Behufe des Beweises von Lehrsatz 19. bemerkt hatten, $\angle \Sigma AB = \angle \Sigma\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ oder $\angle \Sigma AB = \angle B\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$, daher $\angle \mathfrak{A}'AB + \angle B\mathfrak{B}'\mathfrak{A}' = 180^0$; also läßt sich auch um das Viereck $AB\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ ein Kreis beschreiben. Und ebenso war $\angle \Sigma\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \angle \Sigma B'A' = \angle \mathfrak{B}B'A'$, folglich $\angle A'\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \angle \mathfrak{B}B'A' = 180^0$; es läßt sich daher auch um das Viereck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}B'A'$ ein Kreis beschreiben. Man sieht also:

21. Lehrsatz. Um jede zwei Paar potenzhaltende Punkte (für dasselbe Aehnlichkeitscentrum Σ oder Σ'), die nicht auf demselben Aehnlichkeitsstrahl liegen, also z. B. um $A, \mathfrak{B}, B', \mathfrak{A}'$; $\mathfrak{A}, B, \mathfrak{B}', A'$; $A, B, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, B', A'$ läßt sich ein Kreis beschreiben. Fig. 163.

Der Lehrsatz 19. ist aber bloß ein specieller Fall eines allgemeineren Gesetzes. Es seien nämlich Fig. 165. zwei beliebige Kreise K, K′ mit den Mittelpunkten M, M′ in derselben Ebene gegeben und der geometrische Ort der Punkte P gesucht, die so beschaffen sind, daß, wenn man einen von ihnen durch Gerade mit den Mittelpunkten der Kreise verbindet, und dann beliebige Gerade α, α' durch die Kreise zieht, welche mit $(P - M)$ und $(P - M')$ gleiche Winkel bilden, allemal auf zwei solchen Strahlen α, α' die Gleichung statt finde: $PA \cdot P\mathfrak{A}'$

*) Man wird bemerken, daß sich diese Definition von der in Erklärung 13. aufgestellten dadurch unterscheidet, daß es dort hieß: „Potenz des Punktes", hier: „Potenz der Kreise", dort: „Potenz für den Kreis", hier: „Potenz für den Punkt".

$= P\mathfrak{A} \cdot PA'$. Es versteht sich, daß es für die Aufgabe einerlei ist, ob man α und α' zugleich auf der rechten oder linken Seite von $(P-M)$, $(P-M')$ zieht, oder ob man eine davon, z. B. α auf der linken Seite von $(P-M)$ und α' auf der rechten Seite von $(P-M')$ zieht, wenn nur α' mit $(P-M')$ denselben Winkel macht, wie α mit $(P-M)$. Denn hätte man z. B. einen Strahl β' links von $(P-M')$ gezogen, der mit $(P-M')$ denselben Winkel bildet, wie α', so daß $\angle A'PM' = \angle B'PM'$ ist, so ist offenbar $PB' = PA'$, $P\mathfrak{B}' = P\mathfrak{A}'$. Es folgt aber aus der gemachten Voraussetzung noch mehr. Ist nämlich $\angle APM = \angle APM'$, $\angle BPM = \angle B'PM'$ und also $PA \cdot P\mathfrak{A}' = P\mathfrak{A} \cdot PA'$ und $PB \cdot P\mathfrak{B}' = P\mathfrak{B} \cdot PB'$, und bedenkt man, daß auch $PA \cdot P\mathfrak{A} = PB \cdot P\mathfrak{B}$, $PA' \cdot P\mathfrak{A}' = PB' \cdot P\mathfrak{B}'$ ist; so erhält man, wenn man diese beiden letzten Gleichungen mit einander multiplicirt: $PA \cdot P\mathfrak{A}' \cdot P\mathfrak{A} \cdot PA' = PB \cdot P\mathfrak{B}' \cdot P\mathfrak{B} \cdot PB'$. Nach der ersten ist aber $P\mathfrak{A} \cdot PA' = PA \cdot P\mathfrak{A}'$, nach der zweiten $P\mathfrak{B} \cdot PB' = PB \cdot P\mathfrak{B}'$. Man kann also auch schreiben: Es ist $(PA \cdot P\mathfrak{A}')^2 = (PB \cdot P\mathfrak{B}')^2$, also $PA . P\mathfrak{A}' = PB \cdot P\mathfrak{B}$. Man hat also $PA \cdot P\mathfrak{A}' = P\mathfrak{A} \cdot PA' = PB \cdot P\mathfrak{B}' = P\mathfrak{B} \cdot PB'$. Man erhält also den

22. Lehrsatz. Hat ein Punkt P in der Ebene zweier Kreise K, K' die Eigenschaft, daß, wenn man von ihm aus Sehnen oder Secanten durch beide Kreise zieht, auf je zwei solchen Strahlen α, α'; β, β' ...., welche mit den nach den Mittelpunkten gehenden Strahlen $(P-M)$, $(P-M')$ gleiche Winkel machen, das Produkt aus der Entfernung des Punktes P vom näheren Punkte A des Strahles α oder β .... und von dem entfernteren Punkte $\mathfrak{A}'$ des Strahles α' gleich ist dem Produkt der Entfernung des Punktes P von dem entfernteren Punkt $\mathfrak{A}$ des Strahles α oder β .... und dem näheren Punkt A' des Strahles α' oder β' ...., so ist der Werth des Produktes auf allen Strahlen $\alpha, \beta, \ldots.$ derselbe, und also constant. Es ist also $PA \cdot P\mathfrak{A}' = P\mathfrak{A} \cdot PA' = PB \cdot P\mathfrak{B}' = P\mathfrak{B} \cdot PB' = \ldots.$ Fig. 165.

Der Aufgabe nach muß nun die Gleichung $PA \cdot P\mathfrak{A}' = P\mathfrak{A} \cdot PA'$ auch erfüllt sein, wenn man in K, K' von P aus zwei Strahlen zieht, die mit $(P-M)$, $(P-M')$ den gleichen Winkel 0^0 bilden; es muß also auch auf den Strahlen $(P-M)$, $(P-M')$, welche die „Centralstrahlen" heißen sollen, die Gleichung stattfinden: $PC \cdot P\mathfrak{C}' = P\mathfrak{C} \cdot PC'$. Und umgekehrt, findet für einen Punkt P auf den Centralstrahlen diese Gleichung $PC \cdot P\mathfrak{C}' = P\mathfrak{C} \cdot PC'$ statt, so ist auch, wenn man von P irgend zwei beliebige Strahlen α, α' zieht, die mit den Centralstrahlen gleiche Winkel bilden, allemal auf solchen Strahlen $PA \cdot P\mathfrak{A}' = P\mathfrak{A} \cdot PA'$. Denn aus der Gleichung $PC \cdot P\mathfrak{C}' = P\mathfrak{C} \cdot PC'$ folgt sogleich, wenn man den Halbmesser des Kreises K mit R, den von K' mit R' bezeichnet:

$$PC \cdot (PC' + 2R') = (PC + 2R) \cdot PC'$$

oder: $R' \cdot PC = R \cdot PC'$

oder: $PC : R = PC' : R'$

oder: $PC + R : R = PC' + R' : R'$

also: $PM : R = PM' : R'$

oder: $PM : PM' = R : R'$. a)

Zieht man nun zwei beliebige Strahlen α, α' so, daß $\angle APM = \angle A'PM'$ ist, und dann die Radien MA, M'A'; so ist also, da $MA = R$, $M'A' = R'$ ist:

$$PM : MA = PM' : M'A';$$

ferner ist $\angle APM = \angle A'PM'$. Es sind also in den beiden Dreiecken APM, A'PM' zwei Seiten proportionirt und ein nicht von ihnen eingeschlossener, den Seiten MA, M'A' gegenüberliegender Winkel gleich; die der Seite PM, PM' gegenüberliegenden Winkel müssen nun zugleich stumpf sein, wenn A, und A' die dem Punkt P näheren Punkte auf α, α' sind, also ist $\triangle APM \sim \triangle A'PM'$. Also verhält sich $PA : MA = PA' : M'A'$ oder $PA : PA' = MA : M'A'$. Ebenso ist $\triangle \mathfrak{A}PM \sim \triangle \mathfrak{A}'PM'$ und es verhält sich $P\mathfrak{A} : P\mathfrak{A}' = M\mathfrak{A} : M\mathfrak{A}'$. Da nun $M\mathfrak{A} : M'\mathfrak{A}' = MA : M'A'$ ist, so hat man: $PA : PA' = P\mathfrak{A} : P\mathfrak{A}'$, oder $PA \cdot P\mathfrak{A}' = P\mathfrak{A} \cdot PA'$. Es kommt also die Aufgabe darauf hinaus, den geometrischen Ort derjenigen Punkte P zu suchen, deren Entfernungen von M und M' sich verhalten wie die Radien $R : R'$.

Zunächst erhellt, daß die den gesuchten geometrischen Ort darstellende Curve durch die Aehnlichkeitscentra Σ, Σ' von K, K' gehen muß. Denn sind, Fig. 162. MA, M'A' ein Paar paralleler Radien, so daß also nach Lehrsatz 2. $(A - A')$ durch Σ geht, so verhält sich $M\Sigma : M'\Sigma = MA : M'A'$, also $M\Sigma : M'\Sigma = R : R'$, und ebenso $M\Sigma' : M'\Sigma' = R : R'$. Es sind also jedenfalls die Aehnlichkeitscentra Σ, Σ' Punkte des gesuchten geometrischen Orts. Zieht man nun, Fig. 165. von P nach Σ und Σ' die Geraden $(P - \Sigma)$, $(P - \Sigma')$, so ist, weil nach Lehrsatz 6. die Strecke MM' von Σ, Σ' harmonisch getheilt wird, Strahlbüschel P, $(P - M)$ $(P - \Sigma')$ $(P - M')$ $(P - \Sigma)$ harmonisch. Fällt man nun von Σ' auf den Strahl $(P - M)$ und $(P - M')$ die Lothe, bezüglich $(\Sigma' - N)$ $(\Sigma' - N')$ und von P auf $(M - M')$ das Loth $(P - \mathfrak{N})$, und wendet auf die Dreiecke $MP\Sigma'$, $M'P\Sigma'$ den bekannten Satz an, daß sich die Seiten eines Dreieckes umgekehrt, wie die zugehörigen Höhenperpendikel verhalten, so hat man

$$\frac{PM}{\Sigma'M} = \frac{P\mathfrak{N}}{\Sigma'N}; \quad \frac{PM'}{\Sigma'M'} = \frac{P\mathfrak{N}}{\Sigma'N'};$$

dividirt man die Gleichung links durch die rechts stehende, so ergiebt sich:

$$\frac{PM}{\Sigma'M} \cdot \frac{\Sigma'M'}{PM'} = \frac{\Sigma'N'}{\Sigma'N}.$$

Da nun der Voraussetzung nach $\frac{PM}{PM'} = \frac{R}{R'}$ und, wie eben gezeigt

wurde, $\frac{\Sigma'M'}{\Sigma'M} = \frac{R'}{R}$ ist, so hat man auf der linken Seite der letzten Gleichung den Werth 1; es ist also:

$$\Sigma'N = \Sigma'N';$$

also ist $\triangle NP\Sigma' \cong \triangle N'P\Sigma'$, folglich $\angle \Sigma'PN = \angle \Sigma'PN'$ oder

$$\angle \Sigma'PM = \angle \Sigma'PM'.$$

Es halbirt also der Strahl $(P - \Sigma')$ den von den beiden Strahlen $(P - M)$, $(P - M')$ gebildeten Winkel. Folglich steht nach § 1. Lehrsatz 27. der ihm zugeordnete harmonische Strahl $(P - \Sigma)$ auf $(P - \Sigma')$ senkrecht. Es bildet also jeder Punkt P der gesuchten Curve den Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel durch Σ und Σ' gehen, d. h. jeder Punkt P liegt auf der Peripherie eines Kreises, der die Strecke $\Sigma\Sigma'$ zum Durchmesser hat.

Stellen wir nun die der Erklärung 20. analoge Definition auf:

23. Erklärung. Liegen zwei Kreise K, K' und ein Punkt P in derselben Ebene, und hat letzterer die Eigenschaft, daß, wenn man von ihm aus die Strahlen α, α'; β, β'; .... unter gleichen Winkeln zu den Centralstrahlen $(P - M)$, $(P - M')$ zieht, $PA \cdot P\mathcal{A}' = P\mathcal{A} \cdot PA' = PB \cdot P\mathcal{B}' = P\mathcal{B} \cdot PB' = \ldots$. ist, so heißt der constante Werth des Punktes $PA \cdot P\mathcal{A}' = P\mathcal{A} \cdot PA' = PB \cdot P\mathcal{B}' = P\mathcal{B} \cdot PB' = \ldots$. das **„Potenzial der Kreise K, K' für den Punkt P"**.

Der Punkt P heißt ein **„Potenzialpunkt der Kreise K, K'"**. Fig. 165.

Wir können demnach jetzt sagen:

24. Lehrsatz. Der geometrische Ort aller Potenzialpunkte P zweier Kreise K, K', ist ein Kreis, der durch die beiden Aehnlichkeitscentra Σ, Σ' derselben geht, und die Strecke $\Sigma\Sigma'$ zum Durchmesser hat. Fig. 165.

Und analog der Erklärung 15. sagen wir:

25. Erklärung. Der durch die Aehnlichkeitscentra Σ, Σ' gehende Kreis, der den geometrischen Ort für die Potenzialpunkte der Kreise K, K' bildet, heißt: **„der Potenzialkreis der beiden Kreise K, K'"**. Fig. 165.

Man bemerkt sogleich, daß der Lehrsatz 19. nur ein specieller Fall von Lehrsatz 22. ist, indem, wenn man Σ, Σ' für P setzt, die Strahlen α und α'; β und β' zusammenfallen, bei Σ, wenn man sie auf derselbeu, bei Σ', wenn man sie auf verschiedenen Seiten der Centralstrahlen $(P - M)$, $(P - M')$ gezogen hat.

Da der Potenzialkreis, der im Folgenden stets durch $\mathcal{K}$ bezeichnet werden soll, die Eigenschaft hat, daß das Produkt aus der Entfernung eines jeden seiner Punkte P je vom näheren Durchschnittspunkt mit K und vom entfernteren Durchschnittspunkt von K' gleich sein soll dem

Produkt der Entfernungen vom entfernteren Durchschnittspunkt mit K und vom näheren Durchschnittspunkt mit K', also $PA \cdot P\mathcal{A}' = P\mathcal{A} \cdot PA'$, so folgt, daß der Potenzialkreis keinen der beiden Kreise K, K' schneiden kann, ohne auch den andern zu schneiden. Denn gesetzt $\mathcal{H}$ schnitte K in $\mathfrak{P}$, und $\mathfrak{P}$ wäre nicht zugleich der Durchschnittspunkt von $\mathcal{H}$ mit K', so ziehe man von $\mathfrak{P}$ irgend einen den Kreis K schneidenden Strahl α. Der eine Durchschnittspunkt A mit K fällt dann nach $\mathfrak{P}$, der entferntere heiße $\mathcal{A}_1$. Man ziehe dann einen Strahl α', der mit ($\mathfrak{P}$ — M') denselben Winkel macht, wie α mit ($\mathfrak{P}$ — M); so schneidet derselbe den Kreis K' in zwei Punkten A'_1, $\mathcal{A}'_1$ (wenn er ihn überhaupt schneidet; geschieht dieß nicht, so kann ohnehin $\mathfrak{P}$ kein Potenzialpunkt sein). Es müßte also sein $\mathfrak{P}A_1 \cdot \mathfrak{P}\mathcal{A}'_1 = \mathfrak{P}\mathcal{A}_1 \cdot \mathfrak{P}A'_1$. Da nun aber A_1 mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt, dieß aber der Voraussetzung nach weder mit A'_1, noch mit $\mathcal{A}'_1$ der Fall ist, so müßte, da $\mathfrak{P}A_1 = 0$ ist, $0 = \mathfrak{P}\mathcal{A}_1 \cdot \mathfrak{P}A'_1$ sein, was unmöglich ist. Man sieht also:

26. Lehrsatz. Schneidet der Potenzialkreis zweier Kreise K, K' den einen derselben, so muß er in demselben Punkte auch den andern schneiden.

Man sieht hieraus sogleich, da, wenn K, K' ganz außer einander liegen, auch Σ, Σ' außerhalb beider liegen, und da der Voraussetzung nach K und K' sich nicht schneiden, daß auch $\mathcal{H}$ keinen derselben schneiden kann, also den kleineren der beiden Kreise K, K' ganz umschließt. Liegt einer der beiden Kreise K, K' ganz innerhalb des anderen, so liegen auch sowohl Σ, als Σ' innerhalb des kleineren, wie wir oben sahen, es muß daher auch $\mathcal{H}$ von dem kleineren Kreise ganz umschlossen werden. Liegen K, K' zum Theil außer-, zum Theil innerhalb einander, indem sie sich in M, N schneiden, so liegt Σ außerhalb K, und außerhalb K', Σ' aber liegt auf dem beiden Kreisen gemeinschaftlichen Stücke der Ebene. Es muß also $\mathcal{H}$ nothwendig beide Kreise K, K' schneiden. Dieß kann aber nach Lehrsatz 26. nur in den gemeinsamen Durchschnittspunkten M, N geschehen. Und in der That überzeugt man sich sofort direkt, daß M, N Potenzialpunkte sein müssen, und daß ihr Potenzial den Werth 0 hat.

Es sei nun P ein Potenzialpunkt, also ein Punkt der Peripherie des Kreises $\mathcal{H}$. Wir suchen seine Polare für die Kreise K und K' und nennen den Durchschnittspunkt der ersteren mit dem Centralstrahl (P — M), den Durchschnittspunkt der letzteren mit (P — M') bezüglich Q, Q', und suchen den geometrischen Ort dieser beiden Punkte Q, Q', fragen also, welche Linie beschreibt der Punkt Q und Q', wenn wir für P successive alle Punkte des Umfangs von $\mathcal{H}$ annehmen, oder, wenn wir P auf dem Umfange von $\mathcal{H}$ sich fortbewegen lassen. Zu dem Zwecke ziehen wir durch den Mittelpunkt M von K eine Gerade, die den Potenzialkreis $\mathcal{H}$ in zwei Punkten P_1, P_2 Fig. 166. schneidet, so liegen auf (P_1 — P_2 — M) oder c die beiden Punkte Q_1, Q_2, deren einer der Durchschnittspunkt dieser Geraden mit der Polaren von P_1,

deren anderer der Durchschnittspunkt mit der Polaren von P_2 ist. Es ist also sowohl Punktreihe $c, P_1 C Q_1 \mathfrak{S}$, als $c, P_2 C Q_2 \mathfrak{S}$ harmonisch. Es wird also die Strecke $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ von C, $\mathfrak{S}$ harmonisch getheilt. Da ferner M in der Mitte von $C\mathfrak{S}$ liegt, so ist auch Punktreihe $c, \infty C M \mathfrak{S}$ harmonisch. Es ist also nach § 4. Lehrsatz 17. Punktreihe $c, \infty P_1 C Q_1 M Q_2 \mathfrak{S} P_2$ eine entgegengesetzt verlaufende involutorische mit den Hauptpunkten C, $\mathfrak{S}$ oder es ist Punktreihe $c, \infty P_1 C Q_1 M Q_2 \mathfrak{S} P_2 \;\overline{\wedge}\; c, M Q_1 C P_1 \infty P_2 \mathfrak{S} Q_2$. Es sind also M und der unendlich entfernte Punkt entsprechende Punkte der auf c vereinigten Punktreihen, d. h. M ist der Centralpunkt der Involution. Also ist nach § 4. Lehrsatz 7. $MP_1 \cdot MQ_1 = MP_2 \cdot MQ_2 = \overline{MC}^2 = \overline{M\mathfrak{S}}^2 = R^2$. Es ist daher:

$$MQ_1 = \frac{R^2}{MP_1}; \quad MQ_2 = \frac{R^2}{MP_2};$$

also $Q_1 Q_2 = MQ_1 + MQ_2 = \dfrac{MP_1 + MP_2}{MP_1 \cdot MP_2} \cdot R^2;$

oder: $$Q_1 Q_2 = \frac{P_1 P_2}{MP_1 \cdot MP_2} \cdot R^2.$$

Errichtet man in der Mitte X von $Q_1 Q_2$ ein Loth auf $(Q_1 - Q_2)$ oder $(P_1 - P_2)$ und sucht den Durchschnittspunkt N desselben mit $(M - M')$, so ergiebt sich zunächst, wenn man den Mittelpunkt des Potenzialkreises durch $\mathfrak{M}$, seinen Halbmesser durch $\mathfrak{R}$ bezeichnet, und $\mathfrak{M}Y \perp P_1 P_2$ zieht, da dann $(\mathfrak{M} - Y) \parallel (N - X)$ ist:

$$MX : MN = MY : M\mathfrak{M}.$$

Nun ist $MX = \frac{1}{2} Q_1 Q_2 - MQ_1 = \frac{1}{2} \dfrac{P_1 P_2}{MP_1 \cdot MP_2} \cdot R^2 - \dfrac{R^2}{MP_1}$

$$= (\tfrac{1}{2} P_1 P_2 - MP_2) \frac{R^2}{MP_1 \cdot MP_2} = \frac{MY}{MP_1 \cdot MP_2} \cdot R^2;$$

also ist: $MN = \dfrac{M\mathfrak{M}}{MP_1 \cdot MP_2} \cdot R^2.$

Nun ist $NX^2 = MN^2 + MX^2 = \dfrac{R^4}{MP_1^2 \cdot MP_2^2} \cdot (M\mathfrak{M}^2 + MY^2)$

$$= \frac{\mathfrak{M}Y^2}{MP_1^2 \cdot MP_2^2} \cdot R^4;$$

also $$NX = \frac{\mathfrak{M}Y}{MP_1 \cdot MP_2} \cdot R^2.$$

Nun ist $NQ_1^2 = NX^2 + (\frac{1}{2} Q_1 Q_2)^2 = [\mathfrak{M}Y^2 + (\frac{1}{2} P_1 P_2)^2] \dfrac{R^4}{MP_1^2 \cdot MP_2^2};$

$$= \frac{R^4 \cdot \mathfrak{R}^2}{MP_1^2 \cdot MP_1^2}.$$

Genau derselbe Werth ergiebt sich ebenso für NQ_2^2. Man erhält also:

$$NQ_1 = NQ_2 = \frac{R^2 \cdot \mathfrak{R}}{MP_1 \cdot MP_2}.$$

Nun ist, da $P_1 P_2$ und $\Sigma\Sigma'$ Sehnen des Kreises $\mathfrak{K}$ sind, die sich in M schneiden, $MP_1 \cdot MP_2 = M\Sigma' \cdot M\Sigma$.

Da nun Σ und Σ' die Aehnlichkeitscentra sind, und, wenn MA, M'A', Fig. 162., ein Paar paralleler Radien in K und K' sind, nach Lehrsatz 2., (A—A') durch Σ oder Σ' geht, so hat man:

$$M\Sigma : M'\Sigma \quad = MA : M'A'$$

oder: $$M\Sigma : M'\Sigma \quad = R : R',$$

oder: $$M\Sigma : M\Sigma + MM' = R : R';$$

oder: $$M\Sigma : MM' \quad = R : R' - R;$$

also ist: $$M\Sigma \quad = \frac{R}{R' - R} \cdot MM';$$

und $$M'\Sigma \quad = \frac{R'}{R' - R} \cdot MM';$$

ferner ist ebenso $$M\Sigma' : M'\Sigma' \quad = R : R'$$

oder: $$M\Sigma' : MM' - M\Sigma' = R : R'$$

also: $$M\Sigma' : MM' \quad = R : R' + R;$$

folglich: $$M\Sigma' \quad = \frac{R}{R' + R} \cdot MM';$$

und $$M'\Sigma' \quad = \frac{R'}{R' + R} \cdot MM'.$$

Man hat also:

$$\left.\begin{aligned} M\Sigma &= \frac{R}{R' - R} \cdot MM'; \quad M\Sigma' = \frac{R}{R' + R} \cdot MM'; \\ M'\Sigma &= \frac{R'}{R' - R} \cdot MM'; \quad M'\Sigma' = \frac{R'}{R' + R} \cdot MM'. \end{aligned}\right\} \quad \dagger)$$

Da zugleich $\mathfrak{M}$ in der Mitte der Strecken Σ'Σ liegt, so ist ferner Fig. 166.

$$M\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}(M\Sigma + M\Sigma') - M\Sigma' = \tfrac{1}{2}(M\Sigma - M\Sigma'),$$

oder: $$M\mathfrak{M} = \frac{R^2}{R'^2 - R^2} \cdot MM';$$

ferner: $$\mathfrak{R} = M\Sigma - M\mathfrak{M} = \frac{R}{R' - R} \cdot MM' - \frac{R^2}{R'^2 - R^2} \cdot MM'$$

oder: $$\mathfrak{R} = \frac{RR'}{R'^2 - R^2} \cdot MM'. \qquad \dagger\dagger)$$

Vermöge der Werthe von $M\mathfrak{M}$, $\mathfrak{R}$, und MΣ, MΣ', hat man nun, wenn man sich erinnert, daß $MP_1 \cdot MP_2 = M\Sigma \cdot M\Sigma'$ ist; daß also:

$$MP_1 \cdot MP_2 = \frac{R^2}{R'^2 - R^2} \cdot MM'^2$$

ist: $$MN = \frac{R^2}{R'^2 - R^2} \cdot MM' \cdot \frac{R'^2 - R^2}{R^2} \cdot \frac{1}{MM'^2} \cdot R^2,$$

oder: $$MN = \frac{R^2}{MM'};$$

und $$NQ_1 = NQ_2 = R^2 \cdot \frac{RR'}{R'^2 - R^2} \cdot MM' \cdot \frac{R'^2 - R^2}{R^2} \cdot \frac{1}{MM'^2};$$

oder $$NQ_1 = NQ_2 = \frac{RR'}{MM'}.$$

Man bemerkt sofort aus der Gleichung $MN = \frac{R^2}{MM'}$, daß der Werth von MN ein von der Lage des Punktes P_1 oder P_2 auf dem Umfange von $\mathfrak{K}$ völlig unabhängiger ist, und aus der Gleichung $NQ_1 = NQ_2 = \frac{RR'}{MM'}$, daß ein Gleiches von dem Werthe NQ_1 oder NQ_2 gilt, der ebenfalls von der Lage der Punkte P_1, P_2 gar nicht abhängt. Es folgt hieraus sogleich, daß der geometrische Ort der Punkte Q_1, Q_2 ein Kreis k ist, dessen Mittelpunkt in N sich befindet, und dessen Halbmesser die Länge $\frac{RR'}{MM'}$ hat. Ermittelt man ebenso, wie beim Kreise K geschehen ist, auch für K' die Werthe von $M'\mathfrak{M}$, $M'P_1 \cdot M'P_2$, so ergiebt sich, wenn man den Durchschnittspunkt der Polaren von P_1, P_2 mit $(P_1 - P_2 - M')$ oder c' durch Q'_1, Q'_2 bezeichnet,

$$M'N' = \frac{R'^2}{M'M};$$

$$N'Q'_1 = N'Q'_2 = \frac{R'R}{M'M}.$$

Es ist also auch die Strecke M'N' constant, und Q'_1, Q'_2 liegen auf der Peripherie eines Kreises k' mit dem Mittelpunkte N'. Bezeichnen wir die Strecke MM' kurz durch e, so ist also:

$$\left.\begin{array}{ll} MN = \frac{R^2}{e}; & M'N' = \frac{R'^2}{e} \\ NQ_1 = NQ_2 = \frac{RR'}{e}; & N'Q'_1 = N'Q'_2 = \frac{R'R}{e}. \end{array}\right\} \text{*)}$$

Da also $NQ_1 = NQ_2 = N'Q'_1 = N'Q'_2$ ist, so hat man sofort den

27. **Lehrsatz.** Läßt man einen Punkt P auf der Peripherie des zwei Kreisen K, K' zugehörigen Potenzialkreises $\mathfrak{K}$ sich fortbewegen, und sucht immer den Durchschnittspunkt Q, Q' seiner Polaren für diese Kreise K, K' mit den Centralstrahlen (P – M), (P – M') oder c, c', so bewegen sich auch Q und Q' je auf der Peripherie eines Kreises k, k'.

Und zwar ist die Entfernung MN, M'N' der Mittelpunkte N, N' dieser Kreise k, k' von den Mittelpunkten M, M' der Kreise K, K' je gleich der mittleren Proportionale $\frac{R^2}{e}$, $\frac{R'^2}{e}$, zwischen der Centraldistanz e der beiden Kreise K, K' und dem jedesmaligen Halbmesser R, R'. Die Halbmesser der Kreise k, k' sind gleich groß, und zwar ist jeder gleich der vierten Proportionale der Centraldistanz e, dem Radius R des Kreises K und dem Radius R' des Kreises K'. Fig. 166.

Man hat ferner $M\mathfrak{F}' = e + R'$; $MF' = e - R'$; $M'\mathfrak{F} = e$

$-R$; $M'F = e + R$. Ferner ist $NF = MN + R = \frac{R^2}{e} + R = \frac{R}{e}(e + R)$; $N\mathfrak{F} = R - MN = R - \frac{R^2}{e} = \frac{R}{e}(e - R)$; $N'\mathfrak{F}' = M'N' + R' = \frac{R'^2}{e} + R' = \frac{R'}{e}(e + R')$; $N'F' = R' - M'N' = R' - \frac{R'^2}{e} = \frac{R'}{e}(e - R')$. Man hat also:

$$M\mathfrak{F}' : N'\mathfrak{F}' = MF' : N'F'; \ \left(= 1 : \frac{R'}{e}\right);$$

$$M'F : NF = M'\mathfrak{F} : N\mathfrak{F}; \ \left(= 1 : \frac{R}{e}\right).$$

Man erhält also den:

28. **Lehrsatz.** Die Strecke MN' vom Mittelpunkt M des Kreises K bis zum Mittelpunkt N' des Kreises k' wird durch die Durchschnittspunkte F', $\mathfrak{F}'$ des Kreises K' mit der Centrallinie $(M - M')$; die Strecke $M'N$ vom Mittelpunkt M' des Kreises K' bis zum Mittelpunkt N des Kreises k wird durch die Durchschnittspunkte F, $\mathfrak{F}$ des Kreises K mit der Centrallinie $(M - M')$ harmonisch getheilt. Fig. 166.

Hieraus folgt sogleich weiter:

29. **Lehrsatz.** Der Mittelpunkt N' liegt im Durchschnittspunkt der Centrallinie $(M - M')$ mit der Polaren des Mittelpunktes M von K für den Kreis K'; der Mittelpunkt N liegt im Durchschnittspunkt der Centrallinie $(M - M')$ mit der Polaren des Mittelpunktes M' von K' für den Kreis K. Fig. 166.

Es ist daher leicht, mittelst der Auflösung der Aufgabe 3. links in § 14. die Punkte N, N' zu finden.

Wir sahen ferner in Lehrsatz 9. mit Rücksicht auf die Erklärung 15., daß die Potenzlinie σ der Kreise K, K' senkrecht auf der Centrallinie $(M - M')$ steht, und die von den Polaren eines Aehnlichkeitscentrums abgeschnittene Strecke halbirt. Bezeichnen wir nun den Durchschnittspunkt der Polaren von Σ' für den Kreis K mit $(M - M')$ durch $\mathfrak{S}$, für K' mit $\mathfrak{S}'$, Fig. 167., den Durchschnittspunkt der Polaren von Σ für den Kreis K' mit $(M - M')$ durch S', der Polaren von Σ für K mit $(M - M')$ durch S, so verhält sich also:

$$\Sigma'F : \mathfrak{S}F = \Sigma'\mathfrak{F} : \mathfrak{S}\mathfrak{F}; \quad \Sigma'F' : \mathfrak{S}'F' = \Sigma'\mathfrak{F}' : \mathfrak{S}'\mathfrak{F}',$$

oder, nach †), wo also MM' jetzt mit e bezeichnet wird,

$$\frac{Re}{R' + R} + R : M\mathfrak{S} + R = \frac{Re}{R' + R} - R : R - M\mathfrak{S};$$

und $$\frac{R'e}{R' + R} - R' : R' - M'\mathfrak{S}' = \frac{R'e}{R' + R} + R' : M'\mathfrak{S}' + R';$$

oder: $\frac{Re}{R'+R} + R : \frac{Re}{R'+R} - R = MS + R : R - MS;$

und $\frac{R'e}{R'+R} - R' : \frac{R'e}{R'+R} + R' = R' - M'S' : M'S' + R';$

also: $2\frac{Re}{R'+R} : \frac{Re}{R'+R} - R = 2R : R - MS;$

und $\frac{R'e}{R'+R} - R' : 2\frac{R'e}{R'+R} = R' - M'S' : 2R';$

oder:

$R : R - MS = \frac{e}{R'+R} : \frac{e}{R'+R} - 1; \quad R' - M'S' : R' = \frac{e}{R'+R} - 1 : \frac{e}{R'+R};$

oder:

$R : MS = \frac{e}{R'+R} : 1; \qquad M'S' : R' = 1 : \frac{e}{R'+R};$

folglich $MS = \frac{(R'+R)R}{e}; \qquad M'S' = \frac{(R'+R)R'}{e};$

oder: $MS = \frac{R^2}{e} + \frac{RR'}{e}; \qquad M'S' = \frac{R'^2}{e} + \frac{RR'}{e};$

d. h., da nach *) $\frac{R^2}{e} = MN$, $\frac{R'^2}{e} = M'N'$; $\frac{RR'}{e}$ der Radius der Kreise k und k' ist: die Polaren von Σ' gehen durch denselben Punkt von (M − M'), in welchem die Kreise k und k' dieselbe schneiden. Ein Gleiches läßt sich ebenso von der Polaren des anderen Aehnlichkeitscentrums Σ zeigen. Man sieht also:

30. **Lehrsatz.** Die Polaren der Aehnlichkeitscentra Σ, Σ' für die Kreise K, K' schneiden die Centrallinie (M − M') in denselben Punkten, bezüglich S, S'; S, S', in denen dieselbe von den Kreisen k, k' geschnitten wird. Fig. 167.

Nach Lehrsatz 9. also halbirt die Potenzlinie σ der Kreise K, K' die Strecke SS', sowie SS', Fig. 167., da die Polare p, p' die (M − M') bezüglich in S, S'; die Polare p, p' die (M − M') in S, S' schneidet. Es ist also, wenn wir den Durchschnittspunkt der Geraden σ mit (M − M') durch D bezeichnen: SD = S'D; SD = S'D. Da aber auch $NS = N'S' = NS = N'S' = \frac{RR'}{e}$ ist, so muß also auch ND = N'D sein. Man erhält also den

31. **Lehrsatz.** Die Potenzlinie σ der Kreise K, K' halbirt die Centraldistanz NN' der Kreise k, k', und steht auf ihr senkrecht. Fig. 167.

Da die beiden Kreise k, k' gleiche Halbmesser haben, also congruent sind, so muß das äußere Aehnlichkeitscentrum derselben im Unendlichen liegen, und also seine Polare durch die Mittelpunkte N, N' von k, k' gehen, und senkrecht auf (N − N') oder (M − M') stehen. Nach Lehrsatz 9. aber muß die Potenzlinie von k, k' die Strecke, die von den Durchschnittspunkten der Polaren eines Aehnlichkeitscentrums

mit der Centrallinie auf dieser abgeschnitten wird, halbiren. Es muß also die Potenzlinie von k, k′ die Strecken NN′ halbiren und auf (N − N′) senkrecht stehen. Dieß thut aber, wie wir sahen, beides die Potenzlinie σ von K, K′. A) Es ist also σ zugleich die Potenzlinie von k, k′. Suchen wir ferner die Potenzlinie vom Kreispaar K und $\mathfrak{K}$, so muß auch sie die Strecke zwischen den Durchschnittspunkten der Polaren eines Aehnlichkeitscentrums halbiren. Das noch unbekannte äußere Aehnlichkeitscentrum von K, $\mathfrak{K}$ heiße Σ_1, das innere Σ'_1, der Durchschnittspunkt der Polaren von Σ_1 für K mit $(M - \mathfrak{M})$ heiße S_1, für $\mathfrak{K}$: S'_1, die Centraldistanz $M\mathfrak{M}$ heiße $\mathfrak{e}$, so muß sich also verhalten:

$$\Sigma_1 \mathfrak{F} : S_1 \mathfrak{F} = \Sigma_1 F : S_1 F$$

oder: $$R - M\Sigma_1 : S_1 \mathfrak{F} = R + M\Sigma_1 : S_1 F.$$

Nach †) ist aber, indem wir $\mathfrak{R}$ für R′, $M\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{e}$ für MM′ setzen:

$$M\Sigma_1 = \frac{R}{\mathfrak{R} - R} \cdot \mathfrak{e};$$

also muß sein:

$$R - \frac{R\mathfrak{e}}{\mathfrak{R} - R} : S_1 \mathfrak{F} = R + \frac{R\mathfrak{e}}{\mathfrak{R} - R} : S_1 F$$

oder: $$R - \frac{R\mathfrak{e}}{\mathfrak{R} - R} : MS_1 - R = R + \frac{R\mathfrak{e}}{\mathfrak{R} - R} : MS_1 + R,$$

woraus folgt: $$MS_1 = \frac{(\mathfrak{R} - R)R}{\mathfrak{e}}.$$

Nun war nach ††) $$\mathfrak{R} = \frac{RR'e}{R'^2 - R^2};$$

also: $$\mathfrak{R} - R = \frac{R'e - R'^2 + R^2}{R'^2 - R^2} \cdot R,$$

und ferner ist $$M\mathfrak{M} = \mathfrak{e} = \tfrac{1}{2}(M\Sigma - M\Sigma') = \frac{R^2 e}{R'^2 - R^2};$$

folglich $$MS_1 = \frac{(R'e - R'^2 + R^2)R^2}{R'^2 - R^2} \cdot \frac{R'^2 - R^2}{R^2 e};$$

also: $$MS_1 = \frac{R'e - R'^2 + R^2}{e}$$

$$= R' - \frac{R'^2}{e} + \frac{R^2}{e} = N'F' + MN;$$

folglich ist $$NS_1 = N'F'.$$

Deßgleichen muß sich verhalten:

$$\Sigma_1 \Sigma' : S'_1 \Sigma' = \Sigma_1 \Sigma : S'_1 \Sigma;$$

oder: $$\mathfrak{R} - \mathfrak{M}\Sigma_1 : S'_1 \Sigma' = \mathfrak{R} + \mathfrak{M}\Sigma_1 : S'_1 \Sigma.$$

Nach †) ist aber $$\mathfrak{M}\Sigma_1 = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R} - R} \cdot \mathfrak{e};$$

also ist $$\mathfrak{R} - \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{e}}{\mathfrak{R} - R} : S'_1 \Sigma' = \mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{e}}{\mathfrak{R} - R} : S'_1 \Sigma;$$

oder: $\mathfrak{R} - \frac{\mathfrak{R}e}{\mathfrak{R} - R} : MS'_1 - \mathfrak{R} = \mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{R}e}{\mathfrak{R} - R} : \mathfrak{M}S'_1 + \mathfrak{R}$;

folglich: $$\mathfrak{M}S'_1 = \frac{(\mathfrak{R} - R)\mathfrak{R}}{e}.$$

Es ist aber $\mathfrak{R} = \frac{RR'e}{R'^2 - R^2}$; $e = \frac{R^2 e}{R'^2 - R^2}$;

also: $$\frac{\mathfrak{R}}{e} = \frac{R'}{R};$$

also: $$\mathfrak{M}S'_1 = \frac{(\mathfrak{R} - R)R'}{R}.$$

Ferner ist $$M'S'_1 = M'\mathfrak{M} - \mathfrak{M}S'_1;$$

und $$M'\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}(M'\Sigma - M'\Sigma') + M'\Sigma'$$
$$= \tfrac{1}{2}(M'\Sigma + M'\Sigma') = \frac{R'^2 e}{R'^2 - R^2};$$

also: $$M'S'_1 = \frac{R'^2 e}{R'^2 - R^2} - \frac{(\mathfrak{R} - R)R'}{R}$$
$$= \frac{R'^2 e}{R'^2 - R^2} - \frac{R'e - R'^2 + R^2}{R'^2 - R^2} \cdot R';$$

oder $$M'S'_1 = R' = M'F'.$$

Es geht also die Polare des äußeren Centrums Σ_1 für den Kreis $\mathfrak{K}$ durch den Punkt F′. Es folgt weiter aus der letzten Gleichung:

$$N'S'_1 = N'F'.$$

Es liegt also S_1 um die Strecke N′F′ links von N, und S'_1 um die gleiche Strecke N′F′ rechts von N′. Also ist der Mittelpunkt D der Strecke NN′ zugleich der Mittelpunkt der Strecke $S_1 S'_1$. B) Es muß also die Potenzlinie des Kreispaares K und $\mathfrak{K}$ ebenfalls zusammenfallen mit der Potenzlinie der Kreise K, K′.

Suchen wir ferner die Potenzlinie der Kreise K′ und $\mathfrak{K}$, so haben wir zunächst die Aehnlichkeitscentra, die, das äußere durch Σ_2, das innere durch Σ'_2, bezeichnet werden mögen, zu bestimmen. Man überzeugt sich hier ebenso, wie in dem eben behandelten Falle, daß, wenn der Durchschnittspunkt der Polaren des inneren Aehnlichkeitscentrums Σ'_2 mit (M — M′) durch S_2 für den Kreis K′, durch S'_2 für den Kreis $\mathfrak{K}$ bezeichnet wird, die Gleichungen statt haben:

$$N'S_2 = N\mathfrak{F},$$
$$N'S'_2 = N\mathfrak{F}.$$

Es muß also der Halbirungspunkt der Strecke NN′ zugleich der Halbirungspunkt von $S_2 S'_2$ sein, oder C) die Potenzlinie von K, K′ muß zugleich die Potenzlinie von K′, $\mathfrak{K}$ sein. Zugleich folgt aus der zweiten Gleichung, daß die Polare des inneren Centrums Σ'_2 für den Kreis $\mathfrak{K}$ durch den Punkt $\mathfrak{F}$ geht.

Lassen wir vor der Hand die unter A), B), C) gemachten Bemerkungen weg, so haben wir zunächst den

32. **Lehrsatz.** Die Polare des äußeren Aehnlichkeitscentrums der beiden Kreise K, $\mathfrak{K}$ für $\mathfrak{K}$ schneidet die Centrallinie (M—M') im Punkte F' des Kreises K'. Die Polare des inneren Aehnlichkeitscentrums der beiden Kreise K', $\mathfrak{K}$ für $\mathfrak{K}$ schneidet die Centrallinie (M—M') im Punkte $\mathfrak{F}$ des Kreises K. Fig. 167.

Suchen wir ferner das äußere Aehnlichkeitscentrum Σ_3 der Kreise $\mathfrak{K}$ und k', so ist nach †), indem wir $\mathfrak{R}$ für R', $\frac{RR'}{e}$ für R, $N'\mathfrak{M}$ oder $M'\mathfrak{M} - M'N'$ für MM' oder e setzen, und bedenken, daß

$$\mathfrak{R} - \frac{R'R}{e} = \frac{RR'e}{R'^2 - R^2} - \frac{R'R}{e} = \frac{e^2 - (R'^2 - R^2)}{(R'^2 - R^2)e} \cdot R'R;$$

und $$M'\mathfrak{M} - M'N' = \frac{R'^2 e}{R'^2 - R^2} - \frac{R'^2}{e} = \frac{e^2 - (R'^2 - R^2)}{(R'^2 - R^2)e} \cdot R'^2$$

ist: $$\frac{R'R}{e} \cdot \frac{(R'^2 - R^2)e}{[e^2 - (R'^2 - R^2)]R'R} \cdot \frac{[e^2 - (R'^2 - R^2)]R'^2}{(R'^2 - R^2)e};$$

oder: $$N'\Sigma_3 = \frac{R'^2}{e} = N'M'.$$

Es fällt also Σ_3 nach M'. Ebenso überzeugt man sich sogleich, daß das innere Aehnlichkeitscentrum der beiden Kreise $\mathfrak{K}$ und k nach M fällt. Man sieht also:

33. **Lehrsatz.** Das äußere Aehnlichkeitscentrum der beiden Kreise $\mathfrak{K}$, k' liegt im Mittelpunkte M' des Kreises K'; das innere Aehnlichkeitscentrum der beiden Kreise $\mathfrak{K}$, k liegt im Mittelpunkte M des Kreises K. Fig. 167.

Suchen wir den Durchschnittspunkt der Potenzlinie von $\mathfrak{K}$ und k', so haben wir den Durchschnittspunkt S_3 der Polaren von Σ_3 für $\mathfrak{K}$ und den Durchschnittspunkt S'_3 der Polaren von Σ_3 für k' zu suchen. Ersterer ergiebt sich aus der harmonischen Proportion:

$$\Sigma\Sigma_3 : \Sigma'\Sigma_3 = \Sigma S_3 : \Sigma' S_3;$$

oder nach Lehrsatz 33. $\Sigma M' : \Sigma' M' = \mathfrak{R} + \mathfrak{M}S_3 : \mathfrak{R} - \mathfrak{M}S_3;$

oder nach †) $R' + R : R' - R = \mathfrak{R} + \mathfrak{M}S_3 : \mathfrak{R} - \mathfrak{M}S_3;$

woraus folgt: $R : R' = \mathfrak{M}S_3 : \mathfrak{R};$

also: $$\mathfrak{M}S_3 = \frac{\mathfrak{R}R}{R'} = \frac{R^2 e}{R'^2 - R^2}.$$

Es ist aber $$\frac{R^2 e}{R'^2 - R^2} = M\mathfrak{M}.$$

Es fällt also S_3 nach M.

Um S'_3 zu finden, haben wir

$$S'\Sigma_3 : \mathfrak{S}'\Sigma_3 = S'S'_3 : \mathfrak{S}'S'_3$$

oder da nach Lehrsatz 33. Σ_3 in M' liegt:

$$S'M' : \mathfrak{S}'M' = \frac{R'R}{e} - N'S'_3 : N'S'_3 + \frac{R'R}{e};$$

oder: $$\frac{R'^2}{e} - \frac{R'R}{e} : \frac{R'^2}{e} + \frac{R'R}{e} = \frac{R'R}{e} - N'S'_3 : N'S'_3 + \frac{R'R}{e};$$

oder: $$R' - R : R' + R = \frac{R'R}{e} - N'S'_3 : N'S'_3 + \frac{R'R}{e};$$

woraus folgt: $$N'S'_3 = \frac{R^2}{e}.$$

Da also, wie wir sahen, S_3 in M liegt, so ist $N'S_3 = N'M = N'N + NM = N'N + \frac{R^2}{e}$; also ist $S'_3S_3 = S'_3N' + N'N + NM$. Es ist also, da $S'_3N' = NM = \frac{R^2}{e}$ ist, der Mittelpunkt von NN' auch der von $S_3S'_3$; folglich fällt auch D) die Potenzlinie von $\mathfrak{K}$ und k' mit σ zusammen.

Um die Potenzlinie der Kreise $\mathfrak{K}$ und k zu finden, haben wir nach Lehrsatz 33. den Durchschnittspunkt S_4 und S'_4 der Polaren des inneren Aehnlichkeitscentrums M für $\mathfrak{K}$ und k mit (M — M') zu suchen. Man hat daher:

$$\Sigma M : \Sigma' M = \Sigma S_4 : \Sigma' S_4$$

oder nach †) $$R' + R : R' - R = \mathfrak{M}S_4 + \mathfrak{R} : \mathfrak{M}S_4 - \mathfrak{R}.$$

folglich $$\mathfrak{M}S_4 = \frac{\mathfrak{R}R'}{R} = \frac{R'^2 e}{R'^2 - R^2}.$$

Es war aber auch $$M'\mathfrak{M} = \frac{R'^2 e}{R'^2 - R^2};$$

also ist $$\mathfrak{M}S_4 = \mathfrak{M}M';$$

oder S_4 liegt in M'. Ferner hat man:

$$SM : \mathfrak{S}M = SS'_4 : \mathfrak{S}S'_4;$$

oder: $$\frac{R'R}{e} - \frac{R^2}{e} : \frac{R'R}{e} + \frac{R^2}{e} = NS'_4 - \frac{R'R}{e} : NS'_4 + \frac{R'R}{e};$$

oder: $$R' - R : R' + R = NS'_4 - \frac{R'R}{e} : NS'_4 + \frac{R'R}{e};$$

folglich $$NS'_4 = \frac{R'^2}{e}.$$

Da nun S_4 in M' liegt, so ist $NS_4 = NM' = NN' + M'N'$; also ist $S_4S'_4 = S'_4N + NN' + N'M'$; und da $S'_4N = \frac{R'^2}{e} = N'M'$ ist, so muß der Mittelpunkt von NN' auch der von $S_4S'_4$ sein. Es ist also E) σ auch die Potenzlinie von $\mathfrak{K}$ und k. Zugleich sehen wir:

34. Lehrsatz. Die Polare des äußeren Aehnlichkeitscentrums von $\mathfrak{K}$ und k' für $\mathfrak{K}$ schneidet die Centrallinie (M — M') im Mittelpunkte M des Kreises K; die Polare des inneren Aehnlichkeitscentrums von $\mathfrak{K}$ und k für $\mathfrak{K}$

schneidet die Centrallinie $(M - M')$ im Mittelpunkt M' des Kreises K'. Fig. 167.

Um die Potenzlinie des Kreispaares K' und k zu finden, suchen wir ihre Aehnlichkeitscentra Σ_5, Σ'_5. Wir setzen zu dem Zwecke in †) für R und e bezüglich $\frac{RR'}{e}$ und $e - \frac{R^2}{e}$. Dann ist:

$$N\Sigma_5 = \frac{\frac{RR'}{e}}{R' - \frac{RR'}{e}}\left(e - \frac{R^2}{e}\right); \quad N\Sigma'_5 = \frac{\frac{RR'}{e}}{R' + \frac{RR'}{e}} \cdot \left(e - \frac{R^2}{e}\right);$$

oder: $N\Sigma_5 = \frac{R}{e - R} \cdot \frac{e^2 - R^2}{e}$; $\quad N\Sigma'_5 = \frac{R}{e + R} \cdot \frac{e^2 - R^2}{e}$;

also: $N\Sigma_5 = \frac{R}{e}(e + R)$; $\quad N\Sigma'_5 = \frac{R}{e} \cdot (e - R)$;

oder: $N\Sigma_5 = R + \frac{R^2}{e}$; $\quad N\Sigma'_5 = R - \frac{R^2}{e}$;

oder: $N\Sigma_5 = MF + MN$; $\quad N\Sigma'_5 = M\mathfrak{F} - MN$.

Es fällt also Σ_5 nach F; Σ'_5 nach $\mathfrak{F}$; und ebenso überzeugt man sich, daß das äußere Aehnlichkeitscentrum des Kreispaares K und k′ nach $\mathfrak{F}'$, das innere nach F′ fällt. Man sieht also:

35. Lehrsatz. Die Kreise K und K′ sind bezüglich für die Kreispaare K′ und k; K und k′ die Potenzialkreise. Fig. 167.

Der Durchschnittspunkt S_5 der Polaren von Σ_5 oder F im Paare K′ und k für K′ bestimmt sich aus der Gleichung:

$$F'F : \mathfrak{F}'F = F'S_5 : \mathfrak{F}'S_5;$$

oder: $e - R' + R : e + R' + R = R' - M'S_5 : R' + M'S_5$,

woraus sich ergiebt: $\quad M'S_5 = \frac{R'^2}{e + R}$.

Um den Durchschnittspunkt S'_5 der Polaren von F für k zu finden, hat man:

$$\mathfrak{S}F : \mathfrak{s}F = \mathfrak{S}S'_5 : \mathfrak{s}S'_5$$

oder:

$$R - \left(\frac{RR'}{e} - \frac{R^2}{e}\right) : R + \left(\frac{RR'}{e} + \frac{R^2}{e}\right) = \frac{RR'}{e} - NS'_5 : \frac{RR'}{e} + NS'_5;$$

also: $\quad NS'_5 = \frac{R'}{e + R} \cdot \frac{RR'}{e} = \frac{R'^2}{e} \cdot \frac{R}{e + R}$.

Aus dem Werthe $M'S_5$ folgt sogleich:

$$M'N' - M'S_5 = \frac{R'^2}{e} - \frac{R'^2}{e + R} = \frac{R'^2}{e} \cdot \frac{R}{e + R},$$

oder: $\quad N'S_5 = \frac{R'^2}{e} \cdot \frac{R}{e + R}$.

Es liegt also S_5 um dieselbe Strecke $\frac{R'^2}{e} \cdot \frac{R}{e + R}$ links von N′, als S'_5 rechts von N; also ist der Halbirungspunkt von NN′ zugleich der

von $S_5S'_5$, oder F) die Potenzlinie von K, K' ist zugleich die Potenzlinie von K', k.

Suchen wir ferner die Durchschnittspunkte S_6, S'_6 der Polaren für K und k' für das Centrum $\mathfrak{F}'$ nach Lehrsatz 35., so haben wir:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F}' : F\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}S_6 : FS_6$$

oder $e + R' - R : e + R' + R = R - MS_6 : R + MS_6$.

also: $$MS_6 = \frac{R^2}{e + R'};$$

sodann $$S'\mathfrak{F}' : \mathfrak{s}\mathfrak{F}' = S'S'_6 : \mathfrak{s}S'_6;$$

oder:

$$R' + \frac{R'^2}{e} - \frac{RR'}{e} : R' + \frac{R'^2}{e} + \frac{RR'}{e} = \frac{RR'}{e} - N'S'_6 : \frac{RR'}{e} + N'S'_6;$$

also: $$N'S'_6 = \frac{R}{e + R'} \cdot \frac{RR'}{e} = \frac{R^2}{e} \cdot \frac{R'}{e + R'}.$$

Aus dem Werthe von MS_6 folgt nun:

$$MN - MS_6 = \frac{R^2}{e} - \frac{R^2}{e + R'} = \frac{R^2}{e} \cdot \frac{R'}{e + R'}.$$

Es liegt also S_6 ebenso weit von N rechts, als S'_6 von N' links; daher wird die Strecke $S_6S'_6$ zugleich durch den Mittelpunkt von NN' halbirt und G) die Potenzlinie von K, K' ist zugleich die von K, k'.

Um die Potenzlinie des Kreispaares K, k zu finden, haben wir erst eins ihrer Aehnlichkeitscentra, z. B. das äußere, Σ_7, zu suchen. Man hat nun nach †)

$$M\Sigma_7 = \frac{R}{R - \frac{RR'}{e}} \cdot \frac{R^2}{e} = \frac{R^2}{e - R'};\quad N\Sigma_7 = \frac{\frac{RR'}{e}}{R - \frac{RR'}{e}} \cdot \frac{R^2}{e} = \frac{R'}{e - R'} \cdot \frac{R^2}{e}.$$

Um nun den Durchschnittspunkt S_7 der Polaren von Σ_7 für K zu finden, hat man die Proportion.

$$\mathfrak{F}\Sigma_7 : F\Sigma_7 = \mathfrak{F}S_7 : FS_7,$$

oder: $$R - \frac{R^2}{e - R'} : R + \frac{R^2}{e - R'} = MS_7 - R : MS_7 + R$$

also: $$MS_7 = e - R'.$$

Es liegt also S_7 in F'.

Ferner um S'_7 zu finden, hat man:

$$\mathfrak{s}\Sigma_7 : S\Sigma_7 = \mathfrak{s}S'_7 : SS'_7$$

oder:

$$\frac{RR'}{e} - \frac{R'}{e - R'} \cdot \frac{R^2}{e} : \frac{RR'}{e} + \frac{R'}{e - R'} \cdot \frac{R^2}{e} = NS'_7 - \frac{RR'}{e} : NS'_7 + \frac{RR'}{e};$$

folglich: $$NS'_7 = \frac{(e - R')R'}{e} = R' - \frac{R'^2}{e}.$$

Es ist also: $$NS'_7 = NF'.$$

Da nun S_7 sich in F' befindet, so liegt S_7 um dieselbe Strecke N'F'

rechts von N' als S'_7 links von N. Es wird also $S_7S'_7$ durch den Mittelpunkt von NN' halbirt oder H) die Potenzlinie von K, k fällt mit der von K, K' zusammen.

Es sei endlich Σ_8 das äußere Aehnlichkeitscentrum von K', k', so ist nach †).

$$M'\Sigma_8 = \frac{R'}{R' - \frac{RR'}{e}} \cdot \frac{R'^2}{e} = \frac{R'^2}{e - R'}; \quad N'\Sigma_8 = \frac{\frac{RR'}{e}}{R' - \frac{RR'}{e}} \cdot \frac{R'^2}{e} = \frac{R}{e - R} \cdot \frac{R'^2}{e};$$

folglich hat man für den Durchschnittspunkt S_8 der Polaren von Σ_8 für K':

$$F'\Sigma_8 : \mathfrak{F}'\Sigma_8 = F'S_8 : \mathfrak{F}'S_8;$$

oder: $$R' - \frac{R'^2}{e - R} : R' + \frac{R'^2}{e - R} = M'S_8 - R' : M'S_8 + R'$$

also: $$M'S_8 = e - R.$$

Es liegt also S_8 in $\mathfrak{F}$.

Für den Durchschnittspunkt S'_8 der Polaren von Σ_8 für k' hat man:

$$\mathfrak{s}'\Sigma_8 : S'\Sigma_8 = \mathfrak{s}'S'_8 : S'S'_8;$$

oder:

$$\frac{RR'}{e} - \frac{R}{e - R} \cdot \frac{R'^2}{e} : \frac{RR'}{e} + \frac{R}{e - R} \cdot \frac{R'^2}{e} = N'S'_8 - \frac{RR'}{e} : N'S'_8 + \frac{RR'}{e};$$

also: $$N'S'_8 = \frac{(e - R)R}{e} = R - \frac{R^2}{e};$$

folglich ist $$N'S'_8 = N\mathfrak{F}.$$

Da nun S_8 in $\mathfrak{F}$ liegt, so liegt S_8 um dieselbe Strecke $N\mathfrak{F}$ links von N, als S'_8 rechts von N'. Es wird also $S_8S'_8$ durch den Mittelpunkt von NN' halbirt, oder J) die Potenzlinie von K', k' fällt mit der von K, K' zusammen.

Wir sahen nun vorhin, daß die Polare des äußeren Aehnlichkeitscentrums der Kreise K, k für K durch F' ging, ebenso läßt sich zeigen, daß die Polare des inneren Aehnlichkeitscentrums derselben zwei Kreise für K durch $\mathfrak{F}'$ geht. Ferner sahen wir, daß die Polare des äußeren Aehnlichkeitscentrums der Kreise K', k' für K' durch $\mathfrak{F}$ geht, und ganz auf gleiche Weise findet sich, daß die Polare ihres inneren Aehnlichkeitscentrums für K' durch F geht. Man sieht also:

36. Lehrsatz. In dem Kreispaare K, k gehen die Polaren der beiden Aehnlichkeitscentren für K durch die Durchschnittspunkte $F'\ \mathfrak{F}'$ des Kreises K' mit der Centrallinie $(M - M')$. In dem Kreispaare K', k' gehen die Polaren der beiden Aehnlichkeitscentren für K' durch die Durchschnittspunkte $\mathfrak{F}, F$ des Kreises K mit der Centrallinie $(M - M')$. Fig. 167.

Ferner fassen wir die Sätze A) bis J) zusammen in den merkwürdigen:

37. Lehrsatz. Die zehn Kreispaare: K und K'; k und k';

K und $\mathfrak{K}$; K′ und $\mathfrak{K}$; k und $\mathfrak{K}$; k′ und $\mathfrak{K}$; K und k; K und k′ K′ und k; K′ und k′ haben alle eine und dieselbe Potenzlinie σ.

Diese steht senkrecht auf der gemeinschaftlichen Centrallinie (M − M′) und halbirt die Centraldistanz NN′ der beiden gleich großen Kreise k und k′. Fig. 167.

Sodann ergeben sich noch mehrere harmonische Punktreihen, außer der in Lehrsatz 28. erwähnten, auf (M − M′). Ist nämlich H der Mittelpunkt der Centraldistanz MM′ der Kreise K und K′ und beschreibt man mit $HM = HM' = \frac{e}{2}$ einen Kreis, der den Potenzialkreis $\mathfrak{K}$ in J_1, J_2 schneidet, und zieht die diesem neuen und dem Potenzialkreis gemeinschaftliche Sehne ($J_1 - J_2$), welche die Centrallinie (M − M′) in D_1 schneidet, so hat man:

$$D_1J_1^2 + \mathfrak{M}D_1^2 = \mathfrak{R}^2;$$

$$D_1J_1^2 + HD_1^2 = \frac{e^2}{4};$$

folglich:
$$\mathfrak{M}D_1^2 - HD_1^2 = \mathfrak{R}^2 - \frac{e^2}{4};$$

oder:
$$(\mathfrak{M}M' - M'D_1)^2 - \left[\frac{e}{2} - (e - M'D_1)\right]^2 = \mathfrak{R}^2 - \frac{e^2}{4};$$

oder:
$$(\mathfrak{M}M' - M'D_1)^2 - \left(M'D_1 - \frac{e}{2}\right)^2 = \mathfrak{R}^2 - \frac{e^2}{4}.$$

Führt man die Quadrirungen aus, und setzt für $\mathfrak{M}M'$ seinen bei Untersuchung der Potenzlinie des Kreispaares K und $\mathfrak{K}$ gefundenen Werth $\frac{R'^2e}{R'^2 - R^2}$, so ergiebt sich:

$$e\left(1 - \frac{2R'^2}{R'^2 - R^2}\right) M'D_1 = \frac{R'^2e^2}{(R'^2 - R^2)^2}(R^2 - R'^2)$$

oder:
$$e\,(R'^2 + R^2)\,M'D_1 = R'^2e^2;$$

also:
$$M'D_1 = \frac{R'^2e}{R'^2 + R^2};$$

folglich:
$$MD_1 = \frac{R^2e}{R'^2 + R^2}.$$

Es war aber $\frac{R'^2e}{R'^2 - R^2} = \mathfrak{M}M'$; $\frac{R^2e}{R'^2 - R^2} = \mathfrak{M}M$. Man hat daher sogleich die Proportion:

$$MD_1 : M'D_1 = M\mathfrak{M} : M'\mathfrak{M}.$$

Es wird also die Strecke MM′ durch D_1 und $\mathfrak{M}$ harmonisch getheilt. Man sieht also, wenn man bedenkt, daß ($J_1 - J_2$) die Potenzlinie der Kreise $\mathfrak{K}$ und des von H mit $\frac{e}{2}$ beschriebenen ist.

38. Lehrsatz. Der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ des Potenzialkreises $\mathfrak{K}$ ist für $\mathfrak{K}$ der Pol der Potenzlinie ($J_1 - J_2$) des Kreises $\mathfrak{K}$ und des von H mit $\frac{e}{2}$ beschriebenen Kreises.

Ferner ist:

$$\Sigma D_1 = \Sigma M + MD_1 = \frac{Re}{R'-R} + \frac{R^2e}{R'^2+R^2} = \frac{R'+R}{R'-R} \cdot \frac{RR'e}{R'^2+R^2};$$

$$\Sigma' D_1 = \Sigma' M - MD_1 = \frac{Re}{R'+R} - \frac{R^2e}{R'^2+R^2} = \frac{R'-R}{R'+R} \cdot \frac{RR'e}{R'^2+R^2};$$

also hat man:

$$\Sigma D_1 : \Sigma' D_1 = \frac{R'+R}{R'-R} : \frac{R'-R}{R'+R}.$$

Es ist aber ferner:

$$\Sigma H = \Sigma M + \frac{e}{2} = \frac{Re}{R'-R} + \frac{e}{2} = \frac{R'+R}{R'-R} \cdot \frac{e}{2};$$

$$\Sigma' H = \frac{e}{2} - \Sigma' M = \frac{e}{2} - \frac{Re}{R'+R} = \frac{R'-R}{R'+R} \cdot \frac{e}{2};$$

also: $$\Sigma H : \Sigma' H = \frac{R'+R}{R'-R} : \frac{R'-R}{R'+R};$$

folglich verhält sich:

$$\Sigma D_1 : \Sigma' D_1 = \Sigma H : \Sigma' H.$$

Man erhält also den

39. Lehrsatz. Der Durchmesser $\Sigma\Sigma'$ des Potenzialkreises $\mathfrak{K}$ wird von den Punkten D_1 und H harmonisch getheilt; H ist also für den von H mit $\frac{e}{2}$ beschriebenen Kreis der Pol der Potenzlinie $(J_1 - J_2)$ dieses Kreises und des Kreises $\mathfrak{K}$.

Nach Lehrsatz 33. liegt nun das äußere Aehnlichkeitscentrum Σ_3 des Kreispaares $\mathfrak{K}$ und k' in M, das innere Aehnlichkeitscentrum Σ'_4 des Kreispaares $\mathfrak{K}$ und k in M'. Es ist also, wenn Σ'_3 das innere Aehnlichkeitscentrum von $\mathfrak{K}$, k'; Σ_4 das äußere von $\mathfrak{K}$, k ist,

$$\Sigma'_3 N' = \frac{\frac{RR'}{e}}{\mathfrak{R} + \frac{RR'}{e}} \cdot \mathfrak{M}N'; \qquad \Sigma_4 N = \frac{\frac{RR'}{e}}{\mathfrak{R} - \frac{RR'}{e}} \cdot \mathfrak{M}N;$$

oder:

$$\mathfrak{M}N' : \Sigma'_3 N' = \mathfrak{R} + \frac{RR'}{e} : \frac{RR'}{e}; \; \mathfrak{M}N : \Sigma_4 N = \mathfrak{R} - \frac{RR'}{e} : \frac{RR'}{e};$$

oder:

$$\mathfrak{M}N' : \mathfrak{R} + \frac{RR'}{e} = \Sigma'_3 \mathfrak{M} : \mathfrak{R}; \; \mathfrak{M}N : \mathfrak{R} - \frac{RR'}{e} = \Sigma_4 \mathfrak{M} : \mathfrak{R};$$

woraus durch Addition und Subtraction folgt:

$$\Sigma S' : \mathfrak{R} + \frac{RR'}{e} = \Sigma_3 \Sigma' : \mathfrak{R}; \qquad \Sigma S : \mathfrak{R} - \frac{RR'}{e} = \Sigma_4 \Sigma : \mathfrak{R};$$

$$\Sigma' S' : \mathfrak{R} + \frac{RR'}{e} = \Sigma'_3 \Sigma' : \mathfrak{R}; \qquad \Sigma' S : \mathfrak{R} - \frac{RR'}{e} = \Sigma_4 \Sigma' : \mathfrak{R};$$

also ist: $\Sigma S' : \Sigma'_3 \Sigma = \Sigma' S' : \Sigma'_3 \Sigma'$; $\qquad \Sigma S : \Sigma_4 \Sigma = \Sigma' S : \Sigma_4 \Sigma'$.

Nun ist

$$\Sigma S' = \mathfrak{K} + \mathfrak{M}M' - \left(\frac{R'^2}{e} - \frac{RR'}{e}\right); \quad \Sigma S = \mathfrak{K} + \mathfrak{M}M - \left(\frac{RR'}{e} - \frac{R^2}{e}\right).$$

Nun war $\mathfrak{M}M' = \frac{R'^2 e}{R'^2 - R^2}$; $\mathfrak{M}M = \frac{R^2 e}{R'^2 - R^2}$

und $\mathfrak{K} = \frac{RR'e}{R'^2 - R^2}$, also $\mathfrak{M}M' = \frac{R'}{R} \cdot \mathfrak{K}$; $\mathfrak{M}M = \frac{R}{R'} \cdot \mathfrak{K}$;

folglich

$$\Sigma S' = \frac{R' + R}{R} \cdot \mathfrak{K} - (R' - R)\frac{R'}{e}; \quad \Sigma S = \frac{R' + R}{R'} \cdot \mathfrak{K} - (R' - R)\frac{R}{e};$$

oder vermöge des Werthes von $\mathfrak{K}$:

$$\Sigma S' = \frac{R'e}{R' - R} - (R' - R)\frac{R'}{e}; \quad \Sigma S = \frac{Re}{R' - R} - (R' - R)\frac{R}{e}.$$

Ferner ist:

$$\Sigma' S' = \Sigma S' - 2\mathfrak{K} - 2\frac{RR'}{e}; \quad \Sigma' S = 2\mathfrak{K} - \Sigma S - 2\frac{RR'}{e};$$

also:

$$\Sigma' S' = \frac{R'e}{R' + R} - (R' + R)\frac{R'}{e}; \quad \Sigma' S = \frac{Re}{R' + R} - (R' + R)\frac{R}{e};$$

Vermöge der Proportionen:

$$\Sigma S' : \Sigma'_3\Sigma = \Sigma' S' : \Sigma'_3\Sigma'; \quad \Sigma S : \Sigma_4\Sigma = \Sigma' S : \Sigma_4\Sigma'$$

oder $\Sigma'_3\Sigma : \Sigma'_3\Sigma' = \Sigma S' : \Sigma' S'$; $\Sigma_4\Sigma : \Sigma_4\Sigma' = \Sigma S : \Sigma' S$;

hat man also, indem man beide zu einer vereinigt:

$$\frac{\Sigma'_3\Sigma}{\Sigma'_3\Sigma'} : \frac{\Sigma_4\Sigma}{\Sigma_4\Sigma'} = \frac{\Sigma S'}{\Sigma' S'} : \frac{\Sigma S}{\Sigma' S},$$

oder:

$$\frac{\Sigma'_3\Sigma}{\Sigma'_3\Sigma'} : \frac{\Sigma_4\Sigma}{\Sigma_4\Sigma'} = \frac{\Sigma S'}{\Sigma S} : \frac{\Sigma' S'}{\Sigma' S}.$$

Aus den Werthen von $\Sigma S'$, ΣS, $\Sigma' S'$, $\Sigma' S$ sieht man nun sogleich, daß sich verhält:

$$\frac{\Sigma S'}{\Sigma S} = \frac{R'}{R}; \quad \frac{\Sigma' S'}{\Sigma' S} = \frac{R'}{R};$$

es ist also die zweite Seite der letzten Doppelproportion $= 1$, folglich auch

$$\frac{\Sigma'_3\Sigma}{\Sigma'_3\Sigma'} : \frac{\Sigma_4\Sigma}{\Sigma_4\Sigma'} = 1;$$

oder es verhält sich:

$$\Sigma'_3\Sigma : \Sigma'_3\Sigma' = \Sigma_4\Sigma : \Sigma_4\Sigma'.$$

Nach Lehrsatz 6. ist aber auch:

$$M'\Sigma : M'\Sigma' = M\Sigma : M\Sigma'$$

und nach Lehrsatz 33. war M′ das äußere Aehnlichkeitscentrum der Kreise $\mathfrak{K}$, k′; M das innere Aehnlichkeitscentrum der Kreise $\mathfrak{K}$, k. Wir bezeichnen nun kurz sowohl Σ'_3 und Σ_4, als M′ und M als „ungleichnamige Aehnlichkeitscentra" der Kreispaare $\mathfrak{K}$, k′ und $\mathfrak{K}$, k; und können daher sagen:

40. **Lehrsatz.** Die Strecke zwischen zwei ungleichna-

migen Aehnlichkeitscentren der zwei Kreispaare $\mathfrak{K}$, k′ und $\mathfrak{K}$, k, also die Strecke $\Sigma'_3\Sigma_4$ und M′M, wird von den zwei Aehnlichkeitscentren Σ, Σ′ des Kreispaares K, K′ harmonisch getheilt.

Es ist also der Lehrsatz 6. nur ein Theil des hier aufgestellten allgemeineren Gesetzes.

Liegt insbesondere Fig. 165. von den beiden Kreisen K, K′ der eine ganz oder theilweise außerhalb des anderen, so müssen offenbar von jedem Punkt P des Potenzialkreises $\mathfrak{K}$ beide Kreise K, K′ unter demselben Winkel gesehen werden. Denn, wie man sich erinnert, war der Kreis $\mathfrak{K}$ der geometrische Ort der Punkte P, welche die Beschaffenheit haben, daß, wenn man von P eine Gerade α durch K und von P durch K′ eine zweite Gerade α' so zieht, daß der von α' und (P — M′) gebildete Winkel gleich dem von α und (P — M) gebildeten Winkel ist, daß also dann die Gleichung gilt: $PA \cdot P\mathfrak{A}' = P\mathfrak{A} \cdot PA'$. Legt man nun von P aus eine Tangente γ an K, so fallen im Berührungspunkte Γ derselben die beiden Punkte A und $\mathfrak{A}$ zusammen; es muß also, der Natur des Kreises $\mathfrak{K}$ zufolge, einen von P ausgehenden Strahl γ' (in der Figur geht derselbe zufällig auch durch Σ′) geben, der den Kreis K′ in zwei solchen Punkten Γ′, Γ″ schneidet, daß $P\Gamma \cdot P\Gamma'' = P\Gamma \cdot P\Gamma'$ ist, und daß γ' mit (P — M′) denselben Winkel bildet, wie γ mit (P — M). Aus $P\Gamma \cdot P\Gamma'' = P\Gamma \cdot P\Gamma'$ folgt aber $P\Gamma' = P\Gamma''$. Es muß also γ' den Kreis K′ ebenfalls berühren. Es bilden also die von P an K und K′ gezogenen Tangenten γ, δ; γ', δ' gleiche Winkel $\angle \gamma\delta = \angle \gamma'\delta'$. Fallen K und K′ nur zum Theil in einander, so läßt sich derselbe Schluß auf jeden Punkt P des Potenzialkreises anwenden, der außerhalb K und K′ liegt. Man sieht also:

41. Lehrsatz. Liegt einer der Kreise K, K′ ganz oder theilweise außerhalb des anderen, so werden bezüglich von jedem oder von jedem außerhalb K und K′ liegenden Punkt des Umfanges des Kreises $\mathfrak{K}$ die beiden Kreise K, K′ unter gleichen Winkeln gesehen.

Es seien nun α, β', Fig. 165., ein Paar von einem Punkte P des Kreises $\mathfrak{K}$ ausgehende Strahlen, und zwar so, daß $\angle \alpha c = \angle \beta' c'$ ist, und α und β' die (M — M′) beide zugleich auf der Strecke MM′ oder zugleich (wie β und α') auf der Strecke M∞M′ treffen. Nun ist nach Lehrsatz 6. oder 40. Punktreihe (M — M′), MΣM′Σ′ harmonisch, folglich auch Strahlbüschel $P, c\rho c'\rho'$ harmonisch. (In der Figur fällt (P — Σ′) oder ρ' sehr nahe an die Tangente δ). Da aber $\angle \rho\rho' = 1R$ ist, weil er über dem Halbkreise steht, so ist nach § 1. Lehrsatz 27. $\angle \rho' c' = \angle \rho' c$. Nun ist, wenn α und β' die angegebene Lage haben, im Falle beide die (M — M′) auf der Strecke MM′ treffen, $\angle \rho'\alpha = \angle \rho' c - \angle c\alpha$; $\angle \rho'\beta' = \angle \rho' c' - \angle c'\beta'$, also, da $\angle \rho' c = \angle \rho' c'$, $\angle c\alpha = \angle c'\beta'$ ist, $\angle \rho'\alpha = \angle \rho'\beta'$; folglich ist nach § 1. Lehrsatz 27. auch Strahlbüschel $P, \rho\beta'\rho'\alpha$ harmonisch. Schnei-

den zwei von P ausgehende Strahlen, wie β und α' die $(M - M')$ auf der Strecke $M \infty M'$, so ist $\angle \rho'\beta = \angle \rho'c + \angle c\beta$; $\angle \rho'\alpha' = \angle \rho'c' + \angle c'\alpha'$; also $\angle \rho'\beta = \angle \rho'\alpha'$, folglich auch Strahlbüschel $P,_{\rho\alpha'\rho'\beta}$ harmonisch. Da ferner nach Lehrsatz 41. $\angle \gamma'\delta' = \angle \gamma\delta$ und $\angle c'\gamma' = \angle c\gamma = \angle c'\delta' = \angle c\delta$ ist, so ist insbesondere auch Strahlbüschel $P,_{\rho\gamma'\rho'\delta}$ und $P,_{\rho\delta'\rho'\gamma}$ harmonisch. Man hat also den

42. **Lehrsatz.** Jede zwei von einem Punkt P im Umfang des Potenzialkreises $\mathfrak{K}$ ausgehenden Strahlen α, β'; β, α'; ...., die mit den Centralstrahlen c, c' gleiche Winkel bilden, $\angle c\alpha = \angle c'\beta'$; $\angle c\beta = \angle c'\alpha'$, und die zugleich so liegen, daß α und β'; β und α'; .... die Centrallinie $(M - M')$ **zugleich** auf der Strecke MM' oder **zugleich** auf der Strecke $M \infty M'$ schneiden, bilden als zugeordnete Strahlen mit den beiden von P nach den Aehnlichkeitspunkten Σ, Σ' gehenden Strahlen ρ, ρ' harmonische Strahlbüschel $P,_{\rho\beta'\rho'\alpha}$; $P,_{\rho\alpha'\rho'\beta}$; etc.

Insbesondere bilden jede zwei von einem Punkte P des Potenzialkreises an K und K' gelegte Tangenten γ, δ'; δ, γ', wenn sie dieselbe Lage haben, wie α, β' oder β, α' mit ρ, ρ' harmonische Strahlbüschel $P,_{\rho\gamma'\rho'\delta}$; $P,_{\rho\delta'\rho'\gamma}$. Fig. 165.

Es seien ferner c, c', Fig. 168., ein Paar von einem Punkte P des Potenzialkreises $\mathfrak{K}$ ausgehende Centralstrahlen, Q, Q' die Durchschnitte der Polaren von P bezüglich für K, K' mit c, c'; so liegen, wie wir in Lehrsatz 27. sahen, Q und Q' bezüglich auf der Peripherie des Kreises k, k'. Da also Q ein Punkt der Polaren von P ist, so ist $PC : QC = P\mathfrak{C} : Q\mathfrak{C}$ oder $PM - R : R - MQ = PM + R : R + MQ$, oder $PM - R : PM + R = R - MQ : R + MQ$, oder $2PM : PM + R = 2R : R + MQ$; also $MQ = \frac{R^2}{PM}$; und ebenso ist $M'Q' = \frac{R'^2}{PM'}$. Man hat also:

$$MQ : M'Q' = \frac{R^2}{PM} : \frac{R'^2}{PM'} = \frac{R^2}{R'^2} : \frac{PM}{PM'};$$

der oben (Seite 447.) gefundenen Gleichung a) gemäß ist aber $\frac{PM}{PM'} = \frac{R}{R'}$ also:

$$MQ : M'Q' = R : R'$$

oder nach a): $$MQ : M'Q' = PM : PM'.$$

Es ist also die Verbindungsgerade $(Q - Q') \parallel (M - M')$.

Ferner ist $MC = R$, $M'C' = R'$; also auch:

$$MC : M'C' = PM : PM';$$

folglich auch $(C - C') \parallel (M - M')$ und ebenso auch $(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}') \parallel (M - M')$.

Fällt man nun von Q und Q' die Lothe $QL, Q'L'$ auf $(M - M')$ und zieht die Halbmesser $NQ, N'Q'$ der Kreise k, k', so läßt sich leicht zeigen, daß L rechts von N, L' links von N', oder umgekehrt liegen muß. Denn nach Lehrsatz 33. ist M' das äußere Aehnlichkeits-

centrum von $\mathfrak{K}$ und k'; denkt man sich also von M' eine Tangente an $\mathfrak{K}$ gezogen, so berührt sie auch k'. Der Berührungspunkt dieser von M' gezogenen Tangente mit $\mathfrak{K}$ heiße $\mathfrak{P}$, der Berührungspunkt an k' heiße $\mathfrak{Q}'$, so ist $\angle \mathfrak{Q}'N'M' = \angle \mathfrak{P}\mathfrak{M}M'$ spitz, also liegt $\mathfrak{Q}'$ links von einer in N' auf (M − M') errichteten Senkrechten. Fällt man nun auch von $\mathfrak{P}$ auf (M − M') ein Loth, und nennt seinen noch unbekannten Fußpunkt U, so hat man, weil $\triangle U\mathfrak{M}\mathfrak{P} \sim \triangle \mathfrak{P}\mathfrak{M}M'$ ist: $\mathfrak{M}U : \mathfrak{M}\mathfrak{P} = \mathfrak{M}\mathfrak{P} : \mathfrak{M}M'$, oder $\mathfrak{M}U = \frac{\mathfrak{R}^2}{\mathfrak{M}M'}$, oder, da $\mathfrak{R} = \frac{RR'e}{R'^2 - R^2}$, $\mathfrak{M}M' = \frac{R'^2 e}{R'^2 - R^2}$ war, $\mathfrak{M}U = \frac{R^2 e}{R'^2 - R^2}$. Es war aber $\frac{R^2 e}{R'^2 - R^2} = \mathfrak{M}M$; es liegt also U in M. Da nun M zwischen N und $\mathfrak{M}$ liegen muß, (denn es ist $MN = \frac{R^2}{e}$, aber NS, Fig. 167., $= \frac{RR'}{e}$, also, da $R' > R$ ist, $NS > NM$), so muß $\angle \mathfrak{P}NM$ spitzig sein. Sucht man also den Durchschnittspunkt $\mathfrak{Q}$ der Polaren von $\mathfrak{P}$ für k mit der ($\mathfrak{P}$ − N), so liegt $\mathfrak{Q}$ rechts von einer in N auf (N − M') errichteten Senkrechten. Läßt man nun in der Vorstellung den Strahl (M' − $\mathfrak{P}$) sich so drehen, daß er aufhört, den Kreis $\mathfrak{K}$ und k' zu berühren, daß er (wegen der Aehnlichkeit) vielmehr jeden in zwei Punkten schneidet, z. B. Fig. 166., den $\mathfrak{K}$ in P_1, P_2, und bedenkt man, daß, je weiter sich ein Punkt P von einem Kreise entfernt, um so mehr seine Polare und also auch der Durchschnittspunkt dieser Polaren mit der Geraden, die P mit dem Kreismittelpunkte verbindet, sich dem Mittelpunkte nähern muß, so sieht man, daß, wenn das entferntere Ende P_1 des um M' sich drehenden Strahles den Kreis $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{P}$ über Σ bis zum entgegengesetzten Berührungspunkt durchläuft, der zugehörige Durchschnittspunkt Q'_1 den Kreis k' von $\mathfrak{Q}'$ über S' (Fig. 167.) bis zum entgegengesetzten Berührungspunkt beschreibt. Es muß aber, da schon $\angle \mathfrak{P}NM$ spitzig war, um so mehr jeder Winkel P_1NM spitzig sein, also muß der Durchschnittspunkt Q_1 in K den Bogen des Kreises k beschreiben, der mit dem oberen Durchschnittspunkt $\mathfrak{Q}$ von ($\mathfrak{P}$ − M) mit k anfängt, und mit dem unteren Durchschnittspunkt von ($\mathfrak{P}$ − M) mit k aufhört, und durch den Punkt S (Fig. 167.) geht. Es bewegt sich also Q'_1 von $\mathfrak{Q}'$ von rechts nach links und Q_1 von $\mathfrak{Q}$ aus von links nach rechts. Betrachtet man das dem Kreise K' nähere Ende P_2 eines um M' sich drehenden Strahls, so muß, je mehr sich P_2 dem K' nähert, der Punkt Q'_2 um so näher an die Peripherie von K' kommen, also den Bogen von $\mathfrak{Q}'$ bis zum entgegengesetzten Berührungspunkt, der S' (Fig. 167.) enthält, durchlaufen, während P_2 von $\mathfrak{P}$ über Σ' nach dem entgegengesetzten Berührungspunkte geht. Es muß also Q'_2 sich von links nach rechts bewegen. Dagegen muß Q_2 sich von rechts nach links drehen, und den Bogen auf k von $\mathfrak{Q}$ nach dem entgegengesetzten Berührungspunkt über S durchlaufen. Hat insbesondere P_2 eine solche Lage, daß der zugehörige Punkt Q_2 auf der in N auf (M − M') er-

richteten Senkrechten liegt, daß also $\angle SNQ_2$ (Fig. 167.) $= 1R$ ist, so muß auch der zugehörige Punkt Q'_2 in der im Punkt N' auf $(M - M')$ errichteten Senkrechten liegen. Denn wir sahen oben, daß, wenn Q, Q' irgend zwei demselben Punkt P des Kreises $\mathfrak{K}$ zugehörige Punkte von k und k' sind, immer $(Q - Q') \| (M - M')$ ist. Da nun in dem genannten speciellen Falle Q_2 um die Strecke $\frac{RR'}{e}$ von $(M - M')$ senkrecht entfernt ist, so muß dieß auch mit dem zugehörigen Q'_2 der Fall sein; es giebt aber nur einen solchen Punkt in k', nämlich den Durchschnittspunkt der Peripherie von k' mit der in N' errichteten Senkrechten. Es müssen demnach, wenn man von zwei zusammengehörigen Punkten Q, Q', Fig. 168., der Kreise k, k' Lothe $QL, Q'L'$ auf $(M - M')$ fällt, ihre Fußpunkte L, L' entweder beide zugleich auf der Strecke NN', oder zugleich auf der Strecke $N \infty N'$, oder zugleich bezüglich in N und N' liegen*).

Fällt man also von zwei zusammengehörigen Punkten Q, Q' die Lothe $QL, Q'L'$, Fig. 168., auf $(M - M')$, so ist, da $(Q - Q')$

*) Man kann diese Verhältnisse auch bei den übrigen Lagen der Kreise K, K' verfolgen. Versteht man stets unter K' den größeren mit dem Radius R', und unter K den kleineren mit dem Radius R, so kann I. K ganz innerhalb K' liegen, und zwar: 1) kann M' außerhalb K, 2) M' innerhalb K sich befinden. Im ersten Falle I. 1) ist $R' > e > R$, im Falle I. 2) ist $R' > R > e$; in beiden ist $e < R' - R$; also liegt, da $M'N' = \frac{R'^2}{e} = \frac{R'}{e} \cdot R'$ und $\frac{R'}{e} > 1$ ist, N' außerhalb K'. Um zu entscheiden, ob k' den Kreis K' schneidet, hat man zu untersuchen, ob $M'N' - \frac{RR'}{e} >$ oder $< R'$ ist. Nun ist in I. 1) und I. 2) $M'N' - \frac{RR'}{e} = \frac{R'^2}{e} - \frac{RR'}{e} = \frac{R'}{e}(R' - R) = \frac{R' - R}{e} \cdot R'$. Nun ist $\frac{R' - R}{e} > 1$, also liegt auch der der Peripherie von K' nächste Punkt von k' außerhalb K'; also k' ganz außerhalb K'. Ferner kann II. K zum Theil inner-, zum Theil außerhalb K' sich befinden, und zwar: 1) kann M außerhalb K', 2) M innerhalb K' liegen. Im Falle II. 1) ist $e > R' > R$, im Falle II. 2) ist $R' > e > R$; in II. 1) zugleich $e < R' + R$. Nun ist im Falle II. 1) $M'N' = \frac{R'^2}{e} = \frac{R'}{e} \cdot R'$, weil $\frac{R'}{e} < 1$ ist, $< R'$; also liegt N' innerhalb K'. Um zu sehen, ob k' den Kreis K' schneidet, hat man den Werth $M'N' + \frac{R'R}{e} = \frac{R' + R}{e} R'$ zu untersuchen; nun ist $\frac{R' + R}{e} > 1$, also liegt der am weitesten von M' entfernte Punkt von k' außerhalb K'. Im Falle II. 2) ist $M'N' = \frac{R'}{e} \cdot R'$, und da dann $\frac{R'}{e} > 1$ ist, so liegt N' außerhalb K'. Zugleich ist dann $e > R' - R$, also $M'N' - \frac{RR'}{e} = \frac{R'^2}{e} - \frac{RR'}{e} = \frac{R' - R}{e} \cdot R'$; folglich liegt, da $\frac{R' - R}{e} < 1$ ist, der dem Punkt M' nächste Punkt der Peripherie des Kreises k' innerhalb K' u. s. w. Daß in den Fällen II. 1), II. 2) der Kreis $\mathfrak{K}$ durch die Durchschnittspunkte von K und K' geht, ist schon oben aus Lehrsatz 26. gefolgert worden.

$\parallel (M - M')$ ist, in den Dreiecken NQL und $N'Q'L'$: $NQ = N'Q'$, $QL = Q'L'$; $\angle QLN = \angle Q'L'N'$, also $\triangle NQL \cong \triangle N'Q'L'$, und $NL = N'L'$. Da nun L und L' beide zugleich in NN' oder beide zugleich auf der Strecke $N \infty N'$ liegen, so ist der Halbirungspunkt von NN' zugleich der Halbirungspunkt von LL'. Da nun LL' gleich und parallel QQ' ist, und die Potenzlinie σ von K, K' nach Lehrsatz 37. senkrecht auf $(M - M')$ steht, da also $\sigma \parallel (Q - L) \parallel (Q' - L')$ ist, so wird auch die Strecke QQ' von der Potenzlinie σ halbirt. Nun ist Punktreihe $c, PCQ\mathfrak{C} \,\overline{\wedge}\, c', PC'Q'\mathfrak{C}'$, da beide harmonisch sind. In P sind ein Paar homologer Punkte vereinigt, also liegen sie perspectivisch, und zwar liegt, da, wie wir oben sahen, $(C - C') \parallel (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}') \parallel (Q - Q') \parallel (M - M')$ ist, ihr Projectionscentrum im Unendlichen. Da die Punktreihen auf c und c' nicht bloß conform, sondern im speciellen Falle harmonisch sind, da also auch $c, PCQ\mathfrak{C} \,\overline{\wedge}\, c', P\mathfrak{C}'Q'C'$ ist, so liegen sie nach § 3. Lehrsatz 14. noch für ein zweites Projectionscentrum Π perspectivisch. Von Π wissen wir, daß es jedenfalls auf $(Q - Q')$ liegen muß. Ferner entsteht, wenn wir dieß Projectionscentrum gefunden haben, ein vollständiges Vierseit $(C - \mathfrak{C})(C - C')(C' - \mathfrak{C}')(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')$, in welchem P ein Durchschnittspunkt der Gegenseiten, $(Q - Q')$ die Diagonale ist, welche die Ecken $[(C - \mathfrak{C}') \cdot (\mathfrak{C} - C')]$ und $[(C - C') \cdot (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}')]$ verbindet. Letztere liegt aber im Unendlichen, es muß also die Strecke QQ', da sie nach § 3. Lehrsatz 17. harmonisch getheilt werden soll, in $[(C - \mathfrak{C}') \cdot (\mathfrak{C} - C')]$ oder Π halbirt werden. Es liegt also das zweite Projectionscentrum Π oder der Durchschnittspunkt $[(C - \mathfrak{C}') \cdot (\mathfrak{C} - C')]$ im Mittelpunkte der Strecke QQ', also auf der Potenzlinie σ. Man hat also den

43. **Lehrsatz.** Die Verbindungsgeraden $(C - \mathfrak{C}')$, $(\mathfrak{C} - C')$ zweier entgegengesetzt gelegenen Punktpaare $C, \mathfrak{C}'$; $\mathfrak{C}, C'$ zweier Kreise K, K' auf centralen, von einem Punkte P des Potenzialkreises ausgehenden Strahlen c, c', schneiden sich in einem Punkte der Potenzlinie σ der beiden Kreise K, K'. Fig. 168.

Man wird sogleich eine gewisse Analogie dieses Satzes mit dem in Lehrsatz 8. ausgesprochenen Gesetze, daß zwei Kreise derselben Ebene stets für jedes der Aehnlichkeitscentren Σ, Σ', und die Potenzlinie σ als Axe perspectivisch collinear sind, bemerken.

Es seien nun drei Kreise K_1, K_2, K_3 derselben Ebene gegeben, Fig. 169., deren Mittelpunkte nicht in dieselbe Gerade fallen und es seien Σ_3, Σ'_3 die Aehnlichkeitscentren von K_1, K_2; Σ_2, Σ'_2, die von K_1, K_3; Σ_1, Σ'_1 die von K_2, K_3. Man verbinde nun zwei Aehnlichkeitscentren, die nicht zu demselben Kreispaare gehören, z. B. Σ_3, Σ'_1 durch eine Gerade $(\Sigma_3 - \Sigma'_1)$ und ziehe von M_1, M_2, M_3 drei parallele, sonst aber beliebige Gerade, welche die $(\Sigma_3 - \Sigma'_1)$ in X_1, X_2, X_3 schneiden, so verhält sich, da $(\Sigma_3 - \Sigma'_1)$ ein vom äußeren Aehnlichkeitscentrum Σ_3 der Kreise K_1, K_2 ausgehender Aehnlichkeitsstrahl

und $(M_1 - X_1) \parallel (M_2 - X_2)$ ist, nach § 8. Lehrsatz 46., wenn die Radien der Kreise K_1, K_2, K_3 bezüglich R_1, R_2, R_3 heißen:

$$M_1X_1 : M_2X_2 = R_1 : R_2.$$

Da ferner $(\Sigma_3 - \Sigma'_1)$ auch ein vom inneren Aehnlichkeitscentrum Σ'_1 der Kreise K_2, K_3 ausgehender Aehnlichkeitsstrahl ist, so verhält sich ebenso:

$$M_2X_2 : M_3X_3 = R_2 : R_3.$$

Aus diesen beiden Proportionen folgt sogleich, daß sich auch verhält:

$$M_1X_1 : M_3X_3 = R_1 : R_3;$$

Es muß also nach Lehrsatz 2. $(M_1 - M_2)$ oder $(\Sigma_3 - \Sigma'_1)$ durch ein Aehnlichkeitscentrum der Kreise K_1, K_3, und zwar in unserem Falle durch das innere, Σ'_2 gehen; oder es liegen Σ_3, Σ'_1, Σ'_2 auf einer und derselben Geraden. Auf dieselbe Weise überzeugt man sich, daß auch Σ_2, Σ'_1, Σ'_3; Σ_1, Σ'_2, Σ'_3; Σ_1, Σ_2, Σ_3 je auf derselben Geraden liegen. Man erhält also den

44. Lehrsatz. Liegen drei Kreise K_1, K_2, K_3 in derselben Ebene, und fallen ihre Mittelpunkte nicht in dieselbe Gerade, so liegen immer das äußere Aehnlichkeitscentrum eines Paares und die beiden inneren Aehnlichkeitscentren der übrigen beiden Kreispaare, sowie die drei äußeren Aehnlichkeitscentren der drei Kreispaare, also Σ_3, Σ'_1, Σ'_2; Σ_2, Σ'_1, Σ'_3; Σ_1, Σ'_2, Σ'_3; Σ_1, Σ_2, Σ_3 je auf einer und derselben Geraden. Fig. 169.

Da also z. B. $(\Sigma_3 - \Sigma'_1)$ ein Aehnlichkeitsstrahl, nicht bloß für K_1 und K_3 und für K_2 und K_3, sondern auch für K_1 und K_3 ist, so muß diese Gerade nach den Gesetzen der perspectivischen Collineation oder, wie hier, der perspectivischen Aehnlichkeit, wenn sie den Kreis K_1 schneidet, auch den Kreis K_2 und K_3 schneiden; berührt sie den einen, so muß sie auch die beiden anderen berühren, schneidet sie den einen Kreis nicht, so kann sie auch die beiden anderen nicht schneiden.

Es ist bereits oben darauf aufmerksam gemacht worden, daß, wenn zwei Kreise sich berühren, allemal der Berührungspunkt ein Aehnlichkeitscentrum sein muß. Berühren sie sich nämlich von außen, so kann keins der Centra innerhalb eines der beiden Kreise liegen, da sich sonst von ihm aus an den einen Kreis Tangenten legen ließen, an den anderen nicht; zugleich aber muß das innere Centrum Σ' auf der Strecke MM', wenn M, M' bezüglich die Mittelpunkte der beiden Kreise K, K' sind, sich befinden, es kann also nur im Berührungspunkte liegen. Berühren sich also K, K' von außen, so liegt das innere Aehnlichkeitscentrum im Berührungspunkt. Berühren sich K, K' von innen, so kann weder Σ, noch Σ' außerhalb des einen Kreises liegen, da sonst die von ihm an den einen Kreis gezogenen Tangenten auch den anderen berühren müßten, was unmöglich ist. Das innere Aehnlichkeitscentrum liegt nach Lehrsatz 3. immer auf der Strecke

MM', das äußere Σ, immer auf $M \infty M'$. Zugleich kann das äußere Aehnlichkeitscentrum nicht innerhalb der beiden Kreise liegen. Denn nach § 13. Lehrsatz 29. ist die perspectivische Collineation für das Centrum Σ und die (hier unendlich entfernte) Axe σ' einstimmig. Berührt nun der kleinere Kreis K den größeren K' von innen und heißt ihr Berührungspunkt F, der Durchschnittspunkt des Umfanges von K mit der Centrallinie $(M - M')$ $\mathfrak{F}$, der von K' mit derselben Geraden $\mathfrak{F}'$, und läge Σ um die Strecke x von F aus nach M zu, so müßte sich, da wir hier eine perspectivische Aehnlichkeit haben, verhalten:

$$\Sigma\mathfrak{F} : \Sigma\mathfrak{F}' = R : R'$$

oder: $2R - x : 2R' - x = R : R'$

oder: $2R - x : R = 2R' - x : R'$

oder: $R - x : R = R' - x : R'$

oder: $x : R = x : R'$

also müßte sein $R'x = Rx.$

Da aber der Voraussetzung nach $R' > R$ ist, so ist dieß nur möglich, wenn $x = 0$ ist, wenn also Σ in F selbst liegt. Es ist demnach, wenn K den Kreis K' von innen berührt, der Berührungspunkt F zugleich das äußere Aehnlichkeitscentrum. (S. Anmerkung zu Seite 434.)

Werden nun zwei Kreise von einem dritten berührt, so können entweder beide von demselben von außen, oder beide von innen, oder einer von außen, der andere von innen berührt werden.

45. Erklärung. Werden zwei Kreise von einem dritten zugleich von außen oder zugleich von innen berührt, so sagt man: „sie werden von ihm **gleichartig** berührt"; wird der eine von außen, der andere von innen berührt, so sagt man: „sie werden **ungleichartig** berührt".

Es ergiebt sich aus dem soeben Gesagten und dem Lehrsatz 44. sogleich der bekannte

46. Lehrsatz. Werden zwei Kreise K_1, K_2 von einem dritten, K_3 berührt, so liegen die beiden Berührungspunkte allemal mit dem äußeren oder mit dem inneren Aehnlichkeitscentrum der berührten Kreise K_1, K_2 in einer und derselben Geraden, nämlich mit dem äußeren, wenn K_1 und K_2 von K_3 gleichartig, mit dem inneren, wenn K_1 und K_2 von K_3 ungleichartig berührt werden.

Es seien endlich wieder, Fig. 170., K_1, K_2, K_3 drei Kreise in derselben Ebene, die Potenzlinie von K_1, K_2 heiße σ_3, die von K_2, K_3 heiße σ_1, ihr Durchschnittspunkt sei Π. Dann ist nach Lehrsatz 12., wenn man von Π aus durch K_1 und K_2 ein Paar beliebige Secanten (oder Sehnen) zieht, da Π auf σ_3 liegt: $\Pi A_1 \cdot \Pi\mathcal{B}_1 = \Pi\mathcal{A}_2 \cdot \Pi B_2$; und da Π auch auf σ_1 liegt, auch $\Pi\mathcal{A}_2 \cdot \Pi B_2 = \Pi\mathcal{A}_3 \cdot \Pi B_3$; folglich auch $\Pi A_1 \cdot \Pi\mathcal{B}_1 = \Pi\mathcal{A}_3 \cdot \Pi B_3$. Es sind also nach Erklärung 13.

die Potenzen des Punktes Π auch für die Kreise K_1, K_3 gleich; folglich liegt nach Lehrsatz 16. Π auch auf der Potenzlinie σ_2 der Kreise K_1, K_3, oder σ_2 geht durch Π. Man erhält also den

47. Lehrsatz. Liegen drei Kreise K_1, K_2, K_3 in derselben Ebene, so schneiden sich die Potenzlinien σ_3, σ_1, σ_2 der Kreispaare K_1, K_2; K_2, K_3; K_3, K_1 in einem und demselben Punkte Π. Fig. 170.

§ 16.

Die Ellipse.

Wir hatten in § 11. Seite 342., indem wir sahen, daß jede Ellipse mit einem Kreise, der ihren Mittelpunkt zum Centrum, ihre große*) Halbaxe zum Radius hat, perspectivisch affin ist, um die Natur der (noch unbekannten) Curve zu erforschen, an den einen Endpunkt A' Fig 136., der kleinen Halbaxe eine Tangente gelegt, und von den Durchschnittspunkten $\mathfrak{F}'_1$ derselben mit dem Kreise Senkrechte auf die große Axe AB (oder Parallele zur kleinen Axe) gezogen, und so die Punkte F_1, F_2 der großen Axe erhalten.

1. Erklärung. Die Punkte F_1, F_2 heißen die **„Brennpunkte oder Foci"** der Ellipse. Fig. 136.

Sodann hatten wir die Polaren d_1, d_2 von F_1, F_2 construirt.

2. Erklärung. Die Polaren d_1, d_2, der Brennpunkte F_1, F_2 heißen die **„Leitlinien oder Directrices"** der Ellipse. Fig. 136.

Ferner gebrauchten wir an der angezogenen Stelle die Entfernung der Brennpunkte F_1, F_2 vom Mittelpunkt M der Ellipse, und bezeichneten ihre Länge durch e. Sie war dieselbe für F_2 wie für F_1.

3. Erklärung. Die Entfernung e der Brennpunkte F_1, F_2 von dem Mittelpunkt M heißt die **„lineare Excentricität"** der Ellipse. Fig. 136.

dagegen:

4. Erklärung. Der Quotient $\frac{e}{a}$ aus der linearen Excentricität e und der großen Halbaxe a heißt die **„numerische Excentricität"** der Ellipse. Sie soll im Folgenden durch ε bezeichnet werden. Fig. 136.

Endlich

5. Erklärung. Die begrenzten Geraden ρ_1, ρ_2, welche von den Brennpunkten F_1, F_2 aus nach irgend einem Punkt P

*) Man überzeugt sich übrigens auf dieselbe Weise, wie in § 11., daß jede Ellipse auch mit einem Kreise, dessen Centrum in den Mittelpunkt der Ellipse fällt, und dessen Radius gleich der kleinen Halbaxe b der Ellipse ist, perspectivisch affin ist.

im Umfange der Ellipse gezogen sind, heißen **„Brennstrahlen"** der Ellipse. Fig. 136.

Da wir nun in § 11. Seite 343. sahen, daß stets $\frac{e}{a}$, also $\varepsilon < 1$ ist, so erhalten wir sofort den

6. Lehrsatz. Die numerische Excentricität ε jeder Ellipse ist kleiner als 1.

Wir sahen ferner in § 11. Seite 344., indem wir die senkrechten Abstände T_1P, T_2P eines Ellipsenpunktes P von den beiden Leitlinien d_1, d_2 suchten, daß sich stets verhielt: $\rho_1 : T_1P = \frac{e}{a} : 1$, $\rho_2 : T_2P = \frac{e}{a} : 1$, oder $T_1P_1 : \rho_1 = 1 : \varepsilon$; $T_2P = \rho_2 = 1 : \varepsilon$. Man sieht also:

7. Lehrsatz. Die senkrechten Abstände T_1P, T_2P eines Punktes P einer Ellipse von den beiden Leitlinien d_1, d_2 haben je zu den Brennstrahlen, die von P nach den Brennpunkten bezüglich F_1, F_2 gehen, welche die Pole bezüglich von d_1, d_2 sind, ein constantes Verhältniß, nämlich, wie die Einheit zur numerischen Excentricität $T_1P : \rho_1 = 1 : \varepsilon$; $T_2P : \rho_2 = 1 : \varepsilon$. Fig. 136.

Endlich sahen wir in § 11. Seite 344., daß stets $\rho_1 + \rho_2 = 2a$ ist, oder:

8. Lehrsatz. Die Summe der zwei Brennstrahlen ρ_1, ρ_2, die von den beiden Brennpunkten F_1, F_2 nach demselben Punkte P des Umfangs der Ellipse gezogen sind, ist constant, und zwar gleich der großen Axe 2a der Ellipse; $\rho_1 + \rho_2 = 2a$. Fig. 136.

Es sei nun, Fig. 171., eine Ellipse mit der großen Axe $AA' = 2a$, und den Brennpunkten F, F' gegeben. Nach einem beliebigen Punkt P der Curve seien die Brennstrahlen ρ, ρ' gezogen, und es sei FP um die Länge F'P, F'P um die Länge FP verlängert, so daß $\mathit{F}P = F'P$, $\mathit{F'}P = FP$ ist, sodann sei $F\mathit{F}$, $F'\mathit{F'}$ und $P\mathfrak{A} \perp F\mathit{F}$, $P\mathfrak{A}' \perp F'\mathit{F'}$ gezogen, und die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ seien mit dem Ellipsen-Mittelpunkt durch Gerade verbunden. Da $\mathit{F}P = F'P$, $\mathit{F'}P = F'P$ ist, so ist sowohl $\triangle FP\mathit{F}$, als $\triangle F'P\mathit{F'}$ gleichschenklig. Da nun $\mathit{F}P$ die Verlängerung von F'P, $\mathit{F'}P$ die Verlängerung von FP ist, so muß $\mathfrak{A}'P$ die Verlängerung von $\mathfrak{A}P$ sein. Da die Dreiecke gleichschenklig sind, so wird ferner $F\mathit{F}$ in $\mathfrak{A}$, $F'\mathit{F'}$ in $\mathfrak{A}'$ halbirt. Es ist aber auch FF' in M halbirt, also verhält sich $F\mathfrak{A} : \mathit{F}\mathfrak{A} = FM : F'M$ und $F'\mathfrak{A}' : \mathit{F'}\mathfrak{A}' = F'M : FM$, also ist $(\mathfrak{A} - M) \parallel (F' - \mathit{F})$ und $(\mathfrak{A}' - M) \parallel (F - \mathit{F'})$. Es verhält sich also:

$$FM : FF' = M\mathfrak{A} : F'\mathit{F}; \; F'M : F'F = M\mathfrak{A}' : F\mathit{F'};$$

oder, da $F'\mathit{F} = F\mathit{F'} = \rho + \rho' = 2a$ nach Lehrsatz 8., und $FF' = MF + MF' = 2e$ ist,

$$e : 2e = M\mathfrak{A} : 2a; \quad e : 2e = M\mathfrak{A}' : 2a;$$

folglich ist: $\quad M\mathfrak{A} = a; \qquad M\mathfrak{A}' = a.$

Es haben also die Strecken $M\mathfrak{A}$ und $M\mathfrak{A}'$ eine constante Länge. Hieraus folgt sogleich der

9. Lehrsatz. Construirt man ein gleichschenkliges Dreieck FPF (oder $F'PF'$), dessen Spitze P auf der Peripherie der Ellipse liegt, dessen einer Schenkel der eine der Brennstrahlen des Punktes P ist und dessen anderer Schenkel in die Verlängerung des andern Brennstrahles fällt, so liegt der Fußpunkt $\mathfrak{A}$ (oder $\mathfrak{A}'$) des von der Spitze P auf die Basis FF (oder $F'F'$) gefällten Perpendikels, oder der Halbirungspunkt der Basis auf der Peripherie des Kreises, der den Ellipsen-Mittelpunkt zum Centrum und die große Halbaxe der Ellipse zum Radius hat. Fig. 171.

Es seien ferner, Fig. 172., $A_1A'_1$, $B_1B'_1$ ein Paar conjugirte Durchmesser der Ellipse (s. § 11. Erklärung 49.) und es seien an den Endpunkten A_1, A'_1 des einen derselben die Tangenten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}'_1$ gezogen, so sind diese nach § 11. Lehrsatz 50. $\mathfrak{a}$) parallel $(B_1 - B'_1)$; ferner seien ein Paar beliebige andere Tangenten gezogen, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, welche die Tangenten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}'_1$ bezüglich in $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}'_1$; $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}'_1$ schneiden, so ist nach § 11. Lehrsatz 65.

Punktreihe $\mathfrak{a}_1, A_1\mathfrak{E}_1\mathfrak{D}_1\infty \;\overline{\wedge}\;$ Punktreihe $\mathfrak{a}'_1, \infty\mathfrak{E}'_1\mathfrak{D}'_1A'_1$

also: $$\frac{A_1\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_1} : 1 = \frac{\infty}{\mathfrak{D}'_1\mathfrak{E}'_1} : \frac{\infty}{\mathfrak{D}'_1A'_1};$$

oder: $$\frac{A_1\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_1} : 1 = 1 : \frac{\mathfrak{D}'_1\mathfrak{E}'_1}{\mathfrak{D}'_1A'_1};$$

folglich: $$A_1\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}'_1\mathfrak{D}'_1 = A'_1\mathfrak{D}'_1 \cdot \mathfrak{E}_1\mathfrak{D}_1;$$

also auch:

$$A_1\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}'_1\mathfrak{D}'_1 + A_1\mathfrak{E}_1 \cdot A'_1\mathfrak{D}'_1 = A'_1\mathfrak{D}'_1 \cdot \mathfrak{E}_1\mathfrak{D}_1 + A_1\mathfrak{E}_1 \cdot A'_1\mathfrak{D}'_1,$$

oder: $$A_1\mathfrak{E}_1 \cdot A'_1\mathfrak{E}'_1 = A_1\mathfrak{D}_1 \cdot A'_1\mathfrak{D}'_1.$$

Da dieß für jede zwei beliebige Tangenten gilt, so kann man auch statt einer derselben, z. B. statt $\mathfrak{d}_1$ die Tangente $\mathfrak{b}_1$ in dem einen Endpunkte B_1 des zu $A_1A'_1$ conjugirten Durchmessers nehmen. Da dieselbe nach § 11. Lehrsatz 50. $\mathfrak{a}$) parallel zu $(A_1 - A'_1)$ ist, so ist die Entfernung ihres Durchschnittspunktes $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}'_1$ von A_1, A'_1 gleich der Strecke MB_1, die durch b_1 bezeichnet werde. Man hat

also: $$A_1\mathfrak{E}_1 \cdot A'_1\mathfrak{E}'_1 = b_1^2,$$

also: $$A_1\mathfrak{E}_1 \cdot A'_1\mathfrak{E}'_1 = A_1\mathfrak{D}_1 \cdot A'_1\mathfrak{D}'_1 = b_1^2.$$

Schneidet umgekehrt eine Gerade $\mathfrak{d}_1$ die Tangenten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}'_1$ an den Endpunkten A_1, A'_1 eines Durchmessers einer Ellipse so, daß $A_1\mathfrak{D}_1 \cdot A'_1\mathfrak{D}'_1 = b_1^2$ ist, wenn b_1 die Länge des halbirten conjugirten Durch-

messers ist, so muß $\mathfrak{d}_1$ eine Tangente der Ellipse sein. Denn, man ziehe eine beliebige Tangente $\mathfrak{c}_1$, so ist, wie eben gezeigt wurde, auch $A_1\mathfrak{S}_1 \cdot A'_1\mathfrak{S}'_1 = b_1^2$, also $A_1\mathfrak{S}_1 \cdot A'_1\mathfrak{S}'_1 = A_1\mathfrak{D}_1 \cdot A'_1\mathfrak{D}'_1$, also auch $A_1\mathfrak{S}_1 \cdot A'_1\mathfrak{S}'_1 - A_1\mathfrak{S}_1 \cdot A'_1\mathfrak{D}'_1 = A_1\mathfrak{D}_1 \cdot A'_1\mathfrak{D}'_1 - A_1\mathfrak{S}_1 \cdot A'_1\mathfrak{D}'_1$, oder: $A_1\mathfrak{S}_1 \cdot \mathfrak{S}'_1\mathfrak{D}'_1 = A'_1\mathfrak{D}'_1 \cdot \mathfrak{S}_1\mathfrak{D}_1$, oder: $\frac{A_1\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_1} : 1 = \frac{\infty}{\mathfrak{D}'_1\mathfrak{S}'_1} : \frac{\infty}{\mathfrak{D}'_1A'_1}$, also Punktreihe $\alpha_1, A_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{D}_1\infty \,\overline{\wedge}\, \alpha'_1, \infty\mathfrak{S}'_1\mathfrak{D}'_1A'_1$. Es muß also $\mathfrak{d}_1$ eine Tangente sein. Denn nach § 11. Lehrsatz 25. muß es außer α_1 noch eine durch $\mathfrak{D}_1$ gehende Tangente an die Ellipse geben, und diese muß nach § 11. Lehrsatz 65. die α'_1 in einem solchen Punkt $\mathfrak{D}'_1$ schneiden, daß Punktreihe $\alpha_1, A_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{D}_1\infty \,\overline{\wedge}\, \alpha'_1, \infty\mathfrak{S}'_1\mathfrak{D}'_1A'_1$ ist. Es muß also $\mathfrak{d}_1$ selbst diese zweite Tangente sein. Man sieht also:

10. Lehrsatz. Das Rechteck $A_1\mathfrak{S}_1 \cdot A'_1\mathfrak{S}'_1$ (oder $A_1\mathfrak{D}_1 \cdot A'_1\mathfrak{D}'_1$), aus den Abschnitten, welche eine beliebige Tangente $\mathfrak{c}_1$ (oder $\mathfrak{d}_1$) auf den Tangenten α_1, α'_1 in den Endpunkten A_1, A'_1 eines beliebigen Durchmessers der Ellipse abschneidet, ist von constanter Größe und zwar gleich dem Quadrate des halben dem Durchmesser $A_1A'_1$ conjugirten Durchmessers, nämlich $= b_1^2$, und umgekehrt:

Schneidet eine Gerade $\mathfrak{d}_1$ die Tangenten α_1, α'_1 so, daß $A_1\mathfrak{D}_1 \cdot A'_1\mathfrak{D}'_1 = b_1^2$ ist, so ist die Gerade $\mathfrak{d}_1$ eine Tangente an die Ellipse. Fig. 172.

Nimmt man insbesondere für $A_1A'_1$ die große Axe AA', Fig. 173., der Ellipse, so erhält man sofort den

11. Lehrsatz. Das Rechteck $A\mathfrak{S} \cdot A'\mathfrak{S}'$ aus den Abschnitten einer beliebigen Tangente $\mathfrak{c}$ auf den Scheiteltangenten α, α' hat einen constanten Inhalt, nämlich den des Quadrats der kleinen Halbaxe, $= b^2$. Fig. 173.

Da nach § 11. Lehrsatz 50. α) sowohl α als α', Fig. 173., senkrecht auf $(A - A')$ ist, so sind, da es nach § 2. Lehrsatz 14., Erklärung 15. in jedem Strahlbüschelpaare nur ein einziges Paar entsprechender Strahlen der rechten Winkel geben kann (es wäre denn, daß die Strahlbüschel überhaupt nicht nur conform, sondern gleich sind, was aber hier nicht der Fall ist, weil es nur beim Kreise eintritt) $\alpha, (A - A')$; $(A' - A), \alpha'$ die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel der conformen Strahlbüschel A, A'. Da ferner $\angle BAA' = \angle BA'A$ ist, so müssen nach § 3. Lehrsatz 9. $(A - B)$, $(A' - B)$ und $(A - B')$, $(A' - B')$ die zwei Paar, dort mit g, g'; h, h' bezeichneten Strahlen sein. Es muß also, wenn wir von A und A' nach einem beliebigen Punkt P der Ellipse Strahlen ziehen, da dieselben entsprechende Strahlen der conformen Strahlbüschel A, A' sind, nach § 2. Lehrsatz 17. sein:

$$\operatorname{tang} PAA' \cdot \operatorname{tang} PA'A = \operatorname{tang}^2 BAA' = \operatorname{tang}^2 BA'A = \left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

also:

12. **Lehrsatz. Das Produkt der trigonometrischen Tangenten der Winkel PAA′, PA′A, welche die Verbindungsgeraden eines beliebigen Ellipsenpunktes P und der Scheitel A, A′ mit der großen Axe der Ellipse bilden, ist constant, nämlich gleich dem Quadrate der trigonometrischen Tangente des Winkels, den die Verbindungsgerade eines Endpunktes B der kleinen Axe und eines Scheitels mit der großen Axe bildet, oder gleich dem Quadrate des Quotienten aus der großen in die kleine Halbaxe. Fig. 173.**

Es sei wieder, Fig. 171., P ein beliebiger Punkt der Ellipse, ρ, ρ' die zugehörigen Brennstrahlen, ρ' sei um PF, ρ um PF′ verlängert, sodann $(F - \mathrm{F})$, $(F' - \mathrm{F}')$ und von P aus eine Senkrechte $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}')$ auf beide gezogen, so daß also $\mathrm{F}\mathfrak{A} = F\mathfrak{A}$, $\mathrm{F}'\mathfrak{A}' = F'\mathfrak{A}'$, $(\mathrm{M} - \mathfrak{A}) \parallel (\mathrm{F}' - F)$, $(\mathrm{M} - \mathfrak{A}') \parallel (\mathrm{F} - F')$ ist. Da nun $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ auf der Peripherie des Kreises liegen, der M zum Mittelpunkt und MA = a zum Radius hat, nach Lehrsatz 9., da ferner $\angle \mathrm{F}'\mathfrak{A}'\mathfrak{A} = 1\mathrm{R}$ ist, so muß er über dem Halbkreise stehen, es muß also $(\mathfrak{A} - \mathrm{M})$ die $(\mathfrak{A}' - \mathrm{F}')$ in einem Punkte $\mathfrak{B}'$, $(\mathfrak{A}' - \mathrm{M})$ die $(\mathfrak{A} - \mathrm{F})$ in einem Punkte $\mathfrak{B}$, der Peripherie des Kreises schneiden. Da nun $(\mathfrak{B}' - \mathfrak{A})$ oder $(\mathfrak{A} - \mathrm{M}) \parallel (\mathrm{F}' - F)$, $(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}')$ oder $(\mathfrak{A}' - \mathrm{M}) \parallel (\mathrm{F} - F')$ ist, so sind die Vierecke $\mathfrak{B}'\mathrm{F}'F\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\mathrm{F}F'\mathfrak{A}'$ Parallelogamme, also $\mathfrak{B}'\mathrm{F}' = F\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\mathrm{F} = F'\mathfrak{A}'$; oder, da $F\mathfrak{A} = \mathrm{F}\mathfrak{A}$, $F'\mathfrak{A}' = \mathrm{F}'\mathfrak{A}'$ war, $\mathfrak{B}'\mathrm{F}' = \mathrm{F}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\mathrm{F} = \mathrm{F}'\mathfrak{A}'$ folglich

$$\mathfrak{B}\mathrm{F} \cdot \mathfrak{B}'\mathrm{F}' = \mathfrak{B}\mathrm{F} \cdot \mathrm{F}\mathfrak{A}.$$

Es sind aber $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ und AA′ Sehnen in dem Kreise, auf dessen Peripherie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ liegen, also ist

$$\mathfrak{B}\mathrm{F} \cdot \mathrm{F}\mathfrak{A} = \mathrm{AF} \cdot \mathrm{A'F},$$

also auch: $\mathfrak{B}\mathrm{F} \cdot \mathfrak{B}'\mathrm{F}' = \mathrm{AF} \cdot \mathrm{A'F} = (a - e)(a + e) = a^2 - e^2$;

oder: $\mathfrak{B}\mathrm{F} \cdot \mathfrak{B}'\mathrm{F}' = b^2$;

also auch: $\mathfrak{A}\mathrm{F} \cdot \mathfrak{A}\mathrm{F}' = b^2$.

Ziehen wir nun die Scheiteltangenten α, α', die von $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}')$ bezüglich in L, L′ geschnitten werden, so ist, wenn $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}')$ die $(\mathrm{A} - \mathrm{A}')$ in T schneidet, $\triangle \mathrm{TF}\mathfrak{A} \sim \triangle \mathrm{TLA}$ nnd $\triangle \mathrm{TF}'\mathfrak{A}' \sim \triangle \mathrm{TL'A'}$. Es verhält sich also:

$$\mathrm{T}\mathfrak{A} : \mathrm{F}\mathfrak{A} = \mathrm{TA} : \mathrm{LA}; \quad \mathrm{T}\mathfrak{A}' : \mathrm{F}'\mathfrak{A}' = \mathrm{TA}' : \mathrm{L'A'};$$

also ist: $$\mathrm{LA} = \frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{T}\mathfrak{A}} \cdot \mathrm{F}\mathfrak{A}; \qquad \mathrm{L'A'} = \frac{\mathrm{TA}'}{\mathrm{T}\mathfrak{A}'} \cdot \mathrm{F}'\mathfrak{A}'$$

folglich: $$\mathrm{LA} \cdot \mathrm{L'A'} = \frac{\mathrm{TA} \cdot \mathrm{TA}'}{\mathrm{T}\mathfrak{A} \cdot \mathrm{T}\mathfrak{A}'} \cdot \mathrm{F}\mathfrak{A} \cdot \mathrm{F}'\mathfrak{A}'.$$

Da aber T der Durchschnittspunkt zweier Secanten $(\mathrm{A} - \mathrm{A}')$, $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}')$ des Kreises um M ist, so ist

$$\mathrm{TA} \cdot \mathrm{TA}' = \mathrm{T}\mathfrak{A} \cdot \mathrm{T}\mathfrak{A}',$$

mithin $$\mathrm{LA} \cdot \mathrm{L'A'} = \mathrm{F}\mathfrak{A} \,.\, \mathrm{F}'\mathfrak{A}'.$$

Es war aber $\mathrm{F}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathrm{F}'$, $\mathrm{F}'\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}\mathrm{F}$, also $\mathrm{F}\mathfrak{A} \cdot \mathrm{F}'\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}\mathrm{F} \cdot \mathfrak{B}\mathrm{F}' = b^2$; also:

$$\mathrm{LA} \cdot \mathrm{L'A'} = b^2.$$

Es ist also nach Lehrsatz 10. Umkehrung $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}')$ eine Tangente an die Ellipse. Da sie zugleich, weil $\triangle \mathrm{FP}F$ und $\triangle \mathrm{F'P}F'$ gleichschenklig sind, und $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}') \perp (\mathrm{F} - F)$ und $(\mathrm{F}' - F')$ steht, den Winkel $\mathrm{FP}F$ und $\mathrm{F'P}F'$ halbirt, so hat man den

13. Lehrsatz. Die Tangente $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}')$ in einem Punkte P der Ellipse halbirt den Winkel der von dem einen zugehörigen Brennstrahl ρ (oder ρ') und der Verlängerung des anderen zugehörigen Brennstrahls ρ' (oder ρ) gebildet wird. Fig. 171.

Ferner können wir jetzt den Satz, daß $\mathfrak{B}\mathrm{F} \cdot \mathfrak{B}\mathrm{F}' = \mathrm{F}\mathfrak{A} \cdot \mathrm{F}'\mathfrak{A}' = b^2$ ist, so aussprechen:

14. Lehrsatz. Das Rechteck aus den beiden Perpendikeln $\mathrm{F}\mathfrak{A}$, $\mathrm{F}'\mathfrak{A}'$, die von den Brennpunkten F, F′ auf irgend eine beliebige Tangente $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}')$ der Ellipse gefällt sind, hat einen constanten Inhalt; derselbe ist nämlich gleich dem des Quadrats der kleinen Halbaxe $\mathrm{F}\mathfrak{A} \cdot \mathrm{F}'\mathfrak{A}' = b^2$. Fig. 171.

Es seien nun, Fig. 174., von einem Punkt T zwei Tangenten an die Ellipse gezogen, die in P, P′, berühren, von den Brennpunkten F, F′ sei auf sie je eine Senkrechte $\mathrm{F}\mathfrak{A}$, $\mathrm{F}'\mathfrak{A}'$ gefällt, sodann seien die Brennstrahlen FP, F′P′, FP′, F′P, gezogen, und letztere um die Strecken $\mathrm{P'}F' = \mathrm{P'F'}$, $\mathrm{P}F = \mathrm{PF}$ verlängert, so sind die entstandenen Dreiecke: $\mathrm{FT}F$, $\mathrm{F'T}F'$, $\mathrm{FP}F$, $\mathrm{F'P}F'$, gleichschenklig. Zugleich sind noch zwei Dreiecke entstanden $\mathrm{FT}F'$ und $\mathrm{F'T}F$; in ihnen ist:

$$\mathrm{F}F' = \rho_2 + \rho'_2 = 2a;\quad \mathrm{F'}F = \rho_1 + \rho'_1 = 2a;$$

also: $\mathrm{F}F' = \mathrm{F'}F.$

Ferner ist: $\mathrm{TF} = \mathrm{T}F,$

$\mathrm{T}F' = \mathrm{TF'};$

also: $\triangle \mathrm{FT}F' \cong \triangle F\mathrm{TF'};$

folglich: $\angle \mathrm{FT}F' = \angle F\mathrm{TF'}.$

Subtrahiren wir beiderseits den Winkel $\mathrm{FTF'} = \mathrm{F'TF}$, so bleibt:

$$\angle \mathrm{F'T}F' = \angle \mathrm{FT}F;$$

also auch, wenn wir den Winkel $F'\mathrm{TP'} = \mathrm{F'TP'}$ durch x′, den Winkel $F\mathrm{TP} = \mathrm{FTP}$ durch x bezeichnen, da $\angle x' = \frac{1}{2} \cdot \angle \mathrm{F'T}F'$, $\angle x = \frac{1}{2} \cdot \angle \mathrm{FT}F$ ist,

$$\angle x' = \angle x;$$

und $\angle (x' + \mathrm{F'TF}) = \angle (x + \mathrm{FTF'}).$

Man sieht also:

15. Lehrsatz. Je zwei Tangenten einer Ellipse bil-

den mit den Geraden, welche ihren Durchschnittspunkt T mit den Brennpunkten F, F′ der Ellipse verbinden, gleiche Winkel: $\angle \mathrm{F'TP'} = \angle \mathrm{FTP}$; $\angle \mathrm{F'TP} = \angle \mathrm{FTP'}$. Fig. 174.
Ferner folgt aus der Congruenz der Dreiecke $\mathrm{FT}F'$ und $F\mathrm{TF'}$:

$$\angle \mathrm{T}F'\mathrm{F} = \angle \mathrm{TF'}F; \quad \angle \mathrm{T}F\mathrm{F'} = \angle \mathrm{TF}F';$$

also auch $\angle \mathrm{P'F'T} = \angle \mathrm{PF'T}; \quad \angle \mathrm{PFT} = \angle \mathrm{P'FT}.$

Denkt man sich die Sehne $(\mathrm{P}-\mathrm{P'})$ gezogen, so ist dieselbe die Polare des Punktes T. Man kann also sagen:

16. **Lehrsatz.** Der nach dem Pole T einer Sehne PP′ gezogene Brennstrahl $(\mathrm{F}-\mathrm{T})$, $(\mathrm{F'}-\mathrm{T})$, halbirt den Winkel, bezüglich PFP′, P′F′P, unter dem die Sehne PP′ von dem Brennpunkte F, F′ aus gesehen wird. Fig. 174.

Es seien ferner, Fig. 175., an eine Ellipse zwei Tangenten gezogen, die in P, P′ berühren, und sich in T schneiden, sowie eine dritte in $\mathfrak{P}$ berührende Tangente, welche die ersteren beiden in $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ schneidet, sodann seien von einem der Brennpunkte, z. B. von F aus, Gerade nach P, $\mathfrak{T}$, T, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{T}'$, P′ gezogen. Nun ist:

$$\angle \mathfrak{T}\mathrm{F}\mathfrak{T}' = \angle \mathfrak{T}\mathrm{F}\mathfrak{P} + \angle \mathfrak{T}'\mathrm{F}\mathfrak{P}.$$

Nach Lehrsatz 16. ist aber:

$$\angle \mathfrak{T}\mathrm{F}\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2}\angle \mathrm{PF}\mathfrak{P}; \quad \angle \mathfrak{T}'\mathrm{F}\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2}\angle \mathrm{P'F}\mathfrak{P};$$

also: $\angle \mathfrak{T}\mathrm{F}\mathfrak{T}' = \tfrac{1}{2}\angle (\mathrm{PF}\mathfrak{P} + \mathrm{P'F}\mathfrak{P})$

oder: $\angle \mathfrak{T}\mathrm{F}\mathfrak{T}' = \tfrac{1}{2}\angle \mathrm{PFP'}.$

Da die rechte Seite der Gleichung von $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{P}$, also von der Lage der in $\mathfrak{P}$ berührenden Tangente ganz unabhängig ist, also dieselbe bleibt, wo man auch $\mathfrak{P}$ und seine Tangente annehmen mag, so hat man den:

17. **Lehrsatz.** In jeder Ellipse erscheint das von zwei festliegenden Tangenten $(\mathrm{T}-\mathrm{P})$, $(\mathrm{T}-\mathrm{P'})$ auf einer beliebigen dritten Tangente abgeschnittene Stück $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ von demselben Brennpunkte F (oder F′) aus immer unter demselben Winkel, nämlich unter einem Winkel, der halb so groß ist, als derjenige Winkel, unter dem die Berührungssehne PP′ der festliegenden Tangenten von demselben Brennpunkte F (oder F′) aus erscheint. Fig. 175.

Nimmt man in Fig. 174. insbesondere die Punkte P, P′, so, daß $(\mathrm{P}-\mathrm{P'})$ durch einen Brennpunkt, z. B. durch F geht, so daß eine Figur, Fig. 176., entsteht, so ist $\angle \mathrm{PFP'} = 2\mathrm{R}$. Nach Lehrsatz 16. ist dann $\angle \mathrm{PFT} = \tfrac{1}{2}\angle \mathrm{PFP'}$ also $\angle \mathrm{PFT} = 1\mathrm{R}$. Ein Gleiches gilt für jede zwei Tangenten, deren Berührungssehne durch F geht. Da nun T der Pol von $(\mathrm{P}-\mathrm{P'})$ ist (er liegt also auf der einen Leitlinie d der Ellipse), so folgt aus § 4. Erklärung 9. und aus § 11. Lehrsatz 44. der dem in § 11. Lehrsatz 53. vom Kreise ausgesprochenen Gesetze analoge

18. **Lehrsatz. In jedem Brennpunkt F (oder F′) einer Ellipse entsteht eine rechtwinklige Involution. Fig. 176.**

Wird zugleich statt des Berührungspunktes 𝔓 in Fig. 175. ein Scheitel, z. B. A der Ellipse angenommen, Fig. 176., so ist nach Lehrsatz 17.: $\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' = \frac{1}{2} \angle PFP'$, also $\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' = 1R$. Man hat also sogleich den

19. **Lehrsatz. Das Stück 𝔗𝔗′ einer Scheiteltangente, welches von einem Paar Tangenten abgeschnitten wird, deren Berührungssehne (P − P′) durch einen der Brennpunkte F (oder F′) einer Ellipse geht, erscheint von diesem Brennpunkte F (oder F′) aus unter einem rechten Winkel.**

Steht insbesondere die Brennsehne (P − P′) senkrecht zur großen Axe, fällt also der Durchschnittspunkt T in den Durchschnittspunkt *D* der Leitlinie d mit der großen Axe, so wird $\angle PF\mathfrak{T} = \angle \mathfrak{T}FA = \angle \mathfrak{T}'FA = \angle P'F\mathfrak{T}' = \frac{1}{2}R$. Fig. 176.

Es seien ferner die Punkte P, P′ in Fig. 175. so gewählt, daß (P − P′) durch den Mittelpunkt M der Ellipse geht, Fig. 177., daß also PP′ ein Durchmesser ist, und der Durchschnittspunkt T in das Unendliche fällt, (𝔗 − 𝔗′) sei eine beliebige dritte Tangente, so ist nach Lehrsatz 17. $\angle \mathfrak{T}F'\mathfrak{T}' = \frac{1}{2} \angle PF'P'$, $\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' = \frac{1}{2} \angle PFP'$, wenn unter letzterem der convexe Winkel verstanden wird. Es ist aber ferner in den Dreiecken PMF und P′MF′

$$MF = MF';\ MP = MP',\ \angle PMF = \angle P'MF';$$

also ist: $\triangle PMF \cong \triangle P'MF'$;

folglich ist: $\angle PFM = \angle P'F'M$;

und ebenso: $\angle P'FM = \angle PF'M$;

also: $\angle (PFM + P'FM) = \angle (P'F'M + PF'M)$;

d. h. $\angle PFP' = \angle P'F'P$;

wenn unter $\angle PFP'$ der spitze Winkel verstanden wird. Es ist also:

$$\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' + \angle \mathfrak{T}F'\mathfrak{T}' = \tfrac{1}{2}\angle [PF'P' \text{ (concav)} + P'FP' \text{ (convex)}];$$

oder: $\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' + \angle \mathfrak{T}F'\mathfrak{T}' = \frac{1}{2} \cdot 4R$;

oder: $\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' + \angle \mathfrak{T}F'\mathfrak{T}' = 2R$.

Man hat daher den

20. **Lehrsatz. Die Summe der Winkel 𝔗F𝔗′, 𝔗F′𝔗′, unter denen die von zwei parallelen Tangenten auf einer beliebigen dritten Tangente abgeschnittene Strecke 𝔗𝔗′ von den beiden Brennpunkten F, F′ einer Ellipse aus gesehen wird, ist gleich zwei Rechten. Fig. 177.**

Es seien, Fig. 178., $(A_1 - A'_1)$, $(B_1 - B'_1)$ ein Paar conjugirte Durchmesser der Ellipse und P irgend ein Punkt des Umfanges derselben. Durch ihn sei eine Sehne PP′ parallel $(A_1 - A'_1)$ und eine zweite Sehne P𝔓 parallel $(B_1 - B'_1)$ gezogen. Da die Durchmesser

$(A_1 - A'_1)$, $(B_1 - B'_1)$ conjugirte sind, so wird nach § 11. Lehrsatz 50. α) PP' in $\mathfrak{N}$, $P\mathfrak{P}$ in N halbirt. Zieht man nun auch $(P' - \mathfrak{P}') \parallel (B_1 - B'_1) \parallel (P - \mathfrak{P})$, so wird auch $P'\mathfrak{P}'$ in N' halbirt, also $N'P' = NP$, $N'\mathfrak{P}' = N\mathfrak{P}$. Verbindet man nun $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ durch die Sehne $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, so muß sie also $\parallel (A_1 - A'_1)$ sein, und das Viereck $PP'\mathfrak{P}'\mathfrak{P}$ ist ein Parallelogramm. Es schneiden sich nun die Diagonalen $P\mathfrak{P}'$, $P'\mathfrak{P}$ in M, da in einem Parallelogramm sich die Diagonalen halbiren, und $P\mathfrak{P}'$ sowie $P'\mathfrak{P}$ sowohl von $(A_1 - A'_1)$ als von $(B_1 - B'_1)$ halbirt wird. Legt man in P, P', $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ Tangenten an die Ellipse, so müssen nach § 11. Lehrsatz 31. die Durchschnittspunkte T, T' auf $(A_1 - A'_1)$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ auf $(B_1 - B'_1)$ liegen. Nun entsteht nach § 11. Lehrsatz 44. sowohl auf $(A_1 - A'_1)$, als auf $(B_1 - B'_1)$ eine Involution, auf ersterer Geraden mit den Hauptpunkten A_1, A'_1, auf letzterer mit den Hauptpunkten B^1, B'_1. Auf ersterer sind u. a. T und N, auf letzterer $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ entsprechende Punkte, und in beiden ist, da der Durchschnittspunkt sowohl von $(P - P')$ und $(\mathfrak{P} - \mathfrak{P}')$, als von $(P - \mathfrak{P})$ nnd $(P' - \mathfrak{P}')$ im Unendlichen liegt, der ihm entsprechende Punkt M der Involution der Centralpunkt. Bezeichnet man nun die Längen $MA_1 = MA'_1$, $MB_1 = MB'_1$ bezüglich durch α, β; so ist also: nach § 4. Lehrsatz 7:

$$MN \cdot MT = \alpha^2; \qquad M\mathfrak{N} \cdot M\mathfrak{T} = \beta^2;$$

und, wenn wir $MN = \mathfrak{N}P$ durch ξ, $M\mathfrak{N} = NP$ durch η bezeichnen:

$$\xi(NT + \xi) = \alpha^2; \qquad \eta(\mathfrak{N}\mathfrak{T} + \eta) = \beta^2;$$

oder:

$$NT \cdot \xi = \alpha^2 - \xi^2; \qquad \mathfrak{N}\mathfrak{T} \cdot \eta = \beta^2 - \eta^2. \qquad \dagger)$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke TNP, $P\mathfrak{N}\mathfrak{T}$ verhält sich aber:

$$NT : NP = \mathfrak{N}P : \mathfrak{N}\mathfrak{T}$$

oder:

$$NT : \eta = \xi : \mathfrak{N}\mathfrak{T};$$

also ist

$$NT \cdot \mathfrak{N}\mathfrak{T} = \xi \cdot \eta. \qquad \dagger\dagger)$$

Aus den Gleichungen †) folgt nun:

$$NT \cdot \mathfrak{N}\mathfrak{T} \cdot \xi \cdot \eta = (\alpha^2 - \xi^2)(\beta^2 - \eta^2);$$

oder nach der Gleichung ††):

$$\xi^2 \cdot \eta^2 = (\alpha^2 - \xi^2)(\beta^2 - \eta^2);$$

oder:

$$\xi^2 \cdot \eta^2 = \alpha^2\beta^2 - \beta^2\xi^2 - \alpha^2\eta^2 + \xi^2\eta^2;$$

also:

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^2 = 1.$$

Es ist dieß die Gleichung der Ellipse für ein Paar conjugirter Durchmesser als Coordinaten-Axen, nach der Auffassung der analytischen Geometrie.

Ist ferner α eine Scheiteltangente, Fig. 179., $(\mathfrak{T} - P)$ eine beliebige zweite Tangente an die Ellipse, so ist $\mathfrak{T}$ der Pol der (in der Figur nicht gezogenen) Sehne $A\mathfrak{P}$, also ist nach Lehrsatz 16. $\angle PF\mathfrak{T} = \angle AF\mathfrak{T}$. Zieht man nun eine Gerade $\mathfrak{T}\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{T}$ senkrecht auf FP, so ist auch $\angle \mathfrak{T}\mathfrak{P}F = \angle \mathfrak{T}AF = 1R$ und $\mathfrak{T}F = \mathfrak{T}F$, also $\triangle \mathfrak{T}\mathfrak{P}F \cong \triangle \mathfrak{T}AF$, folglich $F\mathfrak{P} = FA$, und da $\mathfrak{P}\mathfrak{T} \perp F\mathfrak{P}$ ist, so ist $\mathfrak{T}\mathfrak{P}$ die

Tangente eines um F als Centrum mit der Länge FA = F𝔓 als Radius beschriebenen Kreises. Ebenso ist, wenn man 𝔗𝔓′ ⊥ (F − P) zieht, F′𝔓′ = F′A, also 𝔗𝔓′ die Tangente an einem um F′ als Centrum mit der Länge F′A = F′𝔓′ als Radius beschriebenen Kreise. Man sieht also:

21. Lehrsatz. Die von irgend einem Punkt 𝔗 einer Scheiteltangente α der Ellipse auf diejenigen Brennstrahlen FP, F′P, welche den Berührungspunkt P der zweiten von 𝔗 an die Ellipse gelegten Tangente mit dem Brennpunkte F, F′ verbinden, gefällten Senkrechten 𝔗𝔓, 𝔗𝔓′ berühren alle je einen Kreis, dessen Centrum bezüglich F, F′, dessen Radius die Entfernung des Brennpunktes F, F′ vom Scheitel A ist, in welchem die Scheiteltangente α die Ellipse berührt. Fig. 179.

Dieser Satz läßt sich noch verallgemeinern. Nämlich, es ist klar, daß der Durchschnittspunkt T der Tangenten p, p′ auf der Polaren von F, also auf der Leitlinie d sich befinden muß; ferner folgt aus § 11. Lehrsatz 44. und aus dem obigen Lehrsatz 18., daß, wenn man von F nach T zieht, ∠ PFT = 1R ist, daß also umgekehrt ein von T auf die Brennsehne (P − P′) gefälltes Loth durch F gehen muß. Zieht man nun eine beliebige Gerade parallel zur Scheiteltangente α und zur Leitlinie d, und nennt ihren Durchschnittspunkt mit der Tangente p, und der großen Axe (A − A′) bezüglich *T*, *D*, und fällt von *T* ein Loth *TP* auf (P − P′), so verhält sich:

$$\mathrm{PF} : \mathrm{P}P = \mathrm{PT} : \mathrm{P}T;$$

oder:
$$\mathrm{PF} : \mathrm{P}P = \mathrm{PS} : \mathrm{P}S;$$

wenn PS der senkrechte Abstand des Ellipsenpunktes P von der Leitlinie d, und *S* der Durchschnittspunkt von (P − S) mit (*T* − *D*) ist. Die letzte Proportion läßt sich nun auch schreiben:

$$\mathrm{PF} : \mathrm{P}P = \mathrm{PS} : \mathrm{PS} - \mathrm{D}D,$$

woraus folgt:
$$\mathrm{PF} : \mathrm{PF} - \mathrm{P}P = \mathrm{PS} : \mathrm{D}D,$$

oder:
$$\mathrm{PF} : P\mathrm{F} = \mathrm{PS} : \mathrm{D}D.$$

Nach Lehrsatz 7. aber verhält sich (indem S an die Stelle des dortigen T_1 tritt): PS : PF = 1 : ε; also ist: $\mathrm{PS} = \frac{\mathrm{PF}}{\varepsilon} = \frac{a}{e} \cdot \mathrm{PF}$. Man hat also:

$$\mathrm{PF} : P\mathrm{F} = \frac{a}{e} \cdot \mathrm{PF} : \mathrm{D}D;$$

folglich:
$$P\mathrm{F} = \frac{e}{a} \cdot \mathrm{D}D.$$

Fällt man von *T* auch ein Loth *TP′* auf den anderen Brennstrahl (F′ − P), so ist in den Dreiecken P*TP′* und P*TP* Seite P*T* = Seite P*T*, ∠ *TP′*P = ∠ *TP*P = 1R, ∠ *T*P*P′* = ∠ *T*P*P* nach Lehrsatz 13., also ist △ P*TP′* ≅ △ P*TP*,

also: $PP' = PP;$
daher: $F'P' = F'P + PP = FP + FP - PF;$
oder: $F'P' = FP + FP - \frac{e}{a} \cdot DD;$

also nach Lehrsatz 8.

$$F'P' = 2a - \frac{e}{a} \cdot DD.$$

Man kann also sagen, da, wenn man um den Brennpunkt F mit dem Radius FP einen Kreis beschreibt, derselbe von $(T - P)$, und, wenn man vom Brennpunkt F' mit dem Radius F'P' einen Kreis beschreibt, derselbe von $(T - P')$ berührt wird, und da die Länge von FP und F'P' bei einer und derselben Ellipse nur von der Strecke DD abhängt, und diese immer dieselbe bleibt, so lange man einen Punkt T auf derselben Geraden $(T - D)$ annimmt:

22. Lehrsatz. Zieht man irgend eine Gerade parallel zu einer Leitlinie d einer Ellipse, zieht von beliebigen Punkten T dieser Geraden je eine Tangente p an die Ellipse, zieht die Brennstrahlen FP, F'P nach dem Berührungspunkte P derselben und fällt dann von T Senkrechte TP, TP' auf diese Brennstrahlen FP, F'P', so berühren diese Senkrechten TP, TP' alle je einen Kreis K, K'; der Mittelpunkt des einen K ist F, der des anderen K' ist F', und ihre Halbmesser sind constant, wo auch immer der Punkt T auf der einmal angenommenen Geraden $(T - D)$ gewählt sein mag. Stets ist die Summe der Radien der beiden berührten Kreise gleich der großen Axe der Ellipse. $FP + F'P' = 2a$.

Nimmt man insbesondere für die Gerade $(T - D)$ die eine Leitlinie d der Ellipse, so geht der eine Kreis K in einen Punkt über, nämlich in den Brennpunkt F, dessen Polare die d ist, der Halbmesser des anderen Kreises ist dann gleich der großen Axe 2a. Fig. 179.

Letzteres ergiebt sich sofort, indem man die Strecke $DD = 0$ annimmt.

Da ferner immer $\triangle PTP' \cong \triangle PTP$ und $PP' = PP$, und $TP' \perp F'P'$, $TP \perp FP$ ist, so sieht man sogleich:

23. Lehrsatz. Jeder Punkt P des Umfanges einer Ellipse ist der Mittelpunkt eines Kreises (mit dem Halbmesser $PP = PP'$), der zwei andere Kreise K, K', deren Mittelpunkte die Brennpunkte F, F' der Ellipse sind, und deren Halbmesser ($FP = \frac{e}{a} \cdot DD$ und $F'P' = 2a - \frac{e}{a} \cdot DD$) die große Axe 2a der Ellipse zur Summe haben, **ungleichartig** berührt. Sind die Halbmesser der beiden Kreise bezüg-

lich gleich a — e und a + e, so berührt die Ellipse beide Kreise ungleichartig.

Letzteres war schon in Lehrsatz 21. dargethan.

Denken wir uns den Kreis um P mit dem Radius PP = PP', der also die um F und F′ geschlagenen Kreise ungleichartig berührt, construirt, und ziehen dann ($P - P'$), Fig. 180., so schneidet dieselbe die Centrallinie (F — F′) derselben im inneren Aehnlichkeitscentrum Σ′ der von F und F′ geschlagenen Kreise nach § 15. Lehrsatz 47. Trifft nun dieser Aehnlichkeitsstrahl den letzteren dieser beiden Kreise, der durch K′ bezeichnet werden mag, zum zweitenmale in P'_1, so muß (F′ — P'_1) ‖ (F — P) sein, nach § 15. Lehrsatz 2. Schneidet nun (F′ — P'_1) die Ellipse in P′, so sind FP und F′P′ parallele Brennsehnen. Zieht man nun von P durch den Mittelpunkt M der Ellipse einen Durchmesser, der die Gerade (F′ — P'_1) in einem noch unbekannten Punkte $\mathfrak{P}_1$ treffe, so ist in den Dreiecken MFP und MF′$\mathfrak{P}_1$ MF = MF′, ∠ FMP = ∠ F′M$\mathfrak{P}_1$ als Scheitelwinkel, ∠ MFP = ∠ MF′$\mathfrak{P}_1$ als Wechselwinkel, also △ MFP ≅ △ MF$\mathfrak{P}_1$, also M$\mathfrak{P}_1$ = MP. Es muß also $\mathfrak{P}_1$ der zweite Endpunkt des von P aus gezogenen Durchmessers der Ellipse sein. Nun aber schneidet (F′ — P'_1) die Ellipse in P′, es muß also $\mathfrak{P}_1$ nach P′ fallen. Es ist nun also in dem Vierecke FPF′P′ M der Durchschnittspunkt der Diagonalen, und zwar ist MF = MF′, MP = MP′; es halbiren sich also die Diagonalen; folglich ist das Viereck FPF′P′ ein Parallelogramm, folglich F′P = FP′ und (F′ — P) ‖ (F — P′). Ferner ist leicht zu sehen, daß (F — P′) den Kreis K in P_1 schneiden muß, wenn P_1 der zweite Durchschnittspunkt der Geraden ($P' - P$) mit K ist. Denn, da ($P' - P$) oder ($P' - P_1$) ein Aehnlichkeitsstrahl von K und K′ ist, so ist (F — P_1) ‖ (F′ — P') da P_1 und P' homologe Punkte der Aehnlichkeit sind. Es ist aber auch, weil das Viereck FPF′P′ ein Parallelogramm ist, (F′ — P') ‖ (F — P′); also fällt (F — P′) mit (F — P_1) zusammen, es schneidet daher (F — P′) den Kreis K in P_1. Ebenso, wie nun ($T - P$) auf (F — P), ($T - P'$) auf (F′ — P') senkrecht steht, so steht auch ($T' - P_1$) auf (F — P_1) ($T' - P'_1$) auf (F′ — P'_1) senkrecht, wenn T' der Durchschnittspunkt der an P′ gelegten Tangente p′ mit ($T - D$) ist. Denn nach Lehrsatz 22. berührt eine von T' auf (F′ — P′) gefällte Senkrechte den Kreis K′ im Endpunkte des auf (F′ — P′) liegenden Halbmessers. Zieht man also ($T' - P'_1$), so muß dieß Tangente an K′ sein, ebenso ($T' - P_1$) Tangente an K. Nun sind P und P', P_1 und P'_1 nichthomologe Punkte der Aehnlichkeit für die Kreise K, K′, es ist also nach § 15. Lehrsatz 8. und Erklärung 15. die Gerade ($T - T'$) die Potenzlinie der beiden Kreise K, K′, da sich hier die Tangenten an nichthomologen Punkten der Aehnlichkeit schneiden. Ferner ist, da PP′ ein Durchmesser der Ellipse ist, die Tangente p′ parallel der Tangente p, und da (F — P) ‖ (F′ — P′) ist, so ist ∠ TPP = ∠ T'P′P'_1, ferner ist ∠ PPT = ∠ P′P'_1⊥ = 1R, also △ PPT ∾ △ P′P'_1T' (die

Linie $P'P'_1$ ist in der Figur nicht gezogen) also verhält sich $PT : P'T' = PP : P'P'_1$. Es sind also T und T' homologe Punkte der Aehnlichkeit der beiden von P und P' mit den Radien bezüglich $PP = PP'$, $P'P_1 = P'P'_1$ beschriebenen Kreise, die k und k' heißen sollen. Es liegt also das eine Aehnlichkeitscentrum, und zwar in unserem Falle, da $(T - T')$ die Centrallinie $(P - P')$ von k, k' auf der Strecke $P \infty P'$ schneidet, das äußere Aehnlichkeitscentrum von k, k' auf $(T - T')$. Da dasselbe zugleich auf der Centrallinie $(P - P')$ sich befinden muß, nach § 15. Lehrsatz 3., so muß der Durchschnittspunkt S von $(T - T')$ und $(P - P')$ das äußere Aehnlichkeitscentrum von k, k' sein. Da ferner $(P - P') \parallel (P' - P_1)$ (weil $(F' - P) \parallel (F - P')$ ist), und $(P - P) \parallel (P' - P'_1)$ ist (weil $(F' - P') \parallel (F - P)$ ist), so ist $(P' - P_1)$ oder $(P - P'_1)$ ein Aehnlichkeitsstrahl der Kreise k, k', und geht also durch das Aehnlichkeitscentrum S. Es schneiden sich also $(P - P')$ und $(P' - P'_1)$ im Punkte S der $(T - T')$. Da nun nach Lehrsatz 22. die Kreise K, K' stets dieselben bleiben, wo man auch den Punkt T auf der Geraden $(T - D)$ oder $(T - T')$, und also auch der Punkt Σ', wo man immer den Durchmesser PP' der Ellipse annimmt, unverändert bleibt, weil er nur von der Größe und Lage der Kreise K, K' abhängt, so erhält man zwar für S immer andere Punkte, dieselben liegen aber stets auf $(T - T')$. Es schneiden sich also, wenn man für PP' einen beliebigen anderen Durchmesser, er heiße z. B. $\Pi\Pi'$, wählt, den Durchschnittspunkt der zugehörigen Tangenten π, π' mit $(T - T')$ bestimmt und von hieraus Tangenten an K, K' legt, die Gerade $(\Pi - \Pi')$ und die Verbindungsgerade der vier Berührungspunkte dieser Tangenten, die aber durch Σ' geht, in einem von S verschiedenen Punkte S_1, der aber auf $(T - T')$ sich befindet. Indem man also immer andere und andere Ellipsen-Durchmesser und also auch immer andere Punkte T wählt, erhält man eine Reihe von M und eine Reihe von Σ' ausgehender Strahlen, also zwei Strahlbüschel mit den Scheiteln M und Σ', und je ein Strahl des Büschels M schneidet sich mit je einem Strahle des Büschels Σ' auf der Geraden $(T - T')$. Es liegen also die Strahlbüschel M und Σ' perspectivisch und sind also conform. Zugleich entsteht aber auch bei F (und bei F') ein Strahlbüschel, von der Beschaffenheit, daß derselbe Strahl $(F - P)$ (oder $(F' - P)$), der einen Strahl $(M - S)$ des Büschels M in einem Punkt P der Ellipse schneidet, den ihm entsprechenden Strahl $(\Sigma' - S)$ des Büschels Σ' in einem Punkte P des Kreises K (oder einem Punkte P' des Kreises K') schneidet. Man erkennt daher sofort, daß man behaupten kann:

24. Lehrsatz. Eine Ellipse ist jedem der beiden in Lehrsatz 22. erwähnten Kreise K, K' perspectivisch collinear; und zwar liegt der Scheitel des einen, die perspectivische Collineation bestimmenden, Strahlbüschels im Mittelpunkt M der Ellipse, der Scheitel des anderen im inneren Aehnlichkeitspunkt Σ' der Kreise K, K', das Colli-

neationscentrum im Centrum F oder F′ eines der beiden Kreise K, K′; die Collineationsaxe ist stets die Potenzlinie der beiden Kreise K, K′. Fig. 180.*).

Besonders bemerkenswerth ist noch der von Σ′ ausgehende Strahl, (Σ′ − S′) der senkrecht auf der Richtung der großen Axe der Ellipse, also senkrecht auf (A − A′) ist. Der homologe Strahl der perspectivischen Collineation geht dann also durch M und muß den von Σ′ ausgehenden auf $(T - T')$ schneiden. Allein, da in dem angenommenen Falle dieser parallel zu $(T - T')$ ist, so muß auch der homologe Strahl in M parallel $(T - T')$, mithin senkrecht zu (A − A′) sein, und daher mit der Richtung der kleinen Ellipsenaxe zusammenfallen.

Da schließlich in den perspectivisch collinearen Systemen den Kreistangenten $(P - T)$, $(P_1 - T')$ die Ellipsentangenten $(P - T)$, $(P' - T')$ homolog sind, und letztere, weil PP′ ein Durchmesser ist, parallel sind, so muß der Durchschnittspunkt von $(P - T)$ und $(P_1 - T')$ ein Punkt der Gegenaxe des von den Strahlbüscheln Σ′ und F gebildeten Systems sein, nach § 7. Erklärung 19. Zugleich ist nach § 8. Lehrsatz 10. die Gegenaxe dieses Systems parallel zur Collineationsaxe $(T - T')$, also senkrecht zu (A − A′) oder (F − F′); ferner muß der Durchschnittspunkt der Kreistangenten $(P - T)$, $(P_1 - T')$ ein Punkt der Polaren des Punktes Σ′ sein, und die Polare von Σ′ selbst ist nach § 15. Lehrsatz 7. senkrecht zu (F − F′). Es ist also die Polare von Σ′ selbst die Gegenaxe des Systems Σ′, F. Man sieht also, da ein Gleiches sich ebenso vom System Σ′, F′ zeigen läßt,

25. Lehrsatz. Die Polare des Aehnlichkeitscentrums Σ′ der Kreise K, K′ für den Kreis K ist die dem System Σ′, F zugehörige Gegenaxe; die Polare desselben Aehnlichkeitscentrums Σ′ der Kreise K, K′ für den Kreis K′ ist die dem System Σ′, F′ zugehörige Gegenaxe.

§ 17.

Die Hyperbel.

Obgleich eigentlich, wie bei der Betrachtung der Ellipse die des einfachsten Falles, nämlich des Kreises vorherging, so auch hier der Untersuchung der gemeinen Hyperbel die der gleichseitigen vorausgeschickt werden sollte, so mögen doch, da die gleichseitige Hyperbel, weil sie nicht so leicht als der Kreis construirt werden kann, nicht die praktische Bedeutung hat, wie dieser, hier beide Hyperbelarten zusammengefaßt werden.

---

*) In Betreff der Constructionen, die sich aus diesem und dem analogen, für Hyperbel und Parabel bestehenden Satze für die Kegelschnitte ableiten lassen, verweisen wir auf Paulus: „Grundlinien der neueren Geometrie", Seite 153—173., und die diesem Werke angefügte Aufgabensammlung.

Wir sahen nun in § 11. Seite 348. daß, wenn man in einer gleichseitigen Hyperbel zwei Punkte F_1, F_2, sucht, deren Entfernung vom Mittelpunkte M gleich $a\sqrt{2}$ ist, die Differenz der von ihnen nach irgend einem Curvenpunkt gezogenen Geraden gleich der Axe ist. Wegen der Aehnlichkeit dieses Gesetzes mit dem in § 16. Lehrsatz 8. von der Ellipse ausgesprochenen, nennen wir diese Punkte F_1, F_2 Fig. 137., auch bei der gleichseitigen Hyperbel: Brennpunkte. Ferner sahen wir, in § 11. Seite 350., daß jede gemeine Hyperbel perspectivisch affin ist mit einer gleichseitigen, die mit ihr denselben Mittelpunkt und eine Axe hat, gleich der großen Axe der gemeinen Hyperbel. Wir bestimmten ferner in der Richtung der großen Axe derselben zwei Punkte F_1, F_2, Fig. 139., indem wir durch den Endpunkt der senkrechten Axe der gleichseitigen Hyperbel eine Parallele zur großen Axe zogen, und von den Durchschnittspunkten derselben mit der gemeinen Hyperbel Lothe auf deren große Axe fällten. Da auch für diese so gefundenen Punkte F_1, F_2 die Differenz jeder zwei nach einem beliebigen Curvenpunkte gezogenen Geraden gleich der großen Axe ist, so nennen wir auch bei der gemeinen Hyperbel diese Punkte: Brennpunkte. Man sagt daher allgemein:

1. Erklärung. In jeder, gleichseitigen oder gemeinen, Hyperbel heißen die Punkte F_1, F_2: **„Brennpunkte oder Foci"** der Hyperbel. Fig. 137., Fig. 139.

Wir hatten sodann in der gemeinen Hyperbel die Polaren d_1, d_2 dieser Punkte gesucht. Da ein Gleiches auch bei der gleichseitigen Hyperbel geschehen kann, so sagt man allgemein:

2. Erklärung. Die Polaren d_1, d_2 der Brennpunkte F_1, F_2 heißen die **„Leitlinien oder Directrices"** der Hyperbel. Fig. 139.

Ferner definirt man die Entfernung $MF_1 = MF_2$

3. Erklärung. Die Entfernung e der Brennpunkte F_1, F_2 von dem Mittelpunkte M heißt die: **„lineare Excentricität"** der Hyperbel. Fig. 137., Fig. 139.

Dagegen:

4. Erklärung. Der Quotient $\frac{e}{a}$ aus der linearen Excentricität e und der großen Halbaxe a heißt die: **„numerische Excentricität"** der Hyperbel. Sie soll im Folgenden durch ε bezeichnet werden. Fig. 137., Fig. 139.

5. Erklärung. Die begrenzten Geraden ρ_1, ρ_2, welche von den Brennpunkten F_1, F_2 aus nach irgend einem Punkt P im Umfange der Hyperbel gezogen sind, heißen: **„Brennstrahlen"** der Hyperbel. Fig 137., Fig. 139.

Wir sahen ferner § 11. Seite 352., daß bei der gemeinen Hy-

perbel stets $\frac{e}{a} > 1$ ist; da nun bei der gleichseitigen Hyperbel $e = a\sqrt{2}$, also $\frac{e}{a} = \sqrt{2}$, mithin auch > 1 ist, so können wir allgemein sagen:

6. Lehrsatz. Die numerische Excentricität ε jeder Hyperbel ist größer als 1.

In § 11. Seite 352. sahen wir ferner an der gemeinen Hyperbel, was sich auch an der gleichseitigen leicht zeigen läßt, wie in § 11. Seite 349. geschehen ist, indem $\frac{e}{a} = \sqrt{2}$ ist, daß die senkrechten Abstände T_1P, T_2P eines Hyperbelpunktes von den beiden Leitlinien sich zu den zugehörigen Brennstrahlen verhalten wie $1 : \varepsilon$. Man hat also den

7. Lehrsatz. Die senkrechten Abstände T_1P, T_2P eines Punktes P einer Hyperbel von den beiden Leitlinien d_1, d_2 haben je zu den Brennstrahlen, die von P nach den Brennpunkten, bezüglich F_1, F_2 gehen, welche die Pole von d_1, d_2 sind, ein constantes Verhältniß, nämlich wie die Einheit zur numerischen Excentricität. $T_1P : \rho_1 = 1 : \varepsilon$; $T_2P : \rho_2 = 1 : \varepsilon$. Fig. 139.

Die in § 11. Seite 348. und 352. bewiesenen Gesetze können wir ferner so aussprechen:

8. Lehrsatz. Die Differenz der zwei Brennstrahlen ρ_1, ρ_2, die von den beiden Brennpunkten F_1, F_2, nach demselben Punkte P des Umfanges der Hyperbel gezogen sind, ist constant, und zwar gleich der großen Axe 2a der Hyperbel: $\rho_2 - \rho_1 = 2a$. Fig. 137., Fig. 139.

Ist, Fig. 181., P irgend ein Punkt einer Hyperbel, ρ, ρ' seine von den Brennpunkten F, F' ausgehenden Brennstrahlen, und trägt man von P aus nach den Punkten F', F, auf ρ', ρ bezüglich die Strecken FP, F'P ab, so daß also $P\mathfrak{F} = PF$, $P\mathfrak{F}' = PF'$ ist, fällt sodann von P aus auf die Geraden $(F - \mathfrak{F})$, $(F' - \mathfrak{F}')$ Perpendikel, welche diese Linien bezüglich in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ treffen, so läßt sich ein analoger Satz, wie der in § 16. Lehrsatz 9. von der Ellipse aufgestellte, beweisen. Es ist nämlich $\triangle FP\mathfrak{F}$ und $\triangle F'P\mathfrak{F}'$ gleichschenklig, also $F\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{A}$, $F'\mathfrak{F}'$ in $\mathfrak{A}'$ halbirt. Da nun $P\mathfrak{F}$ auf PF', $P\mathfrak{F}'$ auf PF fällt, so muß $\mathfrak{A}'$ in der Verlängerung von $P\mathfrak{A}$ liegen, oder $(P - \mathfrak{A})$, $(P - \mathfrak{A}')$ müssen in dieselbe Gerade fallen. Nun ist FF' in M halbirt, also muß $(M - \mathfrak{A}) \parallel (F' - \mathfrak{F})$, $(M - \mathfrak{A}') \parallel (F - \mathfrak{F}')$ sein. Es verhält sich also:

$$FM : FF' = M\mathfrak{A} : F'\mathfrak{F};\ F'M : F'F = M\mathfrak{A}' : F\mathfrak{F}';$$

oder, da $F'\mathfrak{F} = F\mathfrak{F}' = \rho' - \rho = 2a$, nach Lehrsatz 8., und $FF' = MF + MF' = 2e$ ist,

$$e : 2e = M\mathfrak{A} : 2a;\ e : 2e = M\mathfrak{A}' : 2a;$$

also: $$M\mathfrak{A} = a; \qquad M\mathfrak{A}' = a.$$

Man sieht also:

9. **Lehrsatz.** Construirt man ein gleichschenkliges Dreieck FPF (oder $F'PF'$), dessen Spitze P auf der Peripherie der Hyperbel liegt, dessen einer Schenkel der eine Brennstrahl des Punktes P ist, und dessen anderer Schenkel auf dem anderen Brennstrahl nach dem zugehörigen Brennpunkte zu liegt, so liegt der Fußpunkt $\mathcal{A}$ (oder $\mathcal{A}'$) des von der Spitze P auf die Basis FF (oder $F'F'$) gefällten Perpendikels, oder der Halbirungspunkt der Basis auf der Peripherie eines Kreises, der den Hyperbel-Mittelpunkt zum Centrum und die große Halbaxe der Hyperbel zum Radius hat. Fig. 181.

Es sei, Fig. 182., eine beliebige Tangente α_1 an einen Punkt A_1 einer Hyperbel gelegt, deren Asymptoten r, q sind. Verbinden wir A_1 mit dem Mittelpunkte M der Hyperbel, und denken uns durch M einen Strahl parallel zu α_1 gezogen, so ist derselbe der dem wirklichen Durchmesser $(M - A_1)$ conjugirte nach § 11. Lehrsatz 50. β). Nach demselben Satze ist dann dieser Strahl der dem Strahle $(M - A_1)$ zugeordnete harmonische, indem die Asymptoten r, q das andere Paar zugeordneter Strahlen sind. Da nun der eine von M ausgehende Strahl parallel α_1 ist, so muß Punktreihe $\alpha_1, \infty \Gamma A_1 \Delta$ harmonisch, also A_1 der Mittelpunkt der Strecke $\Gamma\Delta$ sein. Man erhält also den

10. a. **Lehrsatz.** Die zwischen den Asymptoten liegende Strecke $\Gamma\Delta$ irgend einer Tangente α_1 einer Hyperbel wird durch ihren Berührungspunkt A_1 halbirt. Fig. 182.

Ist nun α'_1 die Tangente am anderen Durchschnittspunkte A'_1 des Durchmessers $A_1 A'_1$ und sind $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ ein beliebiges Paar anderer Tangenten, so ist nach § 11. Lehrsatz 65.

Punktreihe $\alpha_1, A_1 \mathcal{C}_1 \mathcal{D}_1 \infty \;\overline{\wedge}\;$ Punktreihe $\alpha'_1, \infty \mathcal{C}'_1 \mathcal{D}'_1 A'_1$;

oder: $$\frac{A_1\mathcal{C}_1}{\mathcal{D}_1\mathcal{C}_1} : \frac{A_1\infty}{\mathcal{C}_1\infty} = \frac{\infty\mathcal{C}'_1}{\mathcal{D}'_1\mathcal{C}'_1} : \frac{\infty A'_1}{\mathcal{D}'_1 A'_1};$$

woraus folgt: $$A_1\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}'_1\mathcal{D}'_1 = A'_1\mathcal{D}'_1 \cdot \mathcal{C}_1\mathcal{D}_1;$$

also auch:

$$A_1\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}'_1\mathcal{D}'_1 + A_1\mathcal{C}_1 \cdot A'_1\mathcal{D}'_1 = A'_1\mathcal{D}'_1 \cdot \mathcal{C}_1\mathcal{D}_1 + A_1\mathcal{C}_1 \cdot A'_1\mathcal{D}'_1;$$

oder: $$A_1\mathcal{C}_1 \cdot A'_1\mathcal{C}'_1 = A_1\mathcal{D}_1 \cdot A'_1\mathcal{D}'_1.$$

Da dieß für jede beliebige Tangenten $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ gilt, so kann man auch statt einer derselben eine Asymptote, r oder q, wählen. Da nach Lehrsatz 10. a. $A_1\Gamma = A_1\Delta$ ist, so ist also, wenn man $A_1\Gamma = A_1\Delta = b_1$ setzt, da $A_1\Gamma = A'_1\Gamma' = A'_1\Delta'$ ist:

$$A_1\mathcal{C}_1 \cdot A'_1\mathcal{C}'_1 = b_1^2.$$

Von der Umkehrung dieses Satzes überzeugt man sich ebenso, wie bei der Ellipse. Man erhält also den

10. b. **Lehrsatz.** Das Rechteck $A_1\mathcal{C}_1 \cdot A'_1\mathcal{C}'_1$ (oder $A_1\mathcal{D}_1$

$\cdot A'_1\mathfrak{D}'_1$) aus den Abschnitten, welche eine beliebige Tangente c_1 (oder $\mathfrak{d}_1$) auf den Tangenten α_1, α'_1 in den Endpunkten A_1, A'_1 eines beliebigen Durchmessers der Hyperbel abschneidet, ist von constanter Größe, und zwar gleich dem Quadrate der halben Strecke, die auf einer der beiden Tangenten α_1 oder α'_1 von den Asymptoten der Hyperbel abgeschnitten wird, nämlich $= b_1^2$: und umgekehrt:

Schneidet eine Gerade $\mathfrak{d}_1$ die Tangenten α_1, α'_1 so, daß $A_1\mathfrak{D}_1 \cdot A'_1\mathfrak{D}'_1 = b_1^2$ ist, so ist die Gerade $\mathfrak{d}_1$ eine Tangente an die Hyperbel. Fig. 182.

Nimmt man für A_1, A'_1 die Endpunkte A, A' der großen Axe, also für α_1, α'_1, die Scheiteltangenten, so wird b_1 die kleine Halbaxe b. Man kann also sagen:

11.a. Lehrsatz. Das Rechteck $A\mathfrak{C} \cdot A'\mathfrak{C}'$ aus den Abschnitten einer beliebigen Tangente c auf den Scheiteltangenten α, α' hat einen constanten Inhalt, nämlich den des Quadrats der kleinen Halbaxe, $= b^2$.

Da ferner die Berührungspunkte der Asymptoten r, q, Fig. 183., im Unendlichen liegen, ihr Durchschnittspunkt aber der Mittelpunkt ist, so ist nach § 11. Lehrsatz 65., wenn c eine beliebige und α eine Scheiteltangente ist:

$$\text{Punktreihe } r, MBC\infty \;\overline{\wedge}\; \text{Punktreihe } q, \infty B'C'M;$$

oder: $$\frac{MB}{CB} = \frac{MC'}{C'B'};$$

also: $$MB \cdot C'B' = MC' \cdot CB;$$

oder: $$MB \cdot (MB' - MC') = MC' \cdot (MC - MB);$$

oder: $$MB \cdot MB' - MB \cdot MC' = MC \cdot MC' - MB \cdot MC';$$

also: $$MB \cdot MB' = MC \cdot MC'.$$

Es ist aber $MB' = MB$, also $MB \cdot MB' = MB^2 = MA^2 + AB^2$, oder, da MA die große, AB die kleine Axe ist, $MB \cdot MB' = a^2 + b^2$, also $= e^2$;

folglich: $$MC \cdot MC' = e^2.$$

Man sieht also:

11.b. Lehrsatz. Das Rechteck aus den Entfernungen der Schnittpunkte irgend einer Tangente c mit den Asymptoten vom Mittelpunkte einer Hyperbel ist constant, und zwar gleich dem Quadrate der linearen Excentricität $MC \cdot MC' = e^2$. Fig. 183.

Da nach § 11. Lehrsatz 50. β) sowohl α als α', wenn man hiemit die Scheiteltangenten Fig. 183. bezeichnet, senkrecht auf $(A-A')$ stehen, so sind nach § 2. Lehrsatz 14. und Erklärung 15., $\alpha, (A-A')$; $(A'-A), \alpha'$ die entsprechenden Strahlen der rechten Winkel. Zieht

man ferner von A und A′ die Strahlen m, n; m′, n′ nach den unendlich entfernten Punkten der Hyperbel, so ist m ∥ m′ ∥ r, n ∥ n′ ∥ q. Da nun nach § 11. Lehrsatz 51. β) die große Axe den Asymptotenwinkel halbirt, so halbirt sie auch die Winkel mn und m′n′. Bezeichnen wir nun die Richtung der großen Halbaxe kurz mit s, so ist also $\angle sm = \angle sm'$; $\angle sn = \angle sn'$. Es sind demnach m und m′; n und n′ die in § 3. Lehrsatz 9. mit g, g′; h, h′ bezeichneten Strahlen. Es muß also, wenn wir von A, A′ nach einem beliebigen Punkte P der Hyperbel Strahlen p, p′ ziehen, nach § 2. Lehrsatz 17. sein:

$$\operatorname{tang} sp \cdot \operatorname{tang} sp' = \operatorname{tang}^2 sm = \operatorname{tang}^2 sm' = \operatorname{tang}^2 sn = \operatorname{tang}^2 sn',$$

oder, da $\operatorname{tang} sm = \operatorname{tang} sm' = \ldots = \operatorname{tang} sr = \operatorname{tang} sq = \frac{AB}{AM} = \frac{AB'}{AM} = \frac{b}{a}$ ist:

$$\operatorname{tang} sp \cdot \operatorname{tang} sp' = \operatorname{tang}^2 sr = \operatorname{tang}^2 sq = \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Hieraus folgt der

12. Lehrsatz. Das Produkt der trigonometrischen Tangenten der Winkel sp, sp′, welche die Verbindungsgeraden eines beliebigen Hyperbelpunktes P und der Scheitel A, A′ mit der großen Axe der Hyperbel bilden, ist constant, nämlich gleich dem Quadrate der trigonometrischen Tangente des Winkels, den je eine Asymptote mit der Axe bildet, oder gleich dem Quadrate des Quotienten aus der großen in die kleine Halbaxe. Fig. 183.

Es seien ferner, Fig. 181., $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ die nach Lehrsatz 9. gefundenen Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, so ist also $\mathrm{F}\mathfrak{A} = F\mathfrak{A}$, $\mathrm{F}'\mathfrak{A}' = F'\mathfrak{A}'$, $(\mathrm{M} - \mathfrak{A}) \parallel (\mathrm{F}' - F)$, $(\mathrm{M} - \mathfrak{A}') \parallel (\mathrm{F} - F')$. Da nun $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ auf der Peripherie eines um M mit dem Radius MA = MA′ = a beschriebenen Kreises liegen, und $\angle \mathrm{F}'\mathfrak{A}'\mathfrak{A} = 1\mathrm{R}$ ist, so muß er über dem Halbkreise stehen, es muß also $(\mathfrak{A} - \mathrm{M})$ die $(\mathrm{F}' - \mathfrak{A}')$ in einem Punkte $\mathfrak{B}'$, $(\mathfrak{A}' - \mathrm{M})$ die $(\mathrm{F} - \mathfrak{A})$ in einem Punkte $\mathfrak{B}$ der Peripherie des Kreises schneiden. Da nun $(\mathfrak{B}' - \mathfrak{A})$ oder $(\mathfrak{A} - \mathrm{M}) \parallel (\mathrm{F}' - F)$, $(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}')$ oder $(\mathfrak{A}' - \mathrm{M}) \parallel (\mathrm{F} - F')$ ist, so sind die Vierecke $\mathfrak{B}'\mathrm{F}'F\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\mathrm{F}F'\mathfrak{A}'$ Parallelogramme, also $\mathfrak{B}'\mathrm{F}' = F\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\mathrm{F} = F'\mathfrak{A}'$, folglich, weil $F\mathfrak{A} = \mathrm{F}\mathfrak{A}$, $F'\mathfrak{A}' = \mathrm{F}'\mathfrak{A}'$ war, $\mathfrak{B}'\mathrm{F}' = \mathrm{F}\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}\mathrm{F} = \mathrm{F}'\mathfrak{A}'$ und

$$\mathfrak{B}\mathrm{F} \cdot \mathfrak{B}'\mathrm{F}' = \mathrm{F}'\mathfrak{A}' \cdot \mathrm{F}\mathfrak{A}.$$

Es ist aber auch, da F der Durchschnittspunkt der Secanten $\mathrm{F}\mathfrak{B}$, FA′ ist:

$$\mathrm{F}\mathfrak{B} \cdot \mathrm{F}\mathfrak{A} = \mathrm{FA}' \cdot \mathrm{FA};$$

also auch $\mathfrak{B}\mathrm{F} \cdot \mathfrak{B}'\mathrm{F}' = \mathrm{AF} \cdot \mathrm{A'F} = (e - a)(e + a) = e^2 - a^2$;

oder: $\mathfrak{B}\mathrm{F} \cdot \mathfrak{B}'\mathrm{F}' = b^2$;

also auch: $\mathfrak{A}\mathrm{F} \cdot \mathfrak{A}'\mathrm{F}' = b^2$.

Zieht man nun die Scheiteltangenten α, α′, die von $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}')$ bezüglich

in L, L′ geschnitten werden, so ist $\triangle TF\mathcal{A} \sim \triangle TLA$, $\triangle TF'\mathcal{A}' \sim \triangle TL'A'$. Also verhält sich:

$$T\mathcal{A} : F\mathcal{A} = TA : LA; \quad T\mathcal{A}' : F'\mathcal{A}' = TA' : L'A';$$

also ist $$LA = \frac{TA}{T\mathcal{A}} \cdot F\mathcal{A}; \qquad L'A' = \frac{TA'}{T\mathcal{A}'} \cdot F'\mathcal{A}';$$

daher: $$LA \cdot L'A' = \frac{TA \cdot TA'}{T\mathcal{A} \cdot T\mathcal{A}} \cdot F\mathcal{A} \cdot F'\mathcal{A}'.$$

Da aber F der Durchschnittspunkt der Sehnen AA', $\mathcal{A}\mathcal{A}'$, ist, so ist $TA \cdot TA' = T\mathcal{A} \cdot T\mathcal{A}'$; also:

$$LA \cdot L'A' = F\mathcal{A} \cdot F'\mathcal{A}';$$

also, da $F\mathcal{A} \cdot F'\mathcal{A}' = b^2$ war:

$$LA \cdot L'A' = b^2.$$

Es ist also nach der Umkehrung von Lehrsatz 9. ($\mathcal{A} - \mathcal{A}'$) eine Tangente, und man hat, da sie den Winkel $F'PF$ halbirt, den:

13. Lehrsatz. Die Tangente ($\mathcal{A} - \mathcal{A}'$) in einem Punkte P der Hyperbel halbirt den von den zugehörigen Brennstrahlen ρ, ρ' gebildeten Winkel. Fig. 181.

Zugleich können wir den Satz, daß $\mathcal{A}F \,.\, \mathcal{A}'F' = b^2$ war, so aussprechen:

14. Lehrsatz. Das Rechteck aus den beiden Perpendikeln $F\mathcal{A}$, $F'\mathcal{A}'$ die von den Brennpunkten F, F′ auf irgend eine beliebige Tangente ($\mathcal{A}-\mathcal{A}'$) der Hyperbel gefällt sind, hat einen constanten Inhalt; derselbe ist nämlich gleich dem des Quadrats der kleinen Halbaxe. $F\mathcal{A} \cdot F'\mathcal{A}' = b^2$. Fig. 181.

Es seien von einem Punkte T zwei Tangenten an eine Hyperbel gezogen, die entweder, Fig. 184. a., denselben, oder, Fig. 184. b., verschiedene Aeste derselben, in P, P′ berühren; von den Brennpunkten F, F′ seien auf sie je eine Senkrechte, $F\mathcal{A}$, $F'\mathcal{A}'$ gefällt, sodann die Brennstrahlen FP, F′P′, FP′, F′P gezogen, und auf letzteren die Strecken $P'\mathit{F}' = P'F'$, $P\mathit{F} = PF$ abgetragen, so sind die Dreiecke $\mathrm{FT}\mathit{F}$, $\mathrm{F'T}\mathit{F}'$ gleichschenklig. Zugleich entstehen noch ein Paar Dreiecke $\mathrm{FT}\mathit{F}'$, $\mathit{F}\mathrm{TF}'$. In ihnen ist:

$$\mathrm{F}\mathit{F}' = \mathrm{F'}\mathit{F} (= 2a)$$

ferner: $$\mathrm{TF} = \mathrm{T}\mathit{F}$$

$$\mathrm{T}\mathit{F}' = \mathrm{TF}'$$

also: $$\triangle \mathrm{FT}\mathit{F}' \cong \triangle \mathit{F}\mathrm{TF}'$$

also: $$\angle \mathrm{FT}\mathit{F}' = \angle \mathit{F}\mathrm{TF}'.$$

Addiren wir dieß im Falle 184. a. zu der Gleichung $\angle FTF' = \angle F'TF$, oder subtrahiren wir es im Falle 184. b. von derselben Gleichung, so ergiebt sich in beiden Fällen:

$$\angle \mathrm{F'T}\mathit{F}' = \angle \mathit{F}\mathrm{TF};$$

also auch, da diese Winkel von $(\mathrm{T}-\mathfrak{A}')$, $(\mathrm{T}-\mathfrak{A})$ halbirt werden, wenn wir ihre Hälften bezüglich durch x', x bezeichnen:

$$\angle x' = \angle x;$$

oder: $$\angle \mathrm{F'T}\mathfrak{A}' = \angle \mathrm{FT}\mathfrak{A};$$

oder: $$\angle \mathrm{F'TP'} = \angle \mathrm{FTP}.$$

Im Falle Fig. 184. b. folgt hieraus sogleich durch Addition des Winkels $\mathrm{P'TP}$:

$$\angle \mathrm{F'TP} = \angle \mathrm{FTP'}.$$

Um ein Gleiches im Falle, der in Fig. 184. a. vorliegt, zu zeigen, denken wir uns, Fig. 184. a'., P an die Stelle von P', und P' an die von P gesetzt, fällen wieder, wie vorhin von F auf die jetzige Tangente von P' (die zugleich die Tangente von P in Fig. 184. a. ist) ein Loth $\mathrm{F'}\mathfrak{A}'$, und von F auf die Tangente des jetzigen Punktes P ein Loth $\mathrm{F}\mathfrak{A}$, ziehen wieder FP, F'P', FP', F'P und machen auf letzteren beiden je $\mathrm{P'}F' = \mathrm{PF'}$, $\mathrm{P}F = \mathrm{PF}$, so sind die Dreiecke $\mathrm{FT}F$, $\mathrm{F'T}F'$ gleichschenklig. Zugleich entstehen noch ein Paar Dreiecke $\mathrm{FT}F'$, $F\mathrm{TF'}$. In ihnen ist

$$\mathrm{F}F' = \mathrm{F'}F\,(=2\mathrm{a})$$
$$\mathrm{TF} = \mathrm{T}F$$
$$\mathrm{T}F' = \mathrm{TF'};$$

also $$\triangle \mathrm{FT}F' \cong \triangle F\mathrm{TF'};$$

folglich $$\angle \mathrm{FT}F' = \angle F\mathrm{TF'};$$

also: $$\angle \mathrm{F'TF} - \angle \mathrm{FT}F' = \angle \mathrm{F'TF} - \angle F\mathrm{TF'}$$

oder: $$\angle \mathrm{F'T}F' = \angle \mathrm{FT}F;$$

also auch, da die Dreiecke $\mathrm{F'T}F'$, $\mathrm{FT}F$ gleichschenklig sind,

$$\angle \mathrm{F'T}\mathfrak{A}' = \angle \mathrm{FT}\mathfrak{A};$$

oder: $$180^\circ - \angle \mathrm{F'TP'} = \angle \mathrm{FTP},$$

d. h. wenn wir wieder zu Fig. 184. a. zurückkehren:

$$180^\circ - \angle \mathrm{F'TP} = \angle \mathrm{FTP'}.$$

Wir haben also in diesem Falle:

$$\angle \mathrm{F'TP'} = \angle \mathrm{FTP};\ 180^\circ - \angle \mathrm{F'TP} = \angle \mathrm{FTP'}.$$

Man kann also, wenn man nur immer die zugleich spitzen und zugleich stumpfen Winkel berücksichtigt, auch hier sagen:

15. **Lehrsatz.** Je zwei Tangenten einer Hyperbel bilden mit den Geraden, welche ihren Durchschnittspunkt T mit den Brennpunkten F, F' verbinden, gleiche Winkel. $\angle \mathrm{F'TP'} = \angle \mathrm{FTP};\ 180^\circ - \angle \mathrm{F'TP} = \angle \mathrm{FTP'}$. Fig. 180. a.; $\angle \mathrm{F'TP'} = \angle \mathrm{FTP};\ \angle \mathrm{F'TP} = \angle \mathrm{FTP'}$. Fig. 180. b.

Aus der Congruenz der Dreiecke $\mathrm{FT}F'$ und $F\mathrm{TF'}$ folgt ferner:

$$\angle \mathrm{T}F'\mathrm{F} = \angle \mathrm{TF'}F;\ \angle \mathrm{TF}F' = \angle \mathrm{T}F\mathrm{F'}.$$

Es ist aber im Falle Fig. 184. a.:

$$\angle \mathrm{T}\mathit{F}'\mathrm{F} = \angle \mathrm{P}'\mathit{F}\mathrm{F}' - \angle \mathrm{T}\mathit{F}\mathrm{F}' = \angle \mathrm{P'F'}\mathit{F}' - \angle \mathrm{TF'}\mathit{F}' = \angle \mathrm{TF'P'}$$

und es ist $\angle \mathrm{TF'}\mathit{F} = \angle \mathrm{TF'P}$;

also haben wir: $\angle \mathrm{TFP'} = \angle \mathrm{TF'P'}$.

Ferner ist: $\angle \mathrm{TF}\mathit{F}' = 180^{0} - \angle \mathrm{TFP'}$;

und

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{T}\mathit{F}\mathrm{F}' &= \angle \mathrm{F'}\mathit{F}\mathrm{F} - \angle \mathrm{T}\mathit{F}\mathrm{F} \\ &= 180^{0} - \angle \mathrm{P}\mathit{F}\mathrm{F} - \angle \mathrm{TF}\mathit{F} \\ &= 180^{0} - \angle \mathrm{PF}\mathit{F} - \angle \mathrm{TF}\mathit{F} \\ &= 180^{0} - \angle \mathrm{TFP}. \end{aligned}$$

Es ist also: $180^{0} - \angle \mathrm{TFP'} = 180^{0} - \angle \mathrm{TFP}$,

und daher: $\angle \mathrm{TFP'} = \angle \mathrm{TFP}$.

Man hat daher in Fig. 184. a.:

$$\angle \mathrm{TF'P'} = \angle \mathrm{TF'P}; \quad \angle \mathrm{TFP'} = \angle \mathrm{TFP};$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \angle \mathrm{PF'P'} &= 2 \cdot \angle \mathrm{TF'P'} = 2 \cdot \angle \mathrm{TF'P}; \\ \angle \mathrm{PFP'} &= 2 \cdot \angle \mathrm{TFP'} = 2 \cdot \angle \mathrm{TFP}. \end{aligned}\right\} \quad \dagger)$$

In Fig. 184. b. ist:

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{T}\mathit{F}'\mathrm{F} &= 180^{0} - \angle \mathrm{P'}\mathit{F}\mathrm{F'} - \angle \mathrm{T}\mathit{F}\mathrm{F'} \\ &= 180^{0} - \angle \mathrm{P'F'}\mathit{F}' - \angle \mathrm{TF'}\mathit{F}' \\ &= 180^{0} - \angle \mathrm{TF'P'}. \end{aligned}$$

Ferner ist: $\angle \mathrm{TF'}\mathit{F} = \angle \mathrm{TF'P}$;

also, da $\angle \mathrm{TF'}\mathit{F} = \angle \mathrm{T}\mathit{F}'\mathrm{F}$ ist, weil $\triangle \mathrm{F'T}\mathit{F} \cong \triangle \mathit{F}'\mathrm{TF}$ war,

$$180^{0} - \angle \mathrm{TF'P'} = \angle \mathrm{TF'P}.$$

Zugleich ist $\angle \mathrm{TF}\mathit{F}' = \angle \mathrm{TFP'}$;

und

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{T}\mathit{F}\mathrm{F'} &= \angle \mathrm{F}\mathit{F}\mathrm{F'} - \angle \mathrm{T}\mathit{F}\mathrm{F} \\ &= 180^{0} - \angle \mathrm{P}\mathit{F}\mathrm{F} - \angle \mathrm{T}\mathit{F}\mathrm{F} \\ &= 180^{0} - \angle \mathrm{PF}\mathit{F} - \angle \mathrm{TF}\mathit{F} \\ &= 180^{0} - \angle \mathrm{TFP}; \end{aligned}$$

also, da $\angle \mathrm{T}\mathit{F}\mathrm{F'} = \angle \mathrm{TF}\mathit{F}'$ ist, weil $\triangle \mathrm{F'T}\mathit{F} \cong \triangle \mathit{F}'\mathrm{TF}$ war,

$$\angle \mathrm{TFP'} = 180^{0} - \angle \mathrm{TFP}.$$

Man hat daher in Fig. 184. b.:

$$\left.\begin{aligned} 180^{0} - \angle \mathrm{TF'P'} &= \angle \mathrm{TF'P}; \\ \angle \mathrm{TFP'} &= 180^{0} - \angle \mathrm{TFP}; \end{aligned}\right\} \quad \dagger\dagger)$$

oder: $\angle \mathrm{TF'}\mathfrak{P}' = \angle \mathrm{TF'P'}$; $\angle \mathrm{TFP'} = \angle \mathrm{TF}\mathfrak{P}$.

Es halbirt also hier die Gerade (F′ − T) den Nebenwinkel $\mathfrak{P}'\mathrm{F'P}$ von P′F′P, und (F − T) den Nebenwinkel $\mathfrak{P}\mathrm{FP}$ von PFP′. Man sieht daher:

16. **Lehrsatz.** Der nach dem Pole T einer Sehne PP′ gezogene Brennstrahl (F − T), (F′ − T) halbirt, wenn PP′ eine innere Sehne ist, den Winkel, bezüglich PFP′, PF′P′,

unter dem die Sehne PP' von diesem Brennpunkte F, F' aus gesehen wird; wenn PP' eine äußere Sehne ist, den Nebenwinkel desselben. Fig. 184. a., Fig. 184. b.

Sind drei Tangenten an eine Hyperbel gezogen, von denen zwei als festliegend, die dritte als beweglich gedacht wird, so können drei Fälle statt haben; nämlich I. können die Berührungspunkte P, P' der festliegenden Tangenten an demselben Curvenaste liegen, und zwar 1) kann der Berührungspunkt $\mathfrak{P}_1$, Fig. 185. a., der beweglichen Tangente ebenfalls auf demselben Aste sich befinden, oder 2) der Berührungspunkt $\mathfrak{P}_2$ der beweglichen Tangente kann auf dem anderen Aste liegen, Fig. 185. a., II. können P, P' auf verschiedenen Aesten liegen, wo es dann gleichgültig ist, auf welchem sich $\mathfrak{P}$ befindet, Fig. 185. b. Diese drei Fälle sollen durch 1), 2), 3) unterschieden werden. Man hat nun

im Falle 1) Fig. 185. a. $\angle \mathfrak{T}_1F\mathfrak{T}'_1 = \angle \mathfrak{T}_1F\mathfrak{P}_1 + \angle \mathfrak{T}'_1F\mathfrak{P}_1$

oder nach Lehrsatz 16. $\angle \mathfrak{T}_1F\mathfrak{T}'_1 = \frac{1}{2}\angle PF\mathfrak{P}_1 + \frac{1}{2}\angle P'F\mathfrak{P}_1$;

also: $\angle \mathfrak{T}_1F\mathfrak{T}'_1 = \frac{1}{2}\angle PFP'$.

Im Falle 2) ist nach der Gleichung ††) oder Lehrsatz 16., da P und $\mathfrak{P}_2$; P' und $\mathfrak{P}_2$ auf verschiedenen Aesten der Curven liegen:

$$180^0 - \angle \mathfrak{T}'_1FP' = \angle \mathfrak{T}'_2F\mathfrak{P}_2; \quad 180^0 - \angle \mathfrak{T}_2FP = \angle \mathfrak{T}_2F\mathfrak{P}_2;$$

oder: $\angle \mathfrak{G}'_2FP' = \angle \mathfrak{T}'_2F\mathfrak{P}_2$; $\quad \angle \mathfrak{G}_2FP = \angle \mathfrak{T}_2F\mathfrak{P}_2$;

also ist: $\angle P'F\mathfrak{P}_2 = 180^0 - 2 \cdot \angle \mathfrak{T}'_2F\mathfrak{P}_2$; $\angle PF\mathfrak{P}_2 = 180^0 - 2 \cdot \angle \mathfrak{T}_2F\mathfrak{P}_2$;

folglich: $\angle P'F\mathfrak{P}_2 + \angle PF\mathfrak{P}_2 = 2 \cdot (180^0 - \angle \mathfrak{T}'_2F\mathfrak{P}_2 - \angle \mathfrak{T}_2F\mathfrak{P}_2)$

oder: $\angle PFP' = 2 \cdot (180^0 - \angle \mathfrak{T}_2F\mathfrak{T}'_2)$;

also: $\angle \mathfrak{T}_2F\mathfrak{T}'_2 = 180^0 - \frac{1}{2}PFP'$;

oder: $\angle \mathfrak{T}_2F\mathfrak{T}'_2 = \frac{1}{2}(360^0 - \angle PFP')$.

Im Falle 3) Fig. 185. b. ist, da P und $\mathfrak{P}$ auf verschiedenen, P' und $\mathfrak{P}$ auf demselben Aste liegen:

nach ††) $180^0 - \angle \mathfrak{T}FP = \angle \mathfrak{T}F\mathfrak{P}$;

oder: $\angle \mathfrak{G}FP = \angle \mathfrak{T}F\mathfrak{P}$;

also: $\angle PF\mathfrak{P} = \angle 180^0 - 2 \cdot \angle \mathfrak{T}F\mathfrak{P}$;

nach †) ist $\angle P'F\mathfrak{P} = 2 \cdot \angle \mathfrak{T}'F\mathfrak{P}$;

folglich: $\angle PF\mathfrak{P} + \angle P'F\mathfrak{P} = 180^0 - 2 \cdot (\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{P} - \angle \mathfrak{T}'F\mathfrak{P})$

oder: $\angle PF\mathfrak{P}' = 180^0 - 2 \cdot \angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}'$;

also: $\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' = 90^0 - \frac{1}{2} \cdot \angle PFP'$;

oder: $\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' = \frac{1}{2}(180^0 - \angle PFP')$.

Man faßt, indem man im Falle 2) unter $\angle PFP'$ den convexen, im Falle 3) den Nebenwinkel versteht, auch diese drei Gesetze zusammen unter den

17. Lehrsatz. In jeder Hyperbel erscheint das von zwei festliegenden Tangenten $(T-P)$, $(T-P')$ auf einer

beliebigen dritten Tangente abgeschnittene Stück $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}'_1$, $\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}'_2$, $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ von demselben Brennpunkte F (oder F′) aus immer unter demselben Winkel, nämlich unter einem Winkel, der halb so groß ist, als derjenige Winkel, unter dem die Berührungssehne PP′ der festliegenden Tangenten von demselben Brennpunkte F (oder F′) aus erscheint. Fig. 185.a., Fig. 185.b.

Nehmen wir in Fig. 184.a. die Punkte P, P′ so, daß (P − P′) durch den Brennpunkt F geht, so daß Fig. 186. entsteht, so ist $\angle$ PFP′ = 1R. Nach Lehrsatz 16. ist dann $\angle$ PFT = $\frac{1}{2}\angle$ PFP′, also $\angle$ PFT = 1R. Dasselbe gilt für jede zwei Tangenten, deren Berührungssehne durch F geht. Da nun T der auf der einen Leitlinie d der Hyperbel liegende Pol von (P − P′) ist, so folgt aus § 4. Erklärung 8. und § 11. Lehrsatz 44. sogleich der

18. Lehrsatz. In jedem Brennpunkt F (oder F′) einer Hyperbel entsteht eine rechtwinklige Involution. Fig. 186.

Wird zugleich statt des Berührungspunktes $\mathfrak{P}_1$ in Fig. 185.a. ein Scheitel, z. B. A der Hyperbel angenommen, Fig. 186., so ist nach Lehrsatz 17. $\angle\mathfrak{T}F\mathfrak{T}' = \frac{1}{2}\angle$ PFP′, also $\mathfrak{T}F\mathfrak{T}'$ = 1R. Also:

19. Lehrsatz. Das Stück $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ einer Scheiteltangente, welches von einem Paar Tangenten abgeschnitten wird, deren Berührungssehne (P − P′) durch einen der Brennpunkte F (oder F′) einer Hyperbel geht, erscheint von diesem Brennpunkte F (oder F′) aus unter einem rechten Winkel.

Steht insbesondere die Brennsehne (P − P′) senkrecht zur großen Axe, fällt also der Durchschnittspunkt T in den Durchschnittspunkt *D* der Leitlinie d mit der großen Axe, so wird $\angle PF\mathfrak{T} = \angle\mathfrak{T}FA = \angle\mathfrak{T}'FA = \angle P'F\mathfrak{T}' = \frac{1}{2}R$. Fig. 186.

Es sei ferner, Fig. 187., PP′ ein Durchmesser der Hyperbel, und an seine Endpunkte seien Tangenten gelegt, die von einer beliebigen dritten Tangente, welche in $\mathfrak{P}$ berührt, in $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ geschnitten werden; die Punkte P, P′, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, seien sowohl mit F als mit F′ durch Gerade verbunden. Zieht man nun noch ($\mathfrak{P}$ − F), ($\mathfrak{P}$ − F′), so ist, da P′ und $\mathfrak{P}$ auf verschiedenen, P und $\mathfrak{P}$ auf demselben Aste liegen,

nach ††) $180^0 - \angle\mathfrak{T}F'P' = \angle\mathfrak{T}'F'\mathfrak{P}$;
oder: $\angle\mathfrak{G}F'P' = \angle\mathfrak{T}'F'\mathfrak{P}$;
also: $\angle P'F'\mathfrak{P} = 180^0 - 2\cdot\angle\mathfrak{T}'F'\mathfrak{P}$;
nach †) aber ist $\angle PF'\mathfrak{P} = 2\cdot\angle\mathfrak{T}F'\mathfrak{P}$;
also: $\angle P'F'\mathfrak{P} + \angle PF'\mathfrak{P} = 180^0 - 2\cdot(\angle\mathfrak{T}'F'\mathfrak{P} - \angle\mathfrak{T}F'\mathfrak{P})$;
oder: $\angle PF'P' = 180^0 - 2\cdot\angle\mathfrak{T}F'\mathfrak{T}'$;
also: $\angle\mathfrak{T}F'\mathfrak{T}' = 90^0 - \frac{1}{2}\angle PF'P'$;
oder: $\angle\mathfrak{T}F'\mathfrak{T}' = \frac{1}{2}(180^0 - PF'P')$.

Ferner ist:

nach ††) $180^0 - \angle \mathfrak{T}'F\mathfrak{P} = \angle \mathfrak{T}'FP'$

oder: $\angle \mathfrak{G}F\mathfrak{P} = \angle \mathfrak{T}'FP'$;

also: $\angle P'F\mathfrak{P} = 180^0 - 2 \cdot \angle \mathfrak{T}'FP'$;

nach †) ist: $\angle PF\mathfrak{P} = 2 \cdot \angle \mathfrak{T}F\mathfrak{P}$;

also: $\angle PF\mathfrak{P} - \angle P'F\mathfrak{P} = 2 \cdot (\angle \mathfrak{T}'FP' + \angle \mathfrak{T}F\mathfrak{P}) - 180^0$;

oder: $\angle PFP' = 2 \cdot (180^0 - \angle \mathfrak{T}'F\mathfrak{P} + \angle \mathfrak{T}F\mathfrak{P}) - 180^0$;

$= 2 \cdot \angle [180^0 - (\angle \mathfrak{T}'F\mathfrak{P} - \angle \mathfrak{T}F\mathfrak{P})] - 180^0$;

$= 2 \cdot (180^0 - \angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}') - 180^0$;

also: $\angle PFP' = 180^0 - 2 \cdot \angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}'$;

folglich: $\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' = \frac{1}{2}(180^0 - PFP')$.

Es ist aber ferner in den Dreiecken PMF, P'MF':

$MF = MF'$; $MP = MP'$; $\angle PMF = \angle P'MF'$;

also: $\triangle PMF \cong \triangle P'MF'$;

folglich: $\angle PFM = \angle P'F'M$;

ebenso ist: $\angle P'FM = \angle PF'M$;

also: $\angle PFM + \angle P'FM = \angle P'F'M + \angle PF'M$;

oder: $\angle PFP' = \angle P'F'P$;

also ist: $\angle \mathfrak{T}F'\mathfrak{T}' = \frac{1}{2}(180^0 - PF'P')$; $\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' = \frac{1}{2}(180^0 - \angle PF'P')$;

daher: $\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' - \angle \mathfrak{T}F'\mathfrak{T}' = \frac{1}{2}(180^0 - \angle P'F'P) - \frac{1}{2}(180^0 - \angle PF'P')$;

also: $\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' - \angle \mathfrak{T}F'\mathfrak{T}' = 0$;

oder: $\angle \mathfrak{T}F\mathfrak{T}' = \angle \mathfrak{T}F'\mathfrak{T}'$.

Man hat also den dem Lehrsatz 20. in § 16. analogen

20. **Lehrsatz.** **Der Unterschied der Winkel $\mathfrak{T}F\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}F'\mathfrak{T}'$, unter denen die von zwei parallelen Tangenten auf einer beliebigen dritten Tangente abgeschnittenen Stücke $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ von den beiden Brennpunkten F, F' einer Hyperbel aus gesehen wird, ist gleich Null. Fig. 187.**

Es seien, Fig. 188., ein Paar conjugirte Durchmesser construirt, die Richtung des wirklichen Durchmessers sei $(A_1 - A'_1)$, die des Durchmessers, der die Hyperbel nicht schneidet, sei $(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}')$; P sei ein beliebiger Punkt des Umfanges und durch ihn eine Sehne $(P - P')$ $\| (A_1 - A'_1)$ und eine zweite $(P - \mathfrak{P}) \| (\mathfrak{N} - \mathfrak{N}')$ gezogen. Nach § 11. Lehrsatz 50. β) wird nun PP' in $\mathfrak{N}$, $P\mathfrak{P}$ in N halbirt. Zieht man nun auch $(P' - \mathfrak{P}') \| (\mathfrak{N} - \mathfrak{N}') \| (P - \mathfrak{P})$, so wird auch $P'\mathfrak{P}'$ in N' halbirt, und, wenn man $(\mathfrak{P}' - \mathfrak{P})$ zieht, so muß diese Gerade parallel $(A_1 - A'_1) \| (P - P')$ sein. Das Viereck $PP'\mathfrak{P}'\mathfrak{P}$ ist also ein Parallelogramm und es schneiden sich die Diagonalen $(P - \mathfrak{P}')$,

$(P' - \mathfrak{P})$ desselben offenbar in M. Legt man nun in $P, P', \mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ Tangenten an die Hyperbel, so müssen nach § 11. Lehrsatz 31. die Durchschnittspunkte T, T' auf $(A_1 - A'_1)$, $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'$ auf dem conjugirten Durchmesser liegen. Nach § 11. Lehrsatz 44. entsteht nun auf $(A_1 - A'_1)$ eine Involution mit den Hauptpunkten A_1, A'_1; ebenso entsteht auf dem ihm conjugirten Durchmesser eine Involution, jedoch ohne Hauptpunkte. Verbinden wir die Durchschnittspunkte der Tangenten in A_1, A'_1 und der Asymptoten r, q, durch die Geraden $(C - \mathfrak{C})$, $(C' - \mathfrak{C}')$, die den dem $(A_1 - A'_1)$ conjugirten Durchmesser in B_1, B'_1, und die Hyperbel selbst in $R, R', \mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ schneiden, so ist, wie man sich sogleich überzeugt, auch $(C - \mathfrak{C}) \parallel (C' - \mathfrak{C}') \parallel (A_1 - A'_1)$, $(R - \mathfrak{R}) \parallel (R' - \mathfrak{R}') \parallel (B_1 - B'_1)$. Legen wir von einem der Punkte B_1, B'_1, z. B. von B_1 Tangenten an die Hyperbel, welche die $(A_1 - A'_1)$ in T, T' schneiden, und nennen ihre noch unbekannten Berührungspunkte Y, Y' und denken uns durch Y eine Sehne parallel zu $(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}')$ gezogen, die also von $(A_1 - A'_1)$ halbirt wird, so muß, wenn der Halbirungspunkt $\mathfrak{M}$ heißt, die Tangente im anderen Endpunkte X der Sehne $(Y - \mathfrak{M})$ ebenfalls durch T gehen, denn auch Viereck $XX'Y'Y$ ist ebenso, wie $PP'\mathfrak{P}'\mathfrak{P}$ ein Parallelogramm (wenn X' den zweiten Endpunkt der durch Y' parallel zu $(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}')$ gezogenen Hyperbelsehne bezeichnet). Es ist also Punktreihe $(A_1 - A'_1), \mathfrak{M}A_1TA'_1$ harmonisch; und es verhält sich daher;

$$TA_1 : \mathfrak{M}A_1 = TA'_1 : \mathfrak{M}A'_1;$$

oder, wenn wir die Strecke $MA_1 = MA'_1$ durch α bezeichnen:

$$\alpha - MT : \mathfrak{M}T + MT - \alpha = \alpha + MT : \mathfrak{M}T + MT + \alpha;$$

oder: $\quad \alpha - MT : \alpha + MT = \mathfrak{M}T + MT - \alpha : \mathfrak{M}T + MT + \alpha;$

folglich: $\quad \alpha - MT : 2\alpha = \mathfrak{M}T + MT - \alpha : 2(\mathfrak{M}T + MT);$

und daher: $\quad MT : \alpha = \alpha : \mathfrak{M}T + MT;$

also ist: $\quad MT^2 + MT \cdot \mathfrak{M}T = \alpha^2;$

und $\quad \mathfrak{M}T = \frac{\alpha^2 - MT^2}{MT}.$

Es verhält sich aber auch:

$$MB_1 : MT = Y\mathfrak{M} : \mathfrak{M}T;$$

oder, wenn wir die Strecke MB_1 durch β bezeichnen:

$$\beta : MT = Y\mathfrak{M} : \frac{\alpha^2 - MT^2}{MT};$$

also ist: $\quad Y\mathfrak{M} = \frac{\alpha^2 - MT^2}{MT^2} \cdot \beta.$

Schneidet die von B_1 ausgehende Tangente die Tangente des Punktes A_1 in G, die von A'_1 in G', so verhält sich auch:

$$MT : A_1T = MB_1 : A_1G; \qquad MT : A'_1T = MB_1 : A'_1G';$$

oder:

$$MT : \alpha - MT = \beta : A_1G; \qquad MT : \alpha + MT = \beta : A'_1G';$$

also ist: $\quad A_1G = (\alpha - MT) \cdot \frac{\beta}{MT}; \qquad A'_1G' = (\alpha + MT) \cdot \frac{\beta}{MT}.$

Nach Lehrsatz 10. b. ist aber:

$$A_1G \cdot A'_1G' = \beta^2;$$

also ist: $$A_1G \cdot A'_1G' = (\alpha^2 - MT^2) \cdot \frac{\beta^2}{MT^2} = \beta^2;$$

folglich: $$\frac{\alpha^2 - MT^2}{MT^2} = 1;$$

folglich: $$Y\mathfrak{M} = \beta.$$

Nun ist aber auch $\mathfrak{R}S = MB_1 = \beta$. Es muß also $Y\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{R}S$ zusammenfallen, weil die Sehnen der Hyperbel von 0 bis ∞ immer zunehmen. Es fällt also Y nach $\mathfrak{R}$, Y′ nach $\mathfrak{R}'$, X nach R, X′ nach R′, $\mathfrak{M}$ nach S, daher ist also $\mathfrak{R}$, und ebenso auch $\mathfrak{R}'$ der Berührungspunkt einer von B_1 an die Hyperbel gelegten Tangente, oder die Tangenten in $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ schneiden sich in B_1; ebenso die in R, R′ in B'_1. Es ist also B_1 der Pol von $(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}')$, B'_1 der Pol von $(R - R')$. Es sind also B_1, B'_1 entsprechende Punkte der Involution auf $(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}')$ nach § 11. Lehrsatz 44. Nun ist sowohl auf $(A_1 - A'_1)$ als auf $(B_1 - B'_1)$ der Punkt M der Centralpunkt der Involution. Also ist nach § 4. Lehrsatz 7.

$$MN \cdot MT = \alpha^2; \qquad M\mathfrak{N} \cdot M\mathfrak{T} = \beta^2;$$

oder, wenn wir $MN = \mathfrak{N}P$ durch ξ, $M\mathfrak{N} = NP$ durch η bezeichnen:

$$\xi \cdot (\xi - NT) = \alpha^2; \qquad \eta \cdot (\mathfrak{N}\mathfrak{T} - \eta) = \beta^2;$$

oder: $$NT \cdot \xi = \xi^2 - \alpha^2; \qquad \mathfrak{N}\mathfrak{T} \cdot \eta = \eta^2 + \beta^2; \qquad \dagger)$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke TNP, $P\mathfrak{N}\mathfrak{T}$, verhält sich aber:

$$NT : NP = \mathfrak{N}P : \mathfrak{N}\mathfrak{T};$$

oder: $$NT : \eta = \xi : \mathfrak{N}\mathfrak{T};$$

also ist: $$NT \cdot \mathfrak{N}\mathfrak{T} = \xi \cdot \eta; \qquad \dagger\dagger)$$

Aus †) folgt nun: $$NT \cdot \mathfrak{N}\mathfrak{T} \cdot \xi\eta = (\xi^2 - \alpha^2)(\eta^2 + \beta^2);$$

also nach ††) $$\xi^2\eta^2 = (\xi^2 - \alpha^2)(\eta^2 + \beta^2);$$

oder: $$\xi^2\eta^2 = \xi^2\eta^2 - \alpha^2\eta^2 + \beta^2\xi^2 - \alpha^2\beta^2;$$

folglich: $$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^2 = 1.$$

Dieß ist, in der Sprache der analytischen Geometrie, die Gleichung der Hyperbel für ein Paar conjugirte Durchmesser als Coordinaten-Axen.

Ist, Fig. 189., α eine Scheiteltangente, $(\mathfrak{T} - P)$ oder p eine beliebige zweite Tangente, so ist $\mathfrak{T}$ der Pol der Sehne AP, also ist nach Lehrsatz 16., wenn wir P an demselben Curvenaste, wie A wählen, $\angle PF\mathfrak{T} = \angle AF\mathfrak{T}$. Zieht man nun eine Senkrechte $(\mathfrak{T} - \mathfrak{P})$ von $\mathfrak{T}$ auf $(F - P)$, so ist auch $\angle \mathfrak{T}\mathfrak{P}F = \angle \mathfrak{T}AF = 1R$, $\mathfrak{T}F = \mathfrak{T}F$, also $\triangle \mathfrak{T}\mathfrak{P}F \cong \triangle \mathfrak{T}AF$, folglich $F\mathfrak{P} = FA$, und da $(\mathfrak{T} - \mathfrak{P}) \perp (F - \mathfrak{P})$ ist, so ist $(\mathfrak{T} - \mathfrak{P})$ die Tangente eines um F mit dem Halbmesser $F\mathfrak{P} = FA$ beschriebenen Kreises. Ebenso ist, wenn man $(\mathfrak{T} - \mathfrak{P}') \perp (F' - P)$ zieht, $(\mathfrak{T} - \mathfrak{P}')$ Tangente an einen um F′ mit dem Halbmesser $F'\mathfrak{P}' = F'A$ beschriebenen Kreis. Liegt P auf dem anderen

Hyperbelaste, so überzeugt man sich mit Hülfe der dem Lehrsatze 16. vorangehenden Gleichung ††) sofort, daß sich auch dann dasselbe ergiebt. Man kann also behaupten:

21. Lehrsatz. Die von irgend einem Punkte $\mathfrak{T}$ einer Scheiteltangente α der Hyperbel auf diejenigen Brennstrahlen FP, F′P, welche den Berührungspunkt P der zweiten von $\mathfrak{T}$ an die Hyperbel gelegten Tangente mit den Brennpunkten F, F′ verbinden, gefällten Senkrechten $(\mathfrak{T}-\mathfrak{P})$, $(\mathfrak{T}-\mathfrak{P}')$ berühren alle je einen Kreis, dessen Centrum bezüglich F, F′, dessen Radius die Entfernung des Brennpunktes F, F′ vom Scheitel A ist, in welchem die Scheiteltangente α die Hyperbel berührt. Fig. 189.

Auch dieser Lehrsatz, wie der entsprechende bei der Ellipse, läßt sich verallgemeinern. Nämlich: der Durchschnittspunkt T der an die Endpunkte P, P′ der Brennsehne PP′ gelegten Tangenten p, p′ muß nun auf der Leitlinie d sich befinden. Ferner ist nach § 11. Lehrsatz 65. und dem obigen Lehrsatz 18. $\angle \mathrm{PFT} = 1\mathrm{R}$; also muß auch umgekehrt ein von T auf (P − P′) gefälltes Loth durch F gehen. Zieht man nun eine beliebige Gerade parallel zur Scheiteltangente α und zu d, die von p in T, von (A − A′) in D geschnitten wird, und fällt von T ein Loth $(T-P)$ auf (P − P′) und nennt man PS den senkrechten Abstand des Punktes P von d, PS den Abstand des Punktes P von $(T-D)$, so verhält sich:

$$\mathrm{PF} : \mathrm{P}P = \mathrm{PT} : \mathrm{P}T;$$

oder:

$$\mathrm{PF} : \mathrm{P}P = \mathrm{PS} : \mathrm{P}S;$$

oder:

$$\mathrm{PF} : \mathrm{PF} - \mathrm{P}P = \mathrm{PS} : \mathrm{D}D.$$

Nach Lehrsatz 7. aber ist $\mathrm{PS} = \frac{\mathrm{PF}}{\varepsilon} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{PF}$, also folgt aus der letzten Proportion:

$$\mathrm{PF} - \mathrm{P}P = P\mathrm{F} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{a}} \cdot \mathrm{D}D.$$

Fällt man von T auch ein Loth $(T-P')$ auf (F′ − P), so ist in den Dreiecken PTP' und PTP Seite PT = PT, $\angle TP'\mathrm{P} = \angle TP\mathrm{P} = 1\mathrm{R}$, $\angle T\mathrm{P}P' = \angle T\mathrm{P}P$ nach Lehrsatz 13., also $\triangle \mathrm{P}TP' \cong \triangle \mathrm{P}TP$, also:

$$\mathrm{P}P' = \mathrm{P}P;$$

und

$$\mathrm{F}'P' = \mathrm{F'P} - \mathrm{P}P = \mathrm{F'P} - \mathrm{FP} + P\mathrm{F}$$
$$= \mathrm{F'P} - \mathrm{FP} + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{a}} \cdot \mathrm{D}D;$$

also nach Lehrsatz 8. $\mathrm{F}'P' = 2\mathrm{a} + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{a}} \cdot \mathrm{D}D$.

Da $(T-P) \perp (\mathrm{F}-P)$, $(T-P') \perp (\mathrm{F}'-P')$ ist, die Strecken FP, F′P' aber constant sind, so lange man T auf derselben Geraden $(T-D)$ liegen läßt, so kann man also sagen:

22. Lehrsatz. Zieht man irgend eine Gerade parallel zu einer Leitlinie d einer Hyperbel und zieht von belie-

bigen Punkten T dieser Geraden je eine Tangente an die Hyperbel, zieht die Brennstrahlen FP, F'P nach dem Berührungspunkte P derselben und fällt dann von T Senkrechte TP, TP' auf diese Brennstrahlen FP, F'P, so berühren diese Senkrechten TP, TP' alle je einen Kreis K, K'; der Mittelpunkt des einen, K, ist F, der des anderen, K', ist F', und ihre Halbmesser sind constant, wo auch immer der Punkt T auf der einmal angenommenen Geraden $(T-D)$ gewählt sein mag. Stets ist die Differenz der Radien der beiden berührten Kreise gleich der großen Axe der Hyperbel: $F'P'-FP=2a$.

Nimmt man insbesondere für die Gerade $(T-D)$ die eine Leitlinie d der Hyperbel, so geht der eine Kreis K in einen Punkt über, nämlich in den Brennpunkt F, dessen Polare die d ist, der Halbmesser des anderen Kreises ist dann gleich der großen Axe 2a. Fig. 189.

Da ferner immer $\triangle PTP' \cong \triangle PTP$ und $PP'=PP$, und $(T-P') \perp (F'-P')$, $(T-P) \perp (F-P)$ ist, so sieht man sogleich:

23. Lehrsatz. Jeder Punkt P des Umfangs einer Hyperbel ist der Mittelpunkt eines Kreises (mit dem Halbmesser $PP=PP'$), der zwei andere Kreise K, K', deren Mittelpunkte die Brennpunkte F, F' der Hyperbel sind, und deren Halbmesser $(FP=\frac{e}{a}DD;\ F'P'=2a+\frac{e}{a}DD)$ die große Axe 2a der Hyperbel zur Differenz haben, **gleichartig** berührt. Sind die Halbmesser der beiden Kreise bezüglich $e-a$; $e+a$; so berührt die Hyperbel beide Kreise ungleichartig

Denken wir uns den Kreis um P mit dem Radius $PP=PP'$ construirt, der also die um F, F' geschlagenen Kreise K, K' gleichartig berührt und ziehen dann $(P-P')$, so geht diese Gerade nach § 15. Lehrsatz 47. durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt Σ, Fig. 190., der Kreise K, K'. Schneidet nun dieser Aehnlichkeitsstrahl $(P-P')$ den Kreis K' zum zweitenmal in P'_1, so muß nach § 15. Lehrsatz 2. $(F'-P'_1) \parallel (F-P)$ sein, es sind daher, wenn $(F'-P'_1)$ die Hyperbel in P' trifft, FP und F'P' ein Paar paralleler Brennsehnen. Wie bei der Ellipse an Fig. 180., überzeugt man sich auch hier, bei der Hyperbel, sogleich, daß $(P-P')$ durch den Mittelpunkt M dieser Curve geht, und also die Richtung eines Durchmessers ist. Es halbiren sich also im Viereck FPF'P' die Diagonalen FF', PP' in M; es ist dasselbe daher ein Parallelogramm, also $F'P'=FP$. Zugleich muß $(F-P')$ den Kreis K in demselben Punkte P_1 schneiden, in welchem er von $(P'-P)$ oder (P'_1-P) geschnitten wird. Denn da diese letztere Gerade ein Aehnlichkeitsstrahl von K, K' ist, so ist $(F-P_1) \parallel (F'-P')$ zugleich ist auch, weil FPF'P' ein Parallelogramm ist, $(F-P') \parallel (F'-P')$, also fällt $(F-P')$ mit $(F-P_1)$ zusammen.

Da nun PP′ ein Durchmesser der Hyperbel ist, so ist die Tangente p′ in P′ parallel der Tangente p in P. Nach Lehrsatz 22. muß ferner, wenn man von T' eine Senkrechte auf (F′ − P'_1) fällt, diese K′ im Endpunkte der Strecke auf (F′ − P′), die ein Halbmesser von K′ ist, berühren. Nun ist P'_1 der Endpunkt des auf (F′ − P′) liegenden Halbmessers, also muß (T' − P'_1) die von T' an K′, und ebenso (T' − P_1) die von T' an K gelegte Tangente sein. Es steht also (T' − P'_1), (T' − P_1) senkrecht bezüglich auf (F′ − P'_1), (F − P_1). Ferner sind P_1 und P'_1, P und P' nicht-homologe Punkte der Aehnlichkeit für K, K′, es ist daher nach § 15. Lehrsatz 8. und Erklärung 15. die Gerade (T − T') die Potenzlinie von K, K′, da sich in T, T' die Tangenten an nicht-homologen Punkten schneiden. Ferner ist p′ ∥ p und da (F − P) ∥ (F′ − P′) ist, so ist ∠ T PP = ∠ T'P′P'_1, und ∠ PPT = ∠ P′P'_1T' = 1R, also △ PPT ∾ △ P′P'_1T'; es verhält sich also PT : P′T' = PP : P′P'_1. Also sind T und T' homologe Punkte der Aehnlichkeit der beiden um P, P′ mit den Radien PP = PP', P′P_1 = P′P'_1 beschriebenen Kreise, die k, k′ heißen mögen. Also liegt das eine Aehnlichkeitscentrum, und zwar in unserem Falle, da (T − T') die Centrallinie (P − P′) von k, k′ auf der Strecke PP′ schneidet, das innere auf (T − T'). Da dasselbe nach § 15. Lehrsatz 3. zugleich auf (P − P′) liegen muß, so muß es im Durchschnittspunkt S von (P − P′) und (T − T') sich befinden. Da ferner (P − P') ∥ (P′ − P_1), (P − P) ∥ (P′ − P'_1) ist, so ist (P'_1 − P) ein Aehnlichkeitsstrahl der Kreise k, k′. Es schneiden sich also (P − P′) und (P' − P_1) im Punkte S der (T − T'). Da nun nach Lehrsatz 22. K und K′, folglich auch der Punkt Σ immer dieselben bleiben, so lange man die Gerade (T − T') festhält, so erhält man also für S immer andere Punkte dieser Linie (T − T'). Man bekommt also, indem man immer andere Hyperbeldurchmesser für PP′ wählt, den Durchschnittspunkt der Tangenten an ihren Endpunkten mit (T − T') bestimmt, und von hier Tangenten an K, K′ legt, immer andere Gerade (P'_1 − P), die aber alle durch Σ gehen und den zugehörigen Hyperbeldurchmesser in einem von S verschiedenen Punkte der Geraden (T − T') schneiden. Es entstehen also an M und Σ ein Paar Strahlbüschel, deren Strahlen sich zu zweien auf (T − T') schneiden, die also perspectivisch liegen und also conform sind. Zugleich entsteht auch bei F (und bei F′) ein Strahlbüschel, und jeder Strahl desselben, (F − P) (oder (F′ − P)), der einen Strahl (M − P) des Büschels M in einem Punkt P der Hyperbel schneidet, schneidet den ihm entsprechenden Strahl (Σ − S) des Büschels Σ in einem Punkte P des Kreises K (oder in einem Punkte P' des Kreises K′). Man sieht also:

24. Lehrsatz. Eine Hyperbel ist jedem der beiden in Lehrsatz 22. erwähnten Kreise K, K′ perspectivisch collinear; und zwar liegt der Scheitel des einen, die perspectivische Collineation bestimmenden Strahlbüschels im Mittelpunkt M der Hyperbel, der Scheitel des anderen

im **äußeren** Aehnlichkeitscentrum Σ der Kreise K, K′, das Collineationscentrum im Centrum F oder F′ eines der beiden Kreise K, K′; die Collineationsaxe ist die Potenzlinie der beiden Kreise K, K′. Fig. 190.

Man überzeugt sich auch hier sogleich, daß zu dem von Σ ausgehenden senkrecht auf (A—A′) stehenden Strahl, der der großen Axe (A—A′) conjugirte Durchmesser, oder eine durch den Mittelpunkt M zur kleinen Hyperbelaxe parallel gezogene Gerade der homologe Strahl im Büschel M ist.

Da endlich in den perspectivisch collinearen Systemen den Kreistangenten $(P-T)$, (P_1-T') die Hyperbeltangenten $(\mathrm{P}-T)$, $(\mathrm{P}'-T')$ homolog sind, und letztere, weil PP′ ein Durchmesser ist, parallel verlaufen, also sich im Unendlichen schneiden, so muß der Durchschnittspunkt von $(P-T)$ und (P_1-T') ein Punkt der Gegenaxe des von den Strahlbüscheln Σ und F gebildeten Systems sein, nach § 7. Erklärung 19. Nach § 8. Lehrsatz 10. ist ferner die Gegenaxe parallel zur Collineationsaxe, also senkrecht auf (A—A′) oder (F—F′). Zugleich ist aber der Durchschnittspunkt der Kreistangenten $(P-T)$, (P_1-T') ein Punkt der Polaren des Punktes Σ, und diese Polare selbst muß nach § 15. Lehrsatz 7. senkrecht auf (F—F′) stehen. Es ist also die Polare von Σ für den Kreis K selbst die Gegenaxe des Systems Σ, F. Ebenso ist die Polare von Σ für den Kreis K′ die Gegenaxe des von den Strahlbüscheln Σ, F′ bestimmten Systems. Man erhält also den

25. Lehrsatz. Die Polare des Aehnlichkeitscentrums Σ der Kreise K, K′ für den Kreis K ist die dem Systeme Σ, F zugehörige Gegenaxe; die Polare desselben Aehnlichkeitscentrums Σ der Kreise K, K′ für den Kreis K′ ist die dem Systeme Σ, F′ zugehörige Gegenaxe.

Da die Hyperbel und jeder der beiden Kreise, z. B. K homologe Curven collinearer Systeme sind, erstere zwei unendlich entfernte Punkte, letzterer keinen solchen hat, so folgt, daß die Gegenaxe des den Kreis K enthaltenden Systems Σ, F durch K gehen muß, denn zwei im Endlichen liegenden Punkten von K müssen die beiden im Unendlichen gelegenen Punkte der Hyperbel homolog sein. Ebenso geht die andere Gegenaxe durch K′. Dieß stimmt auch damit, daß der Pol Σ das äußere Aehnlichkeitscentrum ist. Bei der Ellipse, Fig. 180., müssen beide Gegenaxen sowohl in dem den Kreis erzeugenden Systeme Σ, F (oder F′), als in dem die Ellipse erzeugenden M, F (oder F′) je außerhalb der Kreise, und außerhalb der Ellipse liegen.

§ 18.

Die Parabel.

Wir sahen in § 11. Seite 354., daß es in der Parabel stets einen solchen Punkt F auf der Axe giebt, Fig. 140., daß der Winkel

P_1DP_2, den die Tangenten, die an die Endpunkten einer in F senkrecht zur Axe stehenden Sehne gezogen sind, machen, ein Rechter ist.

1. Erklärung. Der Punkt F heißt in jeder Parabel der **„Brennpunkt oder Focus"** der Parabel. Fig. 140.

2. Erklärung. Die Polare d des Brennpunktes F heißt die **„Leitlinie oder Directrix"** der Parabel. Fig. 140.

Da nach § 11. Lehrsatz 47. der Mittelpunkt einer Parabel, wenn man einen solchen annehmen will, in unendlicher Ferne zu denken ist, so kann bei ihr nicht, wie bei Ellipse und Hyperbel von einer linearen Excentricität die Rede sein, oder dieselbe wäre $=\infty$ anzunehmen; ebenso ist die numerische Excentricität von nicht angebbarer Länge, da auch die große Axe der Parabel unendlich ist, und also der Bruch $\frac{e}{a}$ den unbestimmten Werth $\frac{\infty}{\infty}$ hat. Es soll daher keine den Erklärungen 3. und 4. in § 16. und § 17. analoge hier aufgestellt werden. Wohl aber sagt man auch hier:

3. Erklärung. Die begrenzte Gerade ρ, welche von dem Brennpunkte F aus nach irgend einem Punkte P, Q, u. s. w. im Umfange der Parabel gezogen ist, heißt ein: **„Brennstrahl"** der Parabel. Fig. 140.

Wir sahen ferner in § 11. Seite 357., daß sich stets verhält: $R_2Q_2 : \rho = 1:1$; oder:

4. Lehrsatz. Der senkrechte Abstand R_2Q_2 eines Punktes Q_2 einer Parabel von der Leitlinie d hat zu dem Brennstrahle, der von Q_2 nach dem Brennpunkte F geht, ein constantes Verhältniß, nämlich wie Eins zu Eins. $R_2Q_2 : \rho = 1:1.$, oder $R_2Q_2 = \rho$. Fig. 140.

Vergleichen wir diesen Satz mit den in § 16. und 17. als Lehrsatz 7. aufgestellten, so sehen wir, daß mit Berücksichtigung der dort unter 6. aufgestellten Sätze bei der Ellipse der senkrechte Abstand größer, bei der Hyperbel kleiner als der zugehörige Brennstrahl ist. Bei der Parabel ist er also demselben gleich. Man kann sich daher auch eine Parabel aus einer Ellipse entstehend denken, wenn man dort ε immer größer, oder, aus einer Hyperbel, wenn man in derselben ε immer kleiner werden läßt, in beiden Fällen bis zum Werthe 1.

Es seien nun P_1, P_2, P_3, Fig. 191. drei beliebige Punkte einer Parabel, p_1, p_2, p_3 die bezüglich an sie gelegten Tangenten. Da nach § 11. Lehrsatz 66. γ) jede zwei beliebige Parabeltangenten proportional von den übrigen geschnitten werden, so verhält sich also:

$$\frac{Q_3Q_2}{P_1Q_2} = \frac{P_2Q_1}{Q_3Q_1};$$

oder es ist: $$Q_3Q_1 \cdot Q_3Q_2 = P_1Q_2 \cdot P_2Q_1.$$

Man hat also den

5. **Lehrsatz.** Werden zwei Tangenten p_1, p_2 einer Parabel von einer dritten, p_3 geschnitten, so ist das Rechteck aus den am Durchschnittspunkte Q_3 von p_1, p_2 gelegenen Stücken Q_3Q_1, Q_3Q_2 gleich dem Rechteck aus den an den Berührungspunkten P_1, P_2 gelegenen Stücken P_1Q_2, P_2Q_1, also $Q_3Q_1 \cdot Q_3Q_2 = P_1Q_2 \cdot P_2Q_1$. Fig. 191.

Nimmt man insbesondere für p_1, p_2 ein Paar auf der Axe der Parabel sich schneidende Tangenten, Fig. 192., deren Berührungssehne also senkrecht zur Axe ist, so ist die Scheiteltangente α parallel zu $(P - P')$ nach § 11. Lehrsatz 51. γ), und nach § 11. Lehrsatz 61. $TA = MA$; es wird also TM in A halbirt, also auch TP in $\mathfrak{A}$. Es ist also, weil $\triangle TA\mathfrak{A} \sim \triangle TMP$ ist, auch $A\mathfrak{A} = \frac{1}{2}MP$. Ist nun d die Leitlinie der Parabel, F der Fußpunkt des von P auf sie gefällten Lothes, und ziehen wir $(F - \mathit{F})$ und suchen den noch unbekannten Durchschnittspunkt X von $(F - \mathit{F})$ mit α, so muß sich dann, weil $\triangle FAX \sim \triangle F\mathit{T}\mathit{F}$ ist, verhalten

$$FA : F\mathit{T} = AX : \mathit{TF}.$$

Nach Erklärung 2. schneiden sich nun auf d, da sie die Polare von F ist, Tangenten, deren Berührungssehne senkrecht zur Axe ist und durch F geht, in T, und nach § 11. Lehrsatz 61. ist $FA = A\mathit{T}$, also $FA = \frac{1}{2}F\mathit{T}$, folglich muß sein

$$AX = \mathit{TF}.$$

Es ist aber $\mathit{TF} = MP$, also $AX = \frac{1}{2}MP$. Es muß demnach der Durchschnittspunkt X von $(F - \mathit{F})$ und α zusammenfallen mit dem Durchschnittspunkt $\mathfrak{A}$ von $(T - P)$ und α. Da nun $F\mathit{T}$ in A halbirt wird, so wird auch $F\mathit{F}$ in $\mathfrak{A}$ halbirt, und weil, nach Lehrsatz 4. $FP = \mathit{F}P$, also das Dreieck $FP\mathit{F}$ gleichschenklig ist, so muß $(T - P)$ auf $(F - \mathit{F})$ senkrecht stehen, und $\angle FPT = \angle \mathit{F}PT$ sein. Man sieht also

6. **Lehrsatz.** Jede Tangente einer Parabel steht senkrecht auf einer Geraden $(F - \mathit{F})$, die von dem Brennpunkte nach dem Durchschnittspunkte F der vom Berührungspunkte auf die Leitlinie d gefällten Senkrechten mit der Leitlinie gezogen ist; zugleich halbirt die Tangente die Strecke $F\mathit{F}$, und zwar fällt dieser Halbirungspunkt $\mathfrak{A}$ stets mit dem Punkte zusammen, in welchem die $(F - \mathit{F})$ von der Scheiteltangente α geschnitten wird. Der Fußpunkt $\mathfrak{A}$ des Perpendikels von P auf $(F - \mathit{F})$ liegt also stets auf der Scheiteltangente α. Fig. 192.

und zugleich

7. **Lehrsatz.** Jede Tangente einer Parabel halbirt den Winkel, den der zum Berührungspunkte P gehörige Brennstrahl FP mit der von P auf die Leitlinie d gefällten Senkrechten bildet. Fig. 192.

Man erkennt sogleich die Analogie dieser beiden Sätze mit den

in § 16. und 17. Lehrsatz 9. und 13. über die Ellipse und Hyperbel aufgestellten. Denn stellt man sich vor, über der (großen) Axe der Parabel sei ein Kreis beschrieben, so muß derselbe, weil der zweite Durchschnittspunkt der Axe mit der Parabel im Unendlichen liegt, einen unendlich großen Durchmesser und also auch einen unendlich großen Halbmesser haben, also eine gerade Linie sein, welche die Parabel im endlichen Scheitel A berührt; also die Scheiteltangente α ist. Zugleich hat man sich auch den zweiten Brennpunkt F′ im Unendlichen auf der Axe zu denken, und eine von ihm aus nach P gezogene Gerade ist also parallel zur Axe. Wird sie um das Stück $P\mathit{F} = PF$ verlängert, $(F - \mathit{F})$ gezogen, und von P auf diese eine Senkrechte gefällt, so liegt der Fußpunkt $\mathfrak{A}$ auf dem durch den Scheitel A gehenden unendlich großen Kreise, oder auf der Scheiteltangente α. Es gründet sich auf die Sätze 6. und 7. auch eine Methode, an eine Parabel von einem gegebenen Punkte Π aus eine Tangente zu legen. Man ziehe, Fig. 193., von Π die Gerade (Π − F) und beschreibe mit ΠF einen Kreis um Π, der die Leitlinie d in F, F' schneidet, und ziehe von F, F' Parallele $(\mathit{F} - P)$, $(\mathit{F}' - P')$ zur Axe, welche die Parabel in P, P′ treffen, so sind P, P′ die Berührungspunkte der von Π an die Parabel zu legenden Tangenten. Denn in den Dreiecken ΠFP und $\Pi\mathit{F}P$ ist $\Pi F = \Pi\mathit{F}$, als Radien des Kreises, $FP = \mathit{F}P$ nach Lehrsatz 4., $\Pi P = \Pi P$, also $\triangle \Pi FP \cong \triangle \Pi\mathit{F}P$, also $\angle FP\Pi, = \angle \mathit{F}P\Pi$ folglich nach Lehrsatz 7. (Π − P) eine Tangente, ebenso (Π − P′).

Wir hatten ferner bereits in § 11. Seite 356. gezeigt, daß bei der Parabel die Involution für den Brennpunkt F als Involutionscentrum eine rechtwinklige ist. Man hat also den

8. **Lehrsatz. In dem Brennpunkt F einer Parabel entsteht eine rechtwinklige Involution.** Fig. 140.

der dem in § 16. und 17. aufgestellten Lehrsatze 18. entspricht.

Es seien nun von einem Punkte T aus, Fig. 194., zwei Tangenten (T − P), (T − P′) an die Parabel gelegt, die Berührungssehne (P − P′) schneide die Leitlinie d der Parabel in Q, von F sei nach T die Gerade (F − T) gezogen, welche die Parabel in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ schneidet. Legt man an $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ Tangenten, so müssen sich dieselben auf der Polaren von F, also auf d schneiden, nach § 11. Lehrsatz 34. β. Zugleich muß nach § 11. Lehrsatz 31. der Durchschnittspunkt der Tangenten an $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ auf der Diagonalen (P − P′) des eingeschriebenen Vierecks $P\mathfrak{P}P'\mathfrak{P}'$ liegen. Er muß demnach im Durchschnittspunkt Q von (P − P′) mit d sich befinden, oder: die Tangenten an $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ schneiden sich in Q. Es ist also $(\mathfrak{P} - \mathfrak{P}')$ die Polare von Q, also ist Punktreihe (P − P′), QP′Q′P, und daher auch Strahlbüschel F,(F − Q) (F − P′) (F − Q′) (F − P) harmonisch. Da aber (F − Q′) durch T geht, und T der Pol von (P − P′) ist, so sind nach § 11. Lehrsatz 44. (F − T) oder (F − Q′) und (F − Q) entsprechende Strahlen der Involution. Sie stehen also nach Lehrsatz 8. auf einander senkrecht, oder

es ist $\angle QFT = 1R$. Folglich muß, nach § 1. Lehrsatz 29. der Strahl $(F-T)$ den Winkel PFP' halbiren, oder es muß sein

$$\angle PFT = \angle P'FT.$$

Man hat also den dem Lehrsatz 16 in § 16. und § 17. analogen

9. **Lehrsatz.** Der nach dem Pole T einer Sehne PP gezogene Brennstrahl einer Parabel halbirt den Winkel PFP', unter dem die Sehne PP' vom Brennpunkte F aus gesehen wird. Fig. 194.

Es seien ferner wieder, Fig. 195., an zwei Punkte P, P' der Parabel Tangenten gelegt, die sich in T schneiden. Der spitze Winkel, den die Tangente an P mit $(F-P)$ und den die Tangente an P' mit $(F-P')$ macht, heiße bezüglich Y_1, Y_2, der Winkel, den $(F-T)$ mit der Tangente an P und an P' bildet, also $\angle FTP$, $\angle FTP'$ heiße bezüglich Z_1, Z_2. Nun ist nach Lehrsatz 7. $\angle \mathit{F}PQ = \angle FPQ = \angle Y_1$; $\angle \mathit{F}'P'Q' = \angle FP'Q' = \angle Y_2$, und da $(\mathit{F}-P)$ und $(\mathit{F}'-P')$ parallel der Axe $(A-A')$ sind, ist

$$\angle P'FA' = \angle \mathit{F}'P'F = 2\cdot\angle Y_2;$$
$$\angle PFA' = \angle \mathit{F}PF = 2\cdot\angle Y_1.$$

Bezeichnen wir den Winkel PFT, der nach Lehrsatz 9. gleich dem Winkel P'FT ist, mit X, so ist also:

$$\angle PFP' = \angle P'FA' - \angle PFA';$$
$$2\cdot\angle X = 2\cdot\angle Y_2 - 2\cdot\angle Y_1;$$
also: $$\angle X = \angle Y_2 - \angle Y_1.$$

Im Dreieck P'FT ist aber auch als Außenwinkel:

$$\angle Y_2 = \angle X + \angle Z_2;$$
also: $$\angle X = \angle Y_2 - \angle Z_2.$$

Durch Vergleichung beider Werthe von X ergiebt sich sogleich:

$$\angle Z_2 = \angle Y_1;$$
oder: $$\angle P'TF = \angle \mathit{F}PT.$$

Im Dreieck PFT ist:

$$\angle X = 2R - \angle Y_1 - \angle Z_1;$$
oder, da also $\angle Y_1 = \angle Z_2$ ist,
$$\angle X = 2R - \angle Z_1 - \angle Z_2.$$

Nun ist $\angle \mathit{F}RT = \angle \mathit{F}'P'Q'$, weil $(\mathit{F}'-P') \parallel (\mathit{F}-P)$ ist, und $\angle \mathit{F}'P'Q' = \angle FP'Q' = \angle Y_2$ nach Lehrsatz 7., also ist $\angle \mathit{F}RT = \angle Y_2$. Es ist aber auch, als Außenwinkel am Dreieck TRP:

$$\angle \mathit{F}RT = \angle Y_2 = \angle \mathit{F}PT + \angle PTR;$$
oder: $$\angle Y_2 = \angle Y_1 + 2R - \angle (Z_1 + Z_2);$$
oder, da $\angle Y_1 = \angle Z_2$ war:

$$\angle Y_2 = \angle Z_2 + 2R - \angle(Z_1 + Z_2);$$

also: $\angle Y_2 = 2R - \angle Z_1;$

oder: $\angle Z_1 = 2R - \angle Y_2;$

oder: $\angle PTF = \angle F'P'T.$

Wir haben also: $\angle P'TF = \angle F'PT; \ \angle PTF = \angle F'P'T;$

oder auch: $\angle P'TF = \angle FPT; \ \angle PTF = \angle FP'T.$

Man hat also den

10. a. **Lehrsatz.** Sind an eine Parabel zwei Tangenten gezogen, so macht jede von ihnen mit dem nach ihrem Durchschnittspunkte T gehenden Brennstrahl (F—T) einen Winkel, der gleich ist dem, welchen die andere Tangente mit dem nach ihrem Brennpunkte gehenden Brennstrahl bildet. $\angle P'TF = \angle FPT; \ \angle PTF = \angle FP'T.$ Fig. 195.

Da auch $\angle P'TF = \angle F'PT$, $\angle PTF = \angle F'P'T$ ist, und wenn man durch T eine Gerade (T—F') parallel zur Axe zieht, auch $\angle P'TF = \angle F'TP$, $\angle PTF = \angle F'TP'$ ist, da man sich ferner in der Richtung (T—F') in unendlicher Entfernung den zweiten Brennpunkt der Parabel denken kann, so sieht man, daß man den Satz auch so hätte ausdrücken können: Je zwei Tangenten einer Parabel bilden mit den Geraden, welche ihren Durchschnittspunkt T mit den beiden Brennpunkten verbinden, gleiche Winkel. In dieser Fassung tritt die Analogie unseres Satzes mit den in § 16. und § 17. Lehrsatz 15. über Ellipse und Hyperbel aufgestellten sogleich hervor.

Nach der obigen Gleichung: $\angle X = 2R - \angle Z_1 - \angle Z_2$ ist zugleich $\angle PFT = 2R - \angle PTP'$, also $\angle 2X$ oder $\angle PFP' = 2 \cdot (180^0 - \angle PTP')$ d. h:

10. b. **Lehrsatz.** Bei der Parabel ist der Winkel, unter welchem eine Sehne vom Brennpunkte aus gesehen wird, doppelt so groß als der Nebenwinkel des Winkels, den die an die Endpunkte dieser Sehne gelegten Tangenten einschließen. $\angle PFP' = 2 \cdot (180^0 - \angle PTP')$, Fig. 195.

Da ferner $\angle Z_2 = \angle Y_1$; $\angle Z_1 = 180^0 - \angle Y_2$ oder $\angle FTP' = \angle FPT$; $\angle FTP = \angle FP'T$ oder $\angle FTP' = \angle FPT$; $\angle FP'T = \angle FTP$ ist, so folgt:

$$\triangle FTP' \sim \triangle FPT;$$

also verhält sich: $FT : FP' = FP : FT;$

und es ist: $FT^2 = FP \cdot FP'.$

Man sieht also:

11. **Lehrsatz.** In einer Parabel ist das Rechteck aus einem Paar Brennstrahlen FP, FP' gleich dem Quadrate des Brennstrahls, der vom Brennpunkt nach dem Durchschnittspunkte der in den Endpunkten P, P' angelegten Tangenten geht. $FP \cdot FP = FT^2$. Fig. 195.

Sind ferner, Fig. 196., an ein Paar Parabelpunkte P, P′ Tangenten gelegt, die von einer in 𝔓 berührenden dritten in 𝔗, 𝔗′ geschnitten werden, so ist:

$$\angle 𝔗F𝔗' = \angle 𝔗F𝔓 + \angle 𝔗'F𝔓;$$

oder nach Lehrsatz 9.

$$\angle 𝔗F𝔗' = \tfrac{1}{2}\cdot\angle PF𝔓 + \tfrac{1}{2}\cdot\angle P'F𝔓;$$

also:

$$\angle 𝔗F𝔗' = \tfrac{1}{2}\cdot\angle PFP'.$$

Man erhält also den dem Lehrsatz 17. in § 16. und § 17. entsprechenden

12. **Lehrsatz.** In jeder Parabel erscheint das von zwei festliegenden Tangenten (T — P), (T — P′) auf einer beliebigen dritten Tangente abgeschnittene Stück 𝔗𝔗′ vom Brennpunkte F aus immer unter demselben Winkel, nämlich unter einem Winkel, der halb so groß ist, als derjenige Winkel, unter dem die Berührungssehne PP′ der festliegenden Tangenten vom Brennpunkte aus erscheint. Fig. 196.

Nimmt man insbesondere P, P′ so, daß (P — P′) durch den Brennpunkt geht, und für 𝔓 den Scheitel A der Parabel, so überzeugt man sich sofort von dem dem Lehrsatz 19. in § 16. und 17. entsprechenden

13. **Lehrsatz.** Das Stück 𝔗𝔗′ der Scheiteltangente, welches von einem Paar Tangenten abgeschnitten wird, deren Berührungssehne (P — P′) durch den Brennpunkt F einer Parabel geht, erscheint von dem Brennpunkte aus unter einem rechten Winkel.

Steht insbesondere die Brennsehne (P — P′) senkrecht zur Axe, fällt also der Durchschnittspunkt T in den Durchschnittspunkt *D* der Leitlinie d mit der Axe, so wird $\angle PF𝔗 = \angle 𝔗FA = \angle 𝔗'FA = \angle P'F𝔗' = \tfrac{1}{2}R$. Fig. 197.

Soll ferner die Gleichung der Parabel gesucht werden, bezogen auf eine zur Axe parallele Gerade (B — M) und die Richtung der durch dieselbe halbirten Sehnen als Coordinatenaxen, Fig. 198., so sei (A — R) die Axe der Parabel, von B sei ein Loth auf dieselbe gefällt, und es sei AN = a; BN = e; RM = f. Die Strecken BM und MP heißen bezüglich ξ und η. Fällt man auch von P ein Loth auf die Axe, welches dieselbe in S, die (B — M) in Q schneidet, so verhält sich:

$$PM : PR = PQ : PS;$$

oder:

$$\eta : \eta + f = PS - e : PS. \qquad \dagger)$$

Ferner verhält sich:

$$PM : PR = MQ : RS.$$

Nun ist $MQ = BQ - BM = NS - \xi = AS - a - \xi$, und $RS = TS - TR = TS - BM = TS - \xi$, oder, da nach § 11. Lehr-

satz 61. $AT = AN = a$ ist, $RS = AS + a - \xi$. Es lautet also die letzte Proportion:

$$PM : PR = AS - a - \xi : AS + a - \xi;$$

oder: $$\eta : \eta + f = AS - a - \xi : AS + a - \xi. \qquad \dagger\dagger)$$

Nun folgt aus der Proportion $\dagger$):

$$f : \eta + f = e : PS:$$

also: $$PS = \frac{e}{f} \cdot (\eta + f); \qquad *)$$

aus $\dagger\dagger$) aber folgt:

$$\eta : f = AS - a - \xi : 2a;$$

also ist:

$$AS \cdot f - (a + \xi) f = 2a \cdot \eta;$$

und $$AS = \frac{2a}{f} \cdot \eta + (a + \xi). \qquad **)$$

Nach § 11. Seite 358. ist nun, da AS hier an der Stelle des dortigen x, PS an der Stelle des dortigen y steht, wenn p der Parameter der Parabel ist:

$$PS = \sqrt{p \cdot AS};$$

also vermöge der Gleichungen *) und **)

$$\frac{e}{f} \cdot (e + f) = \sqrt{\frac{2pa}{f} \cdot \eta + pa + p\xi}.$$

Zugleich ist, wenn wir an derselben Stelle BN oder e für y, und also AN oder a für x setzen

$$e = \sqrt{pa};$$

also ist: $$\frac{\sqrt{pa}}{f} \cdot (\eta + f) = \sqrt{\frac{2pa}{f} \cdot \eta + pa + p\xi}.$$

Endlich ist $f = RM = TB = \sqrt{TN^2 + BN^2} = \sqrt{(2a)^2 + e^2} = \sqrt{4a^2 + pa}$, da $e^2 = pa$ ist, oder $f = \sqrt{a(p + a)}$. Es ist also:

$$\sqrt{\frac{p}{p + 4a}} \left(\eta + \sqrt{a(p + 4a)}\right) = \sqrt{\frac{2p\sqrt{a}}{\sqrt{p + 4a}} \cdot \eta + pa + p\xi};$$

oder: $$\sqrt{\frac{p}{p + 4a}} \cdot \eta + \sqrt{pa} = \sqrt{2 \frac{p\sqrt{a}}{\sqrt{p + 4a}} \cdot \eta + pa + p\xi}.$$

Erhebt man beiderseits auf das Quadrat, so erhält man:

$$\frac{p}{p + 4a} \cdot \eta^2 + 2 \frac{p\sqrt{a}}{\sqrt{p + 4a}} \cdot \eta + pa = 2 \frac{p\sqrt{a}}{\sqrt{p + 4a}} \cdot \eta + pa + p\xi;$$

oder: $$\frac{\eta^2}{p + 4a} = \xi;$$

also: $$\eta = \sqrt{(p + 4a) \cdot \xi}.$$

Dieß ist die verlangte Gleichung der Parabel.

Ist nun, Fig. 199., α die Scheiteltangente einer Parabel, p irgend eine andere, in P berührende Tangente, welche die Scheiteltangente α in $\mathfrak{T}$ schneidet, so ist $\mathfrak{T}$ der Pol der Sehne (A − P), also ist nach Lehrsatz 9. $\angle \mathfrak{T}\mathrm{FP} = \angle \mathfrak{T}\mathrm{FA}$; ferner ist, wenn von $\mathfrak{T}$ das Loth ($\mathfrak{T} - \mathfrak{L}$) auf den Brennstrahl (F − P) gefällt wird, $\mathfrak{T}\mathrm{F} = \mathfrak{T}\mathrm{F}$, $\angle \mathfrak{T}\mathfrak{L}\mathrm{F} = \angle \mathfrak{T}\mathrm{AF} = 1\mathrm{R}$, also $\triangle \mathfrak{T}\mathfrak{L}\mathrm{F} \cong \triangle \mathfrak{T}\mathrm{AF}$, also ist $\mathrm{F}\mathfrak{L} = \mathrm{FA}$, und da $(\mathfrak{T} - \mathfrak{L}) \perp (\mathrm{F} - \mathfrak{L})$, und $\mathrm{F}\mathfrak{L}$ von constanter Länge FA ist, so sieht man

14. Lehrsatz. Die von einem Punkte $\mathfrak{T}$ der Scheiteltangente α der Parabel auf denjenigen Brennstrahl, welcher den Berührungspunkt P der zweiten von $\mathfrak{T}$ an die Parabel gelegten Tangente mit dem Brennpunkte F verbindet, gefällten Senkrechten $\mathfrak{T}\mathfrak{L}$, berühren alle einen Kreis, dessen Centrum F, dessen Radius die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel A der Parabel ist. Fig. 199.

Auch bei der Parabel läßt sich dieser Satz verallgemeinern. Zieht man nämlich eine beliebige Gerade $(T - D)$ parallel zur Leitlinie d, die von der Tangente p in T geschnitten wird, Fig. 199., und fällt man von T ein Loth $(T - P)$ auf (F − P), so verhält sich, da in unserem Falle $\angle \mathrm{PFP'} = 2\mathrm{R}$, also nach Lehrsatz 9. $\angle \mathrm{PFT} = 1\mathrm{R}$, folglich $(\mathrm{T} - \mathrm{F}) \parallel (T - P)$ ist:

$$\mathrm{PF} : \mathrm{P}P = \mathrm{PT} : \mathrm{P}T;$$

oder: $$\mathrm{PF} : \mathrm{P}P = \mathrm{PS} : \mathrm{P}S.$$

Nach Lehrsatz 4. ist aber $$\mathrm{PS} = \mathrm{PF},$$

also ist: $$\mathrm{P}P = \mathrm{P}S;$$

und $$\mathrm{PF} - \mathrm{P}P = \mathrm{PS} - \mathrm{P}S;$$

oder: $$\mathrm{F}P = \mathrm{S}S;$$

oder: $$\mathrm{FP} = \mathrm{D}D.$$

Man hat also den

15. Lehrsatz. Zieht man irgend eine Gerade parallel zur Leitlinie d einer Parabel, und zieht von beliebigen Punkten T dieser Geraden je eine Tangente p an die Parabel, zieht die Brennstrahlen FP nach dem Berührungspunkt P derselben und fällt dann von T eine Senkrechte TP auf diesen Brennstrahl FP, so berühren diese Senkrechten TP alle einen Kreis K; der Mittelpunkt desselben ist F; sein Halbmesser ist constant, wo auch immer der Punkt T auf der einmal angenommenen Geraden $(T - D)$ gewählt sein mag.

Nimmt man insbesondere für die Gerade $(T - D)$ die Leitlinie d der Parabel, so geht der Kreis in einen Punkt über, nämlich in den Brennpunkt F. Fig. 199.

Da ferner $\mathrm{P}P = \mathrm{P}S$ und $(\mathrm{P} - P) \perp (T - P)$, $(\mathrm{P} - S) \perp (T - D)$ war, so kann man sagen:

16. **Lehrsatz. Jeder Punkt P des Umfanges einer Parabel ist der Mittelpunkt eines Kreises (mit dem Halbmesser $\mathrm{P}P = \mathrm{P}S$), der den Kreis K dessen Mittelpunkt F, dessen Halbmesser $\mathrm{F}P$ ist, und die Gerade $(T - D)$ berührt.**

Zieht man, Fig. 200., vom Punkte S eine Gerade $(S - P)$ und sucht den Punkt X zu bestimmen, in welchem dieselbe die Axe $(\mathrm{A} - \mathrm{A}')$ der Parabel schneidet, so entsteht ein Dreieck $\mathrm{F}P\mathrm{X}$, in welchem $\angle \mathrm{F}P\mathrm{X} = \angle \mathrm{P}PS$, $\angle P\mathrm{FX} = \angle P\mathrm{P}S$ ist; es ist also $\triangle \mathrm{F}P\mathrm{X} \sim \triangle \mathrm{P}PS$, und da in letzterem $\mathrm{P}S = \mathrm{P}P$ ist, so ist auch im $\triangle \mathrm{F}P\mathrm{X}$ Seite $\mathrm{FX} = \mathrm{F}P$. Es fällt also X in den einen Durchschnittspunkt Σ des Kreises K mit der Parabelaxe $(\mathrm{A} - \mathrm{A}')$. Ebenso geht auch $(S' - P')$ durch Σ u. s. w. Bestimmt man also verschiedene Punkte T, T' auf $(T - D)$ und legt von ihnen Tangenten p, p′ an die Parabel, so erhält man verschiedene Punkte S, S' u. s. w., so wie verschiedene Punkte P, P'. Es entstehen auf diese Weise drei Strahlbüschel. Die Strahlen des einen laufen alle parallel der Parabelaxe, er ist also ein Parallel-Strahlbüschel, oder ein Strahlbüschel, dessen Scheitel in unendlicher Entfernung, in der Richtung $(\mathrm{A} - \mathrm{A}')$ sich befindet; der Scheitel des zweiten Strahlbüschels liegt in Σ, der des dritten in F. Da nun je zwei Strahlen der Strahlbüschel $\infty, (P - S), (P' - S') \ldots$, und $\Sigma, (\Sigma - S), (\Sigma' - S') \ldots$ sich auf der Geraden $(T - D)$ schneiden, so ist der Parallel-Strahlbüschel ∞ perspectivisch, also auch conform mit dem Strahlbüschel Σ. Zugleich werden jede zwei entsprechende Strahlen dieser Büschel, wie $(\mathrm{P} - S)$ und $(\Sigma - S)$, $((\mathrm{P}' - S')$ und $(\Sigma - S'))$ u. s. w. von einem Strahl $(\mathrm{F} - \mathrm{P})$ (oder $(\mathrm{F} - \mathrm{P}')$) des Büschels F, der eine in einem Punkte P (oder P′) der Parabel, der andere in einem Punkte P (oder P') des Kreises geschnitten. Man kann daher die Parabel als eine Curve des von den Strahlbüscheln ∞ und F, den Kreis als die homologe Curve des von den Strahlbüscheln Σ und F erzeugten Systems ansehen, und hat den

17. **Lehrsatz. Eine Parabel ist dem in Lehrsatz 15. erwähnten Kreise K perspectivisch collinear, und zwar liegt der Scheitel des einen, die perspectivische Collineation bestimmenden Strahlbüschels in unendlicher Entfernung in der Richtung der Parabelaxe, der Scheitel des anderen in dem vom Parabel-Scheitel abwärts gelegenen Durchschnittspunkt Σ des Kreises K mit der Parabelaxe, das Collineationscentrum im Centrum F des Kreises K; die Collineationsaxe ist stets die Gerade $(T - D)$, die parallel zur Leitlinie d der Parabel, und von ihr um eine Strecke $\mathrm{D}D$ gleich dem Radius $\mathrm{F}P$ des Kreises K entfernt ist. Fig. 200.**

Wenn man bedenkt, daß man sich in der Parabel einen zweiten

Brennpunkt F′ im Unendlichen, und also (P − *S*) als (F′ − P) denken kann, wenn man ferner erwägt, daß (*T* − *D*) ⊥ (P − *S*) ist, so erhellt, daß man sich (*T* − *D*) selbst als den, hier mit unendlich großem Radius beschriebenen Kreis K′ bei der Ellipse und Hyperbel vorstellen darf. Man erkennt sogleich die Analogie der Lehrsätze 15., 16., 17. mit den in § 16. und 17. aufgestellten Sätzen 22., 23., 24.


Da endlich der Scheitel Σ im System Σ, F, homolog ist dem unendlich entfernten Scheitel, ∞, im System ∞, F; so folgt, daß Σ ein Punkt der Gegenaxe des Systems Σ, F ist. Zugleich ist nach § 8. Lehrsatz 10. die Gegenaxe dieses Systems selbst parallel der Collineationsaxe (*T* − *D*), also senkrecht zu (A − A′) oder senkrecht zu (Σ − F). Eine in Σ senkrecht auf (Σ − F) gezogene Gerade berührt aber den Kreis K in Σ. Man erhält also den

18. Lehrsatz. Die im Punkte Σ an den Kreis K gelegte Tangente ist die dem System Σ, F zugehörige Gegenaxe.

Daß dieser Satz dem in § 16. und § 17. als Lehrsatz 25. aufgestellten entspricht, ist sofort ersichtlich.

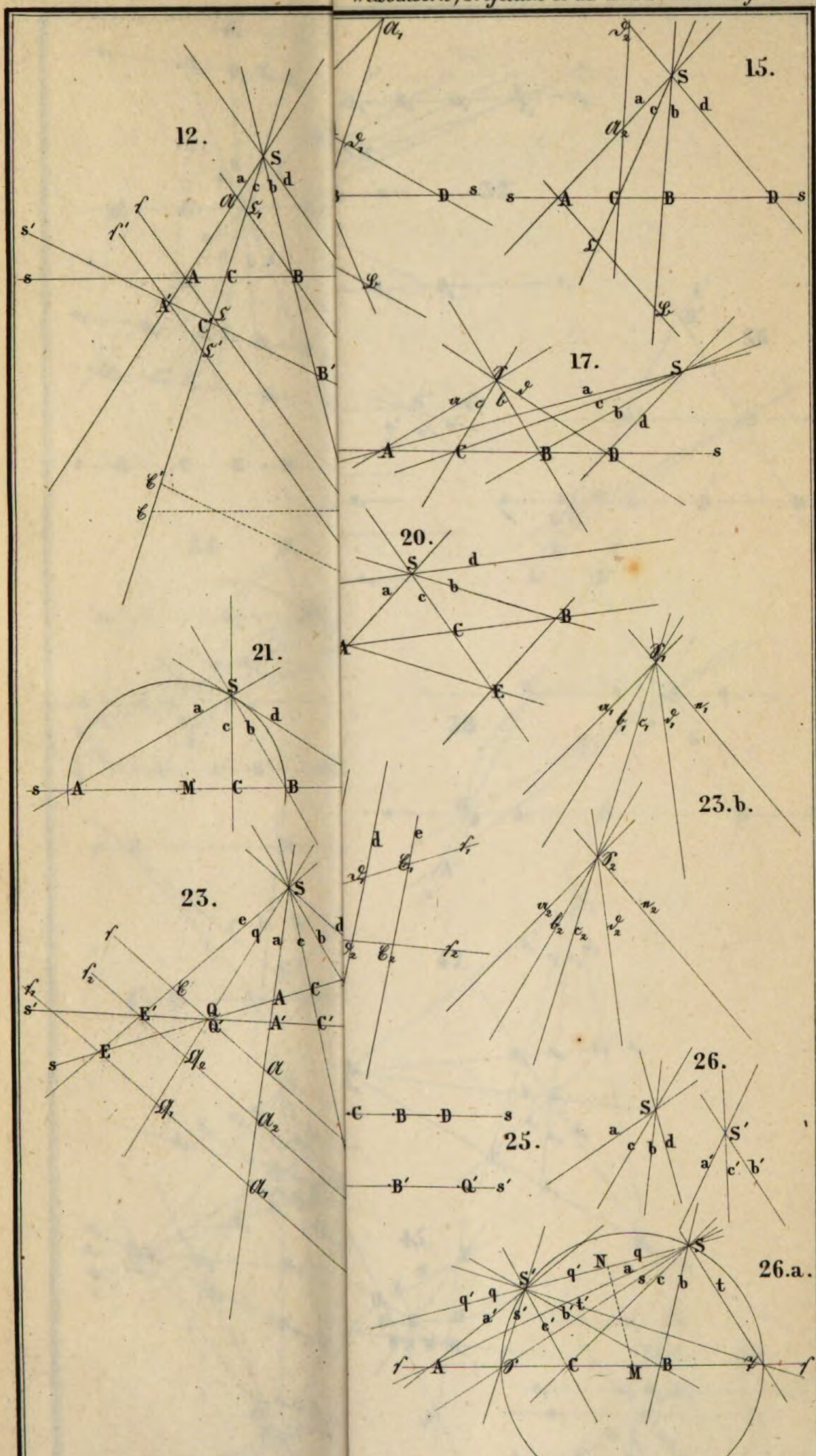
Verlag der Weidmannschen Buchhandlung (Karl Reimer) in Berlin.

Druck von Carl Schultze in Berlin, Kommandantenstr. 72.


J. Sulzer lith.


Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.



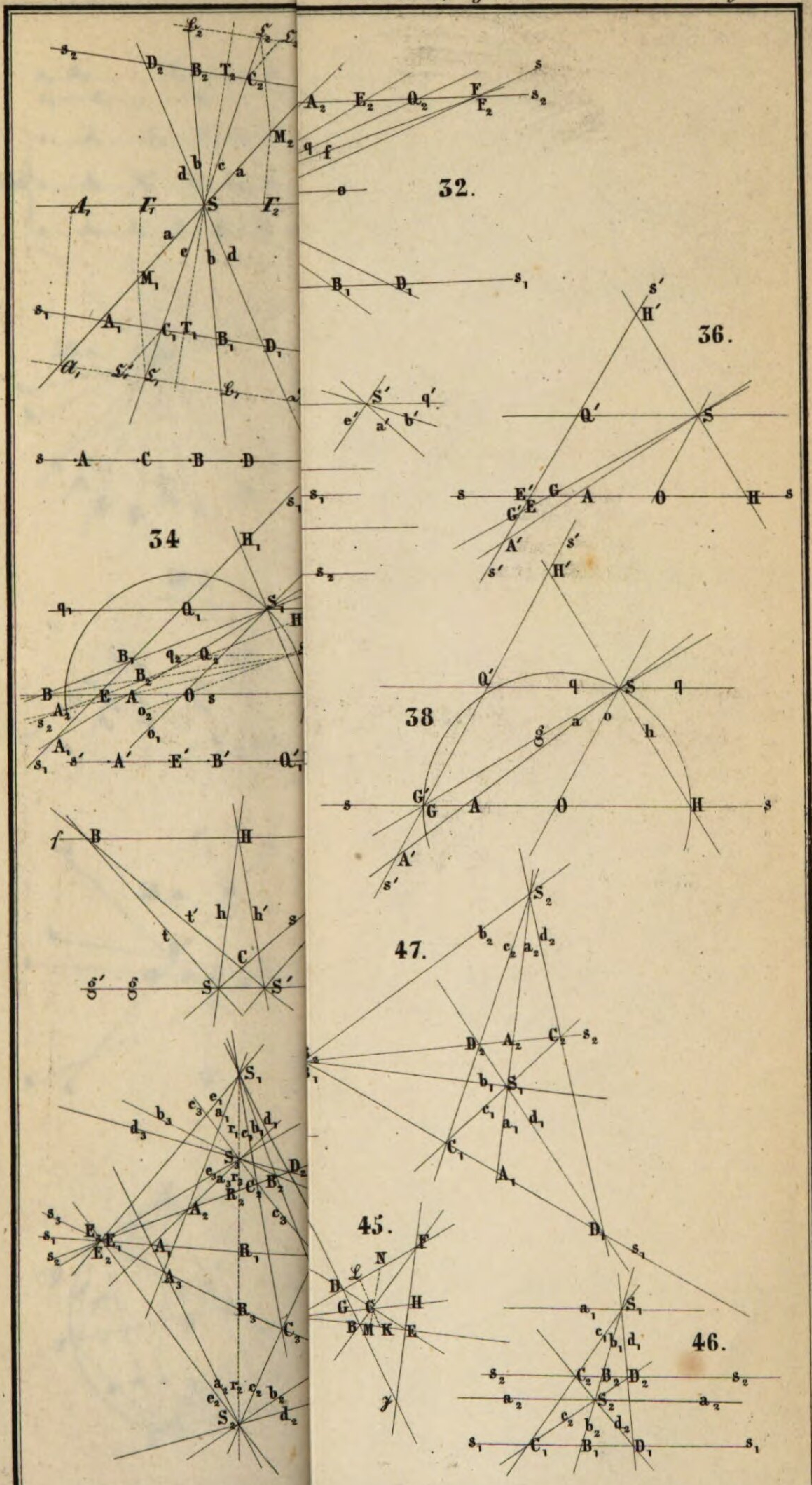
Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.



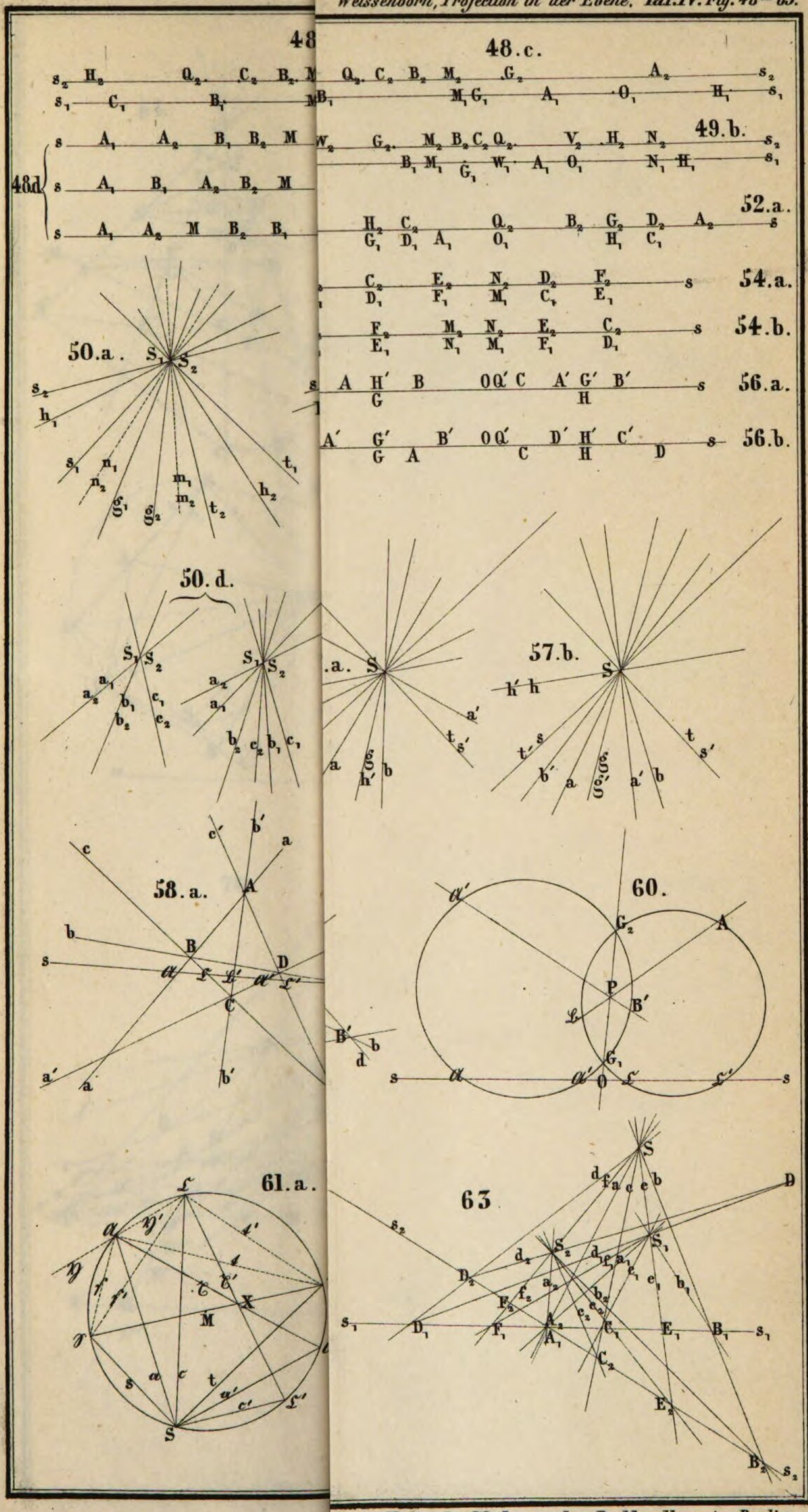
Verlag der Weidmann'schen Buchhandlung in Berlin.




Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.




Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.




Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.

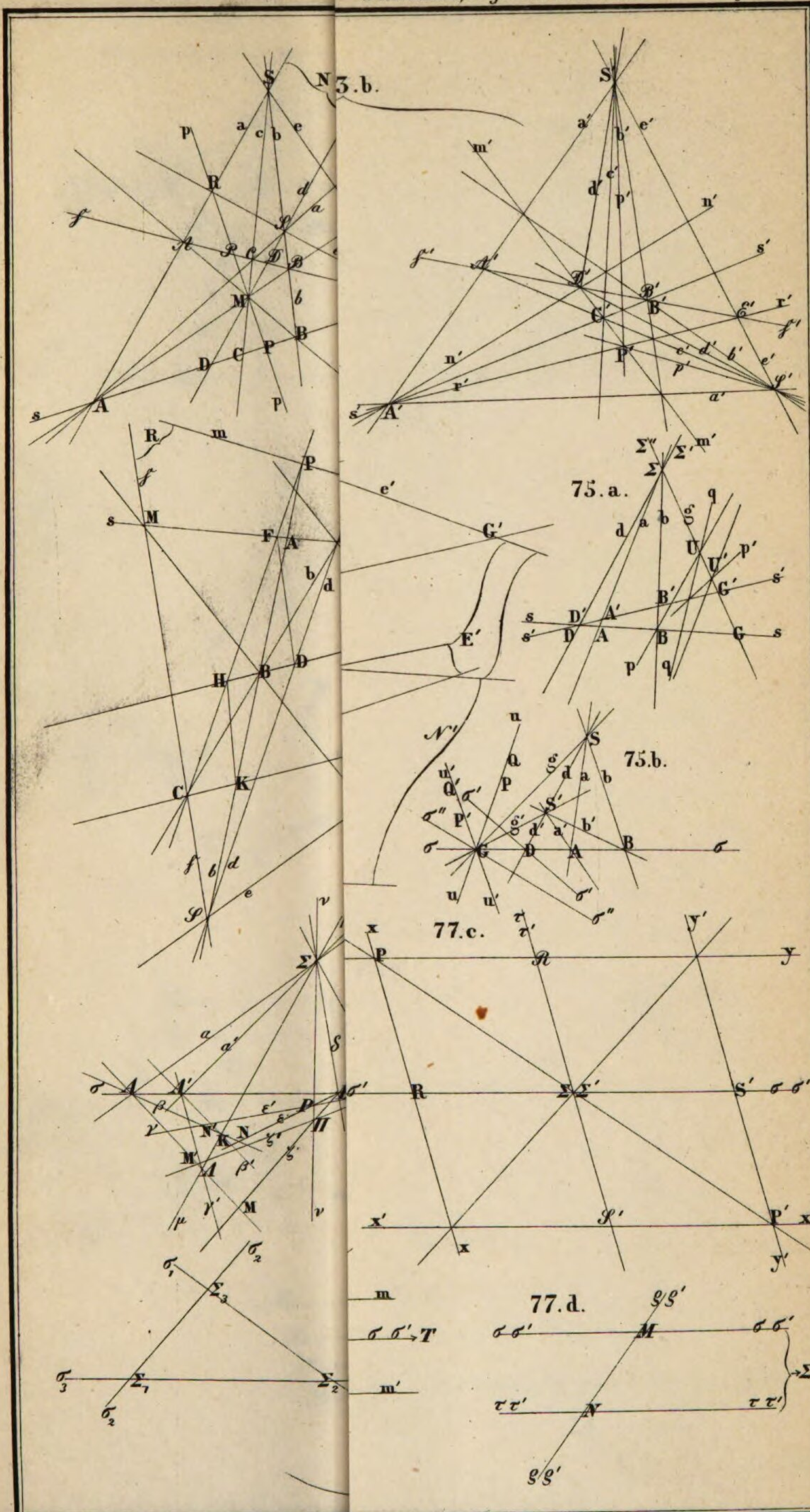


Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.


Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.

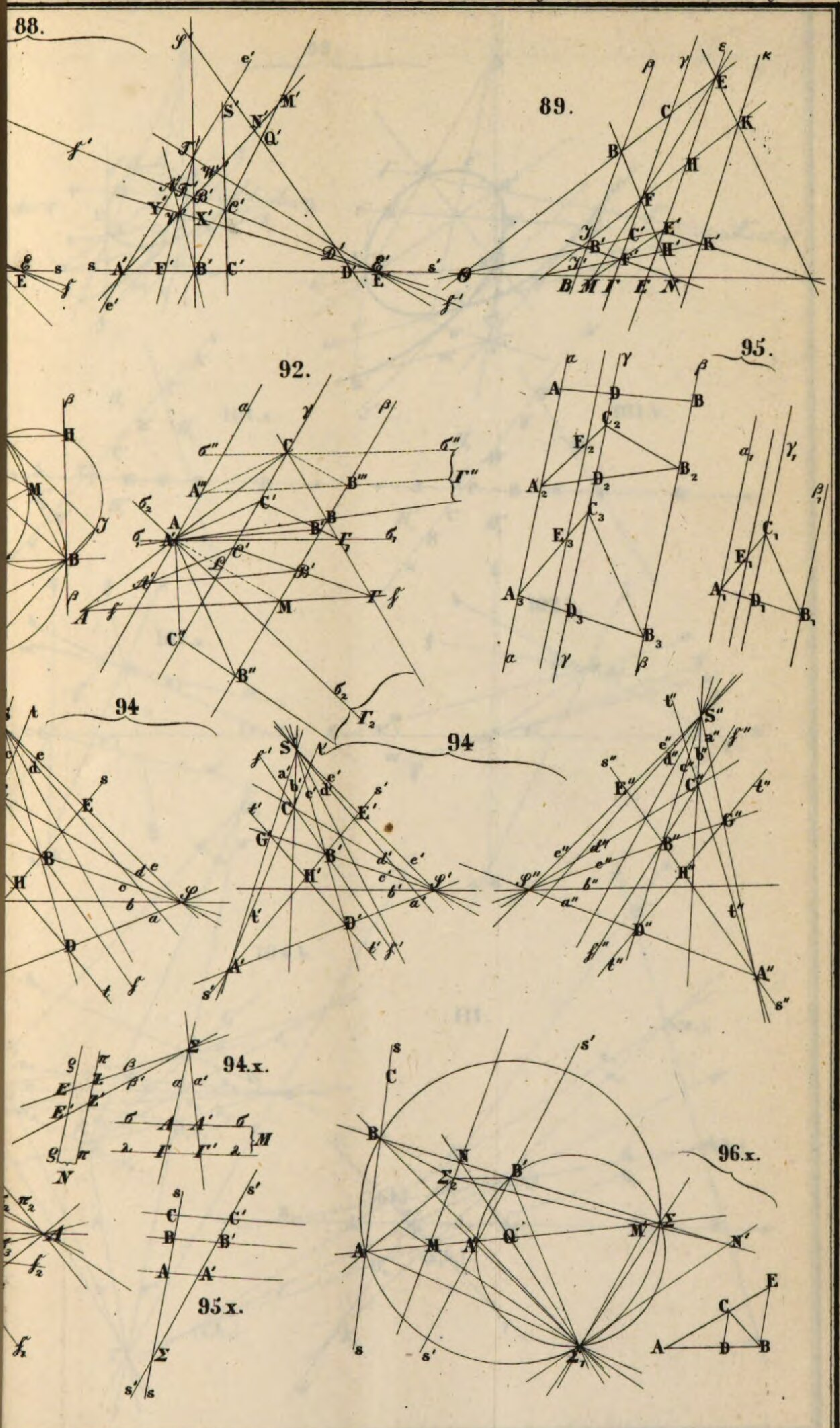




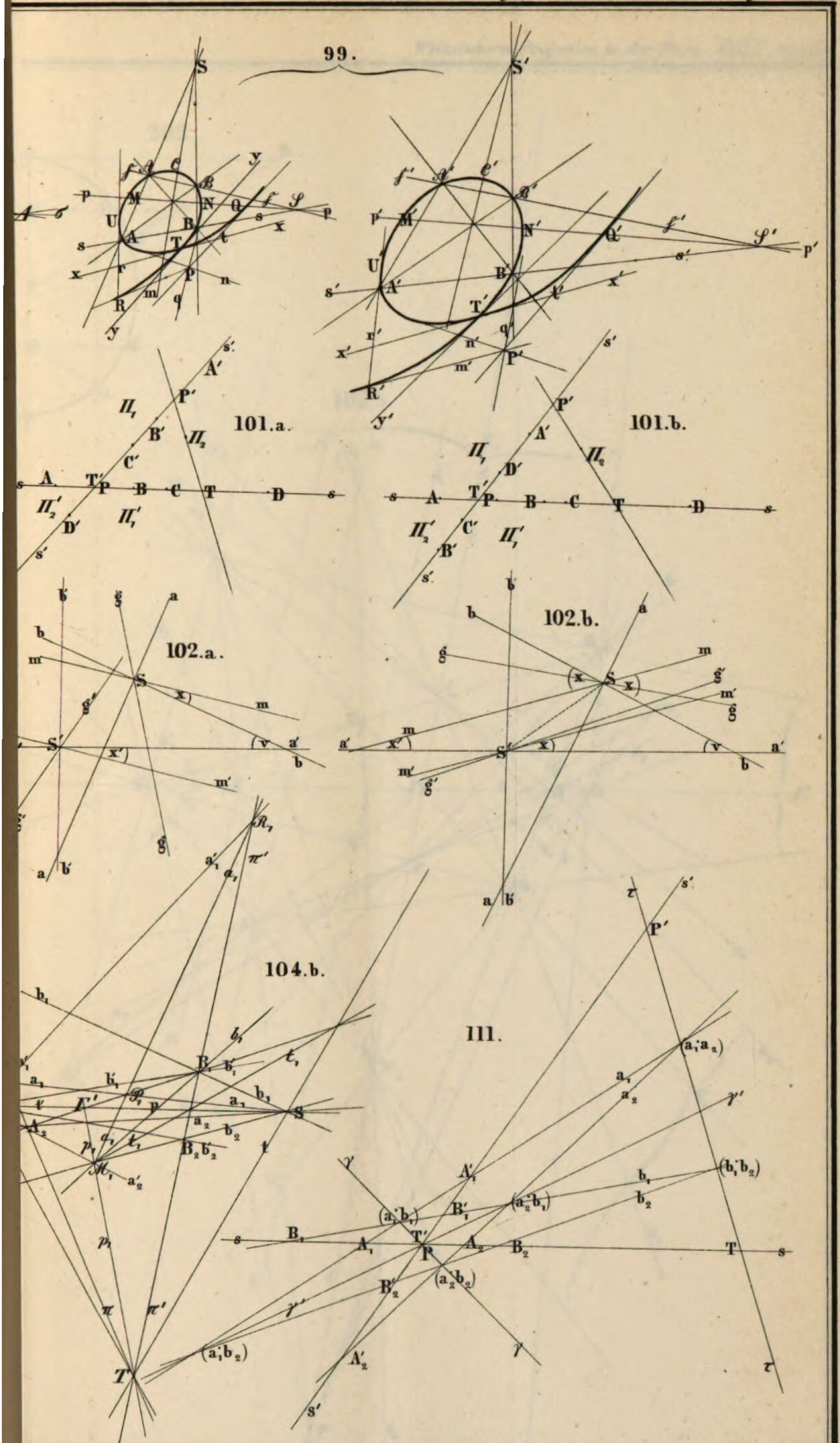
Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.



Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.


Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.



Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.

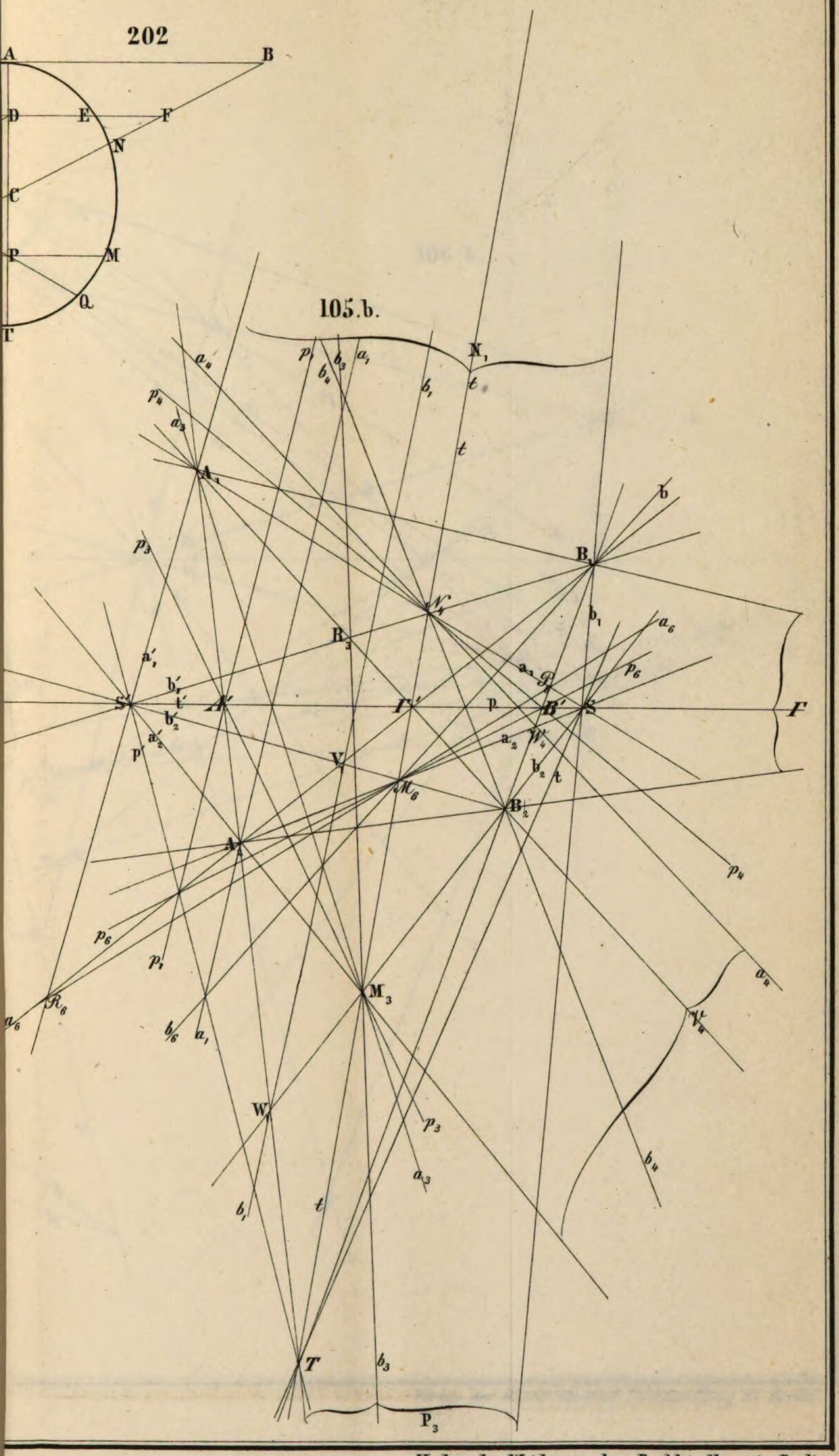





Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.

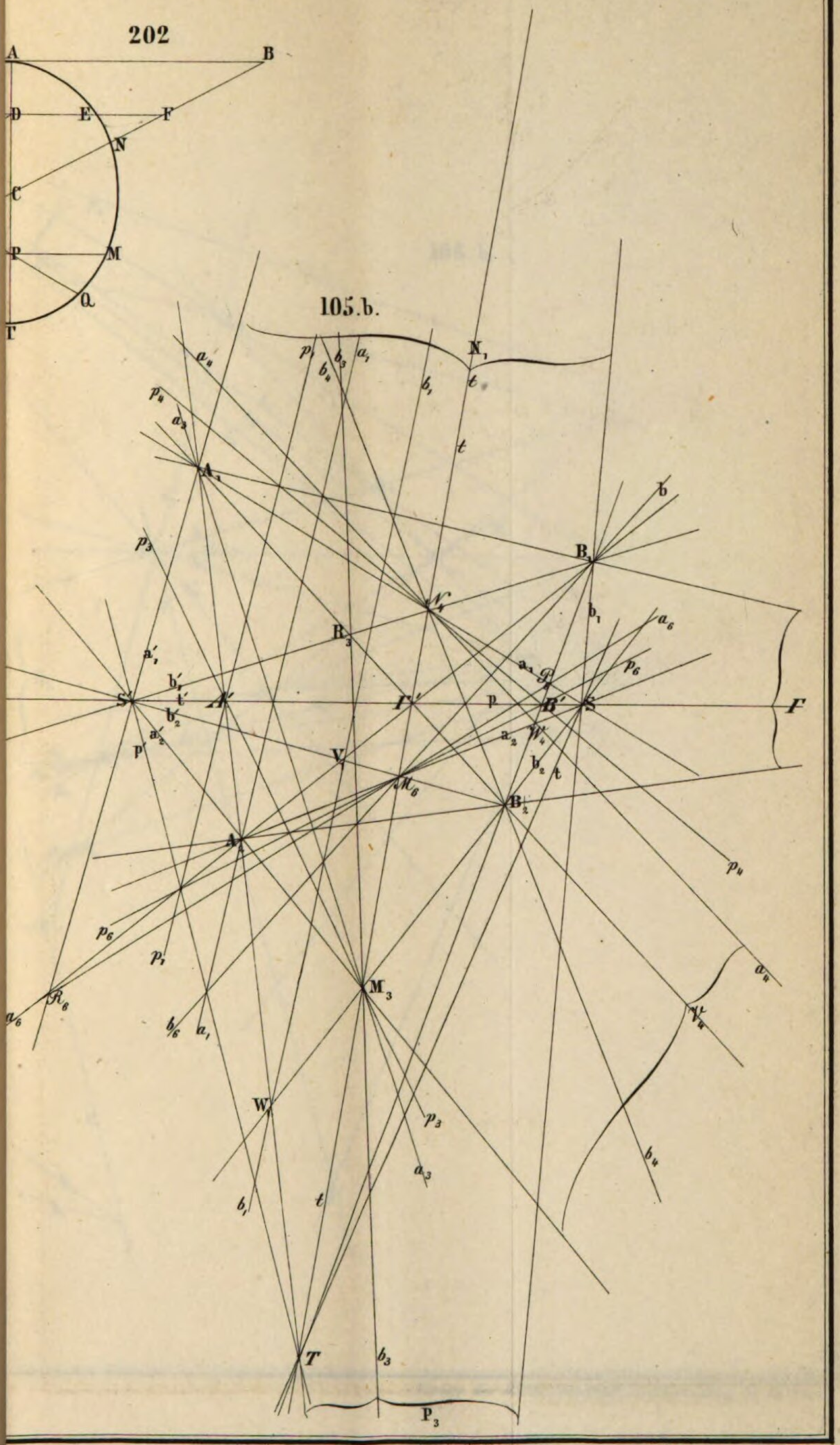
202


105.b.




Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.



202
A
B
D
E
F
N
C
P
M
Q
T
105.b.
N₁
A₁
B₁
N₄
R₃
S′
A′
Γ′
p
B′
S
Γ
V₁
M₆
B₂
A₂
R₆
M₃
W₁
T
P₃




Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.




Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.




Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.




Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.




Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.



Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.



Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.


J. Sulzer lith.
Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.


M₂
M

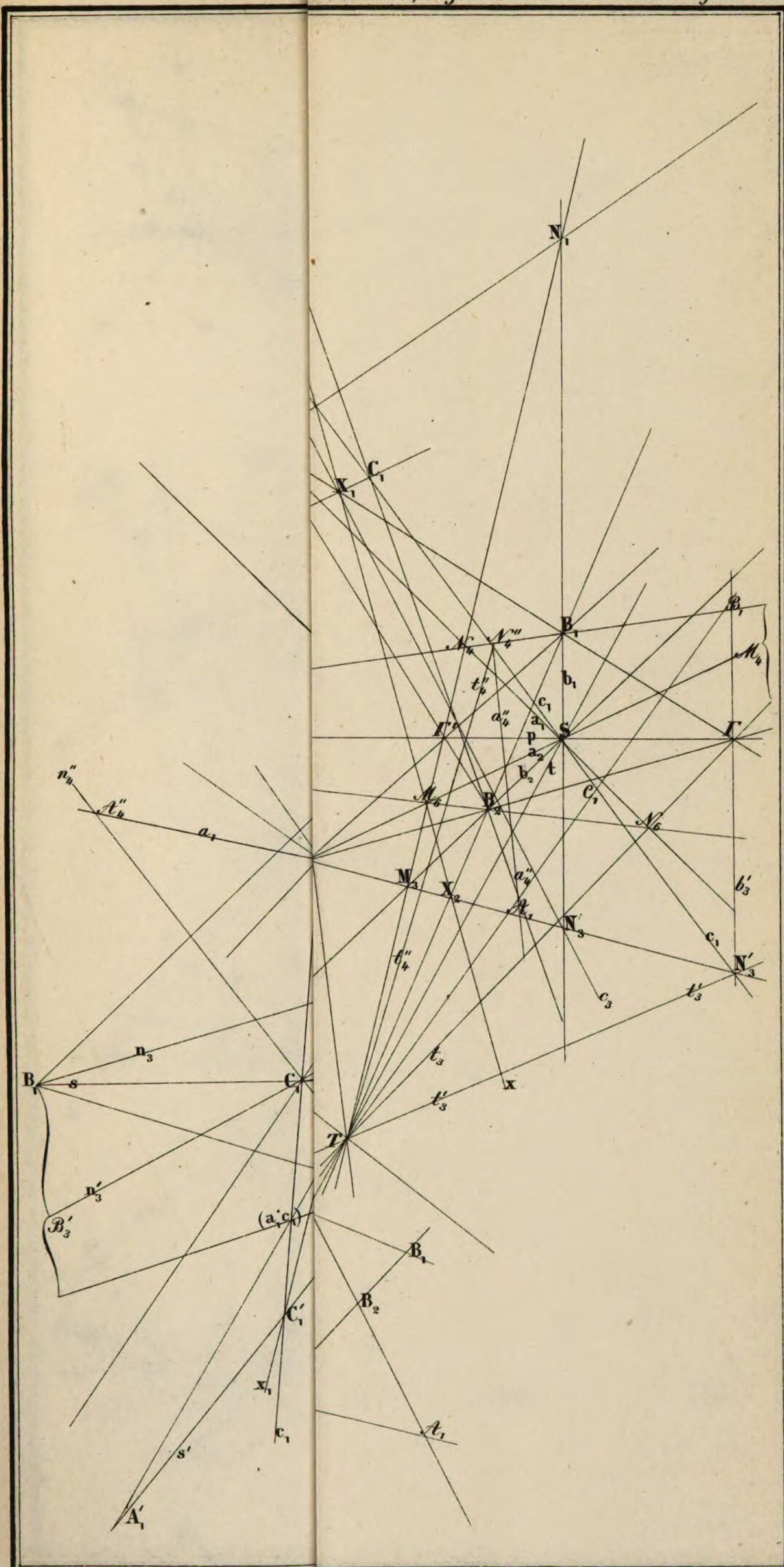
107.b.




Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.




Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.


Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.


Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.


128.



J. Sulzer lith.
Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.



J. Sulzer lith.

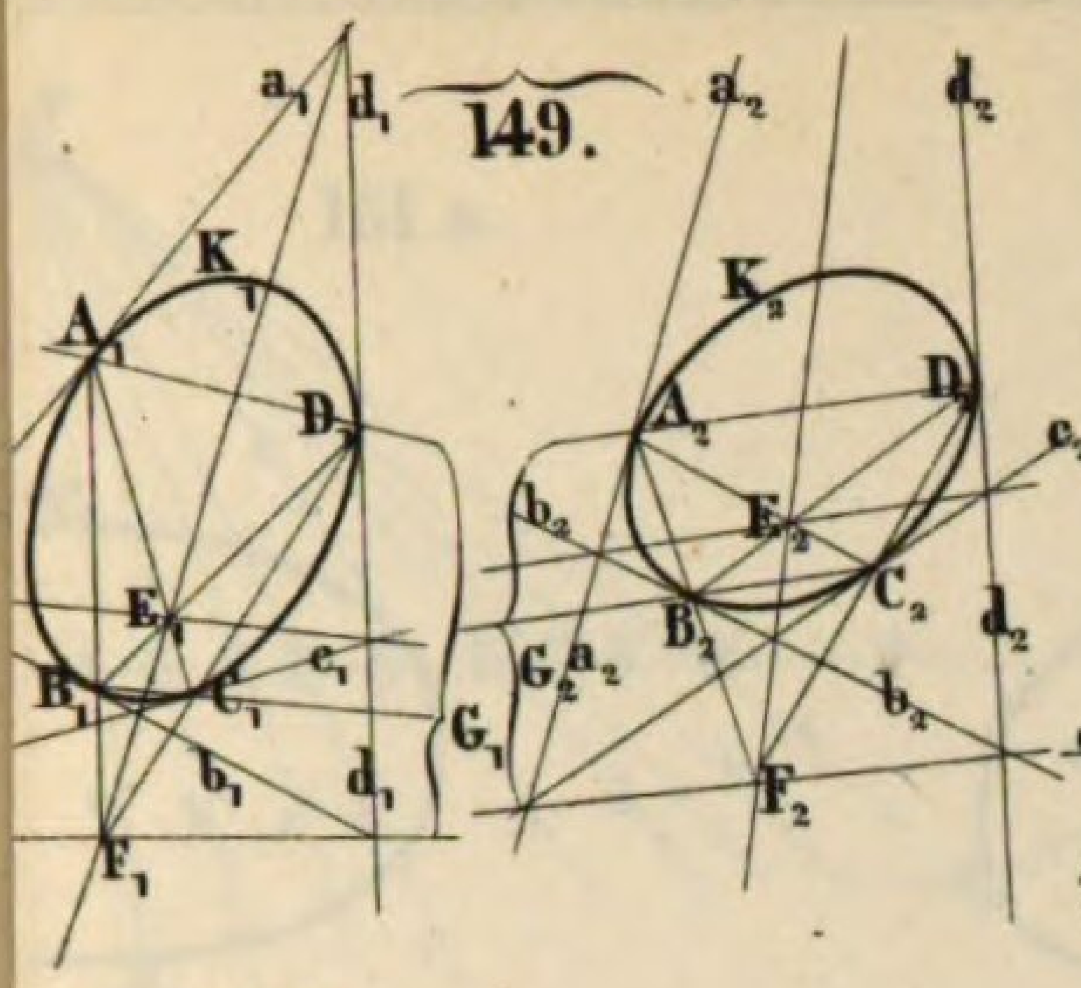
Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.



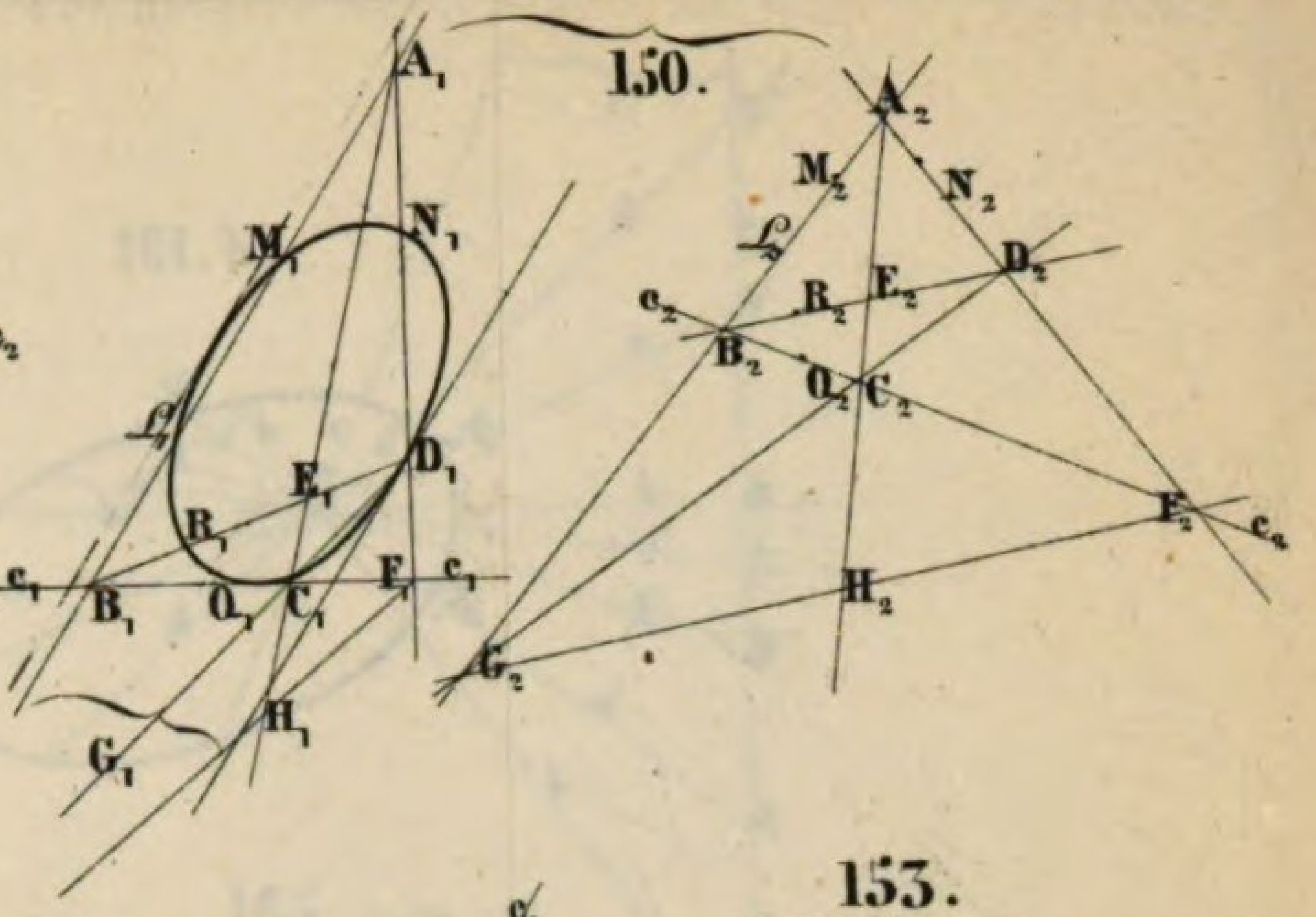


Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.

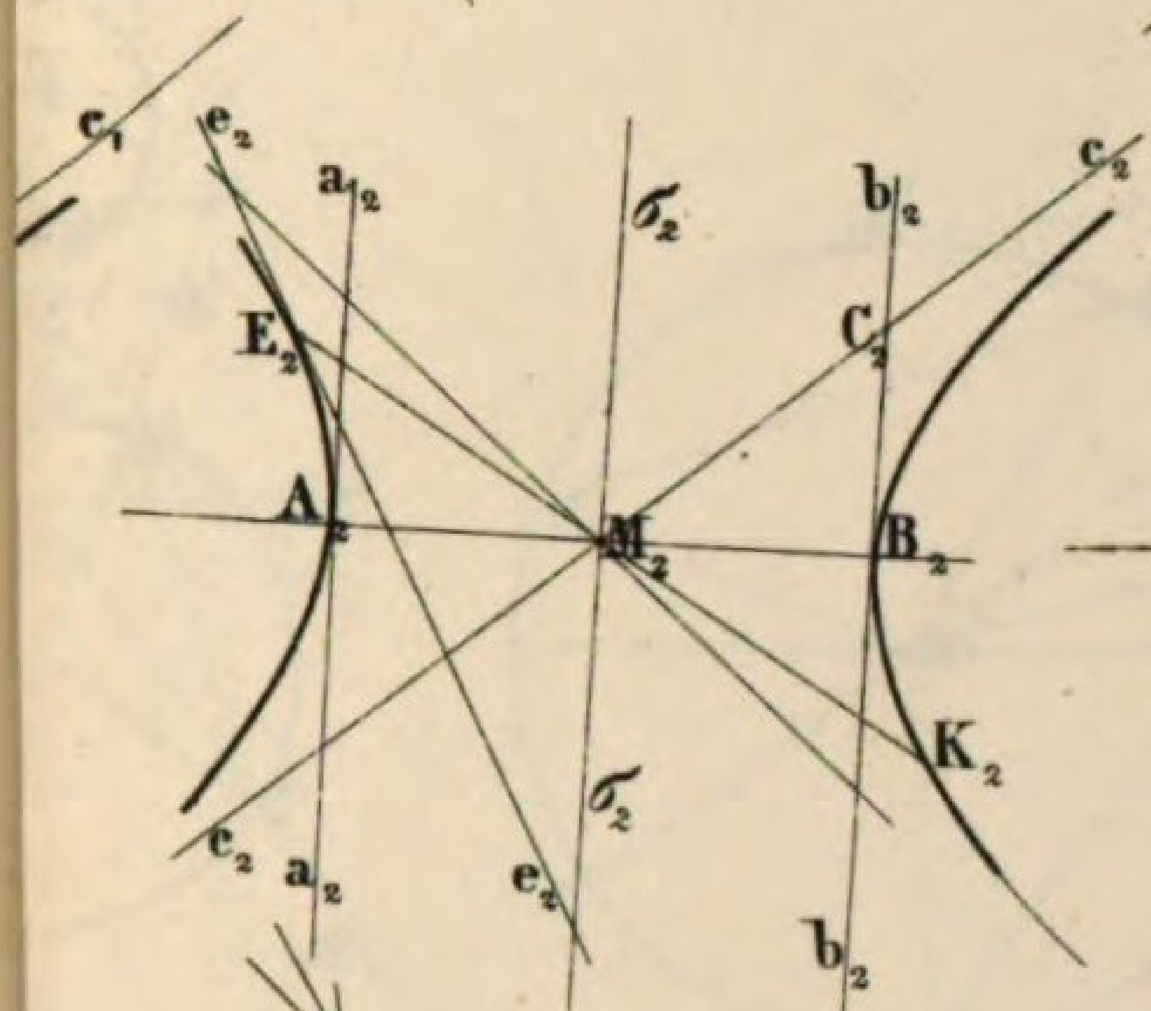
149.



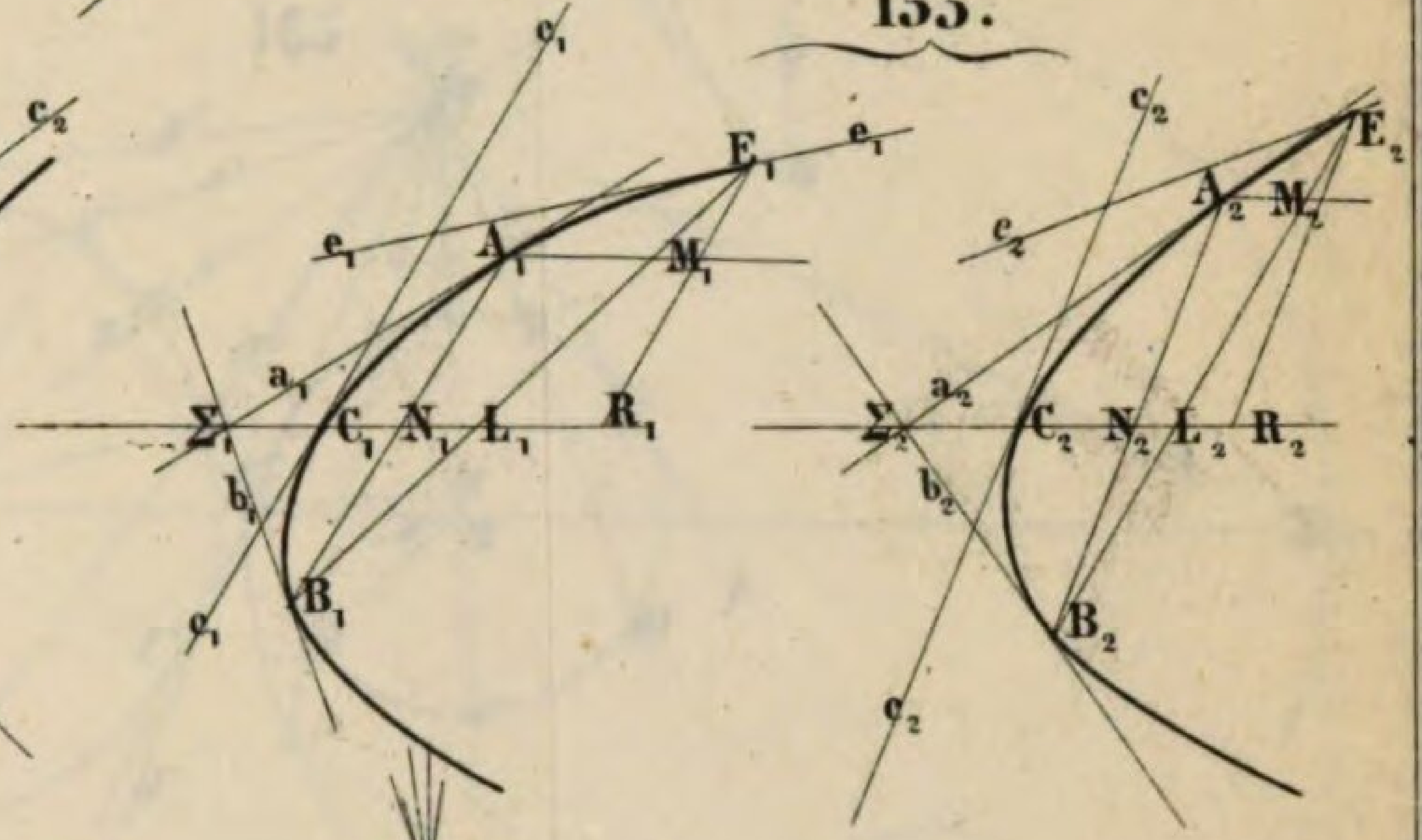
150.



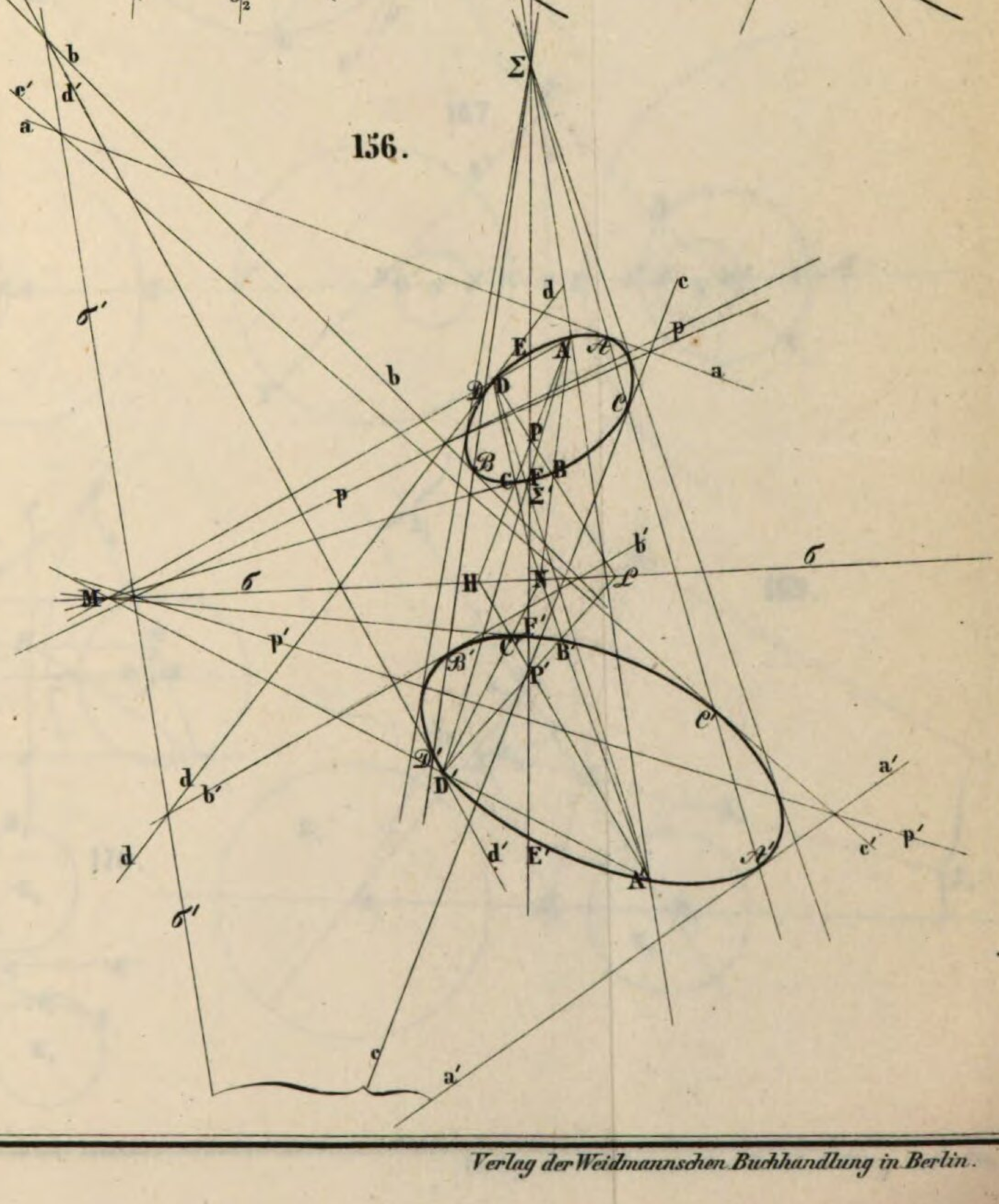
152.


153.




156.




Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.

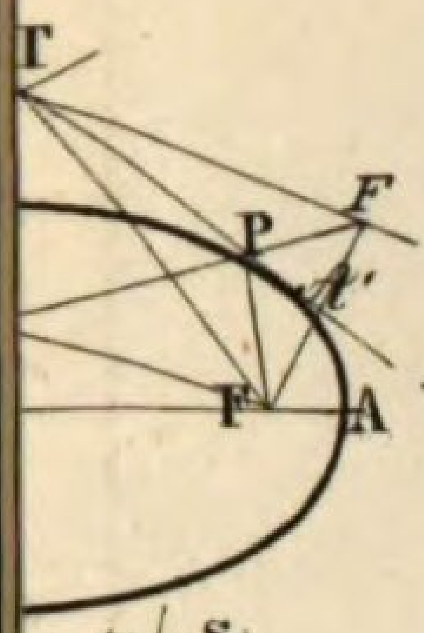




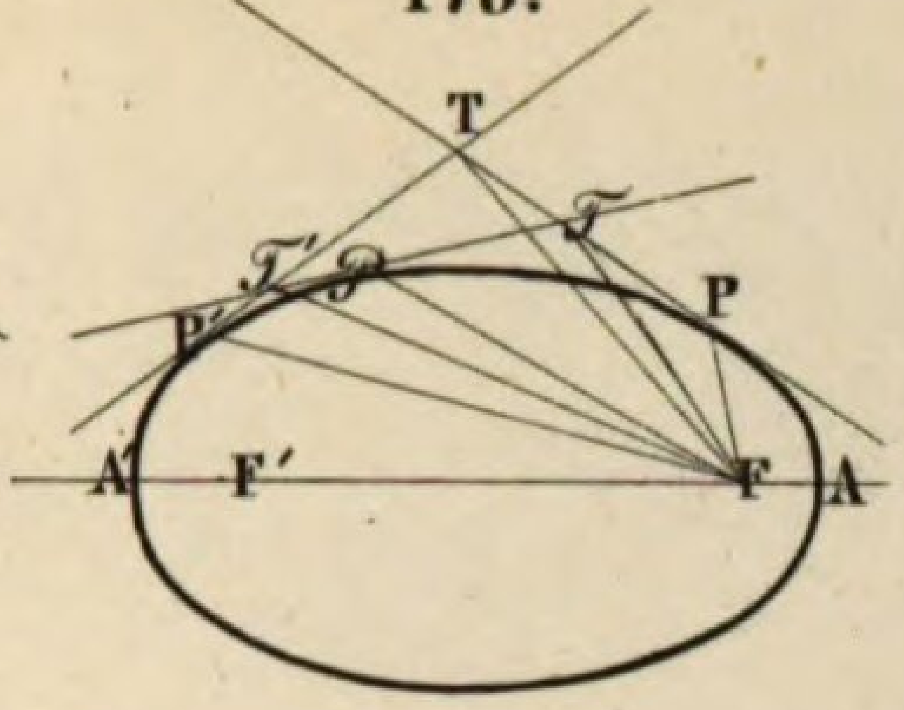
Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.


185.b.
192.

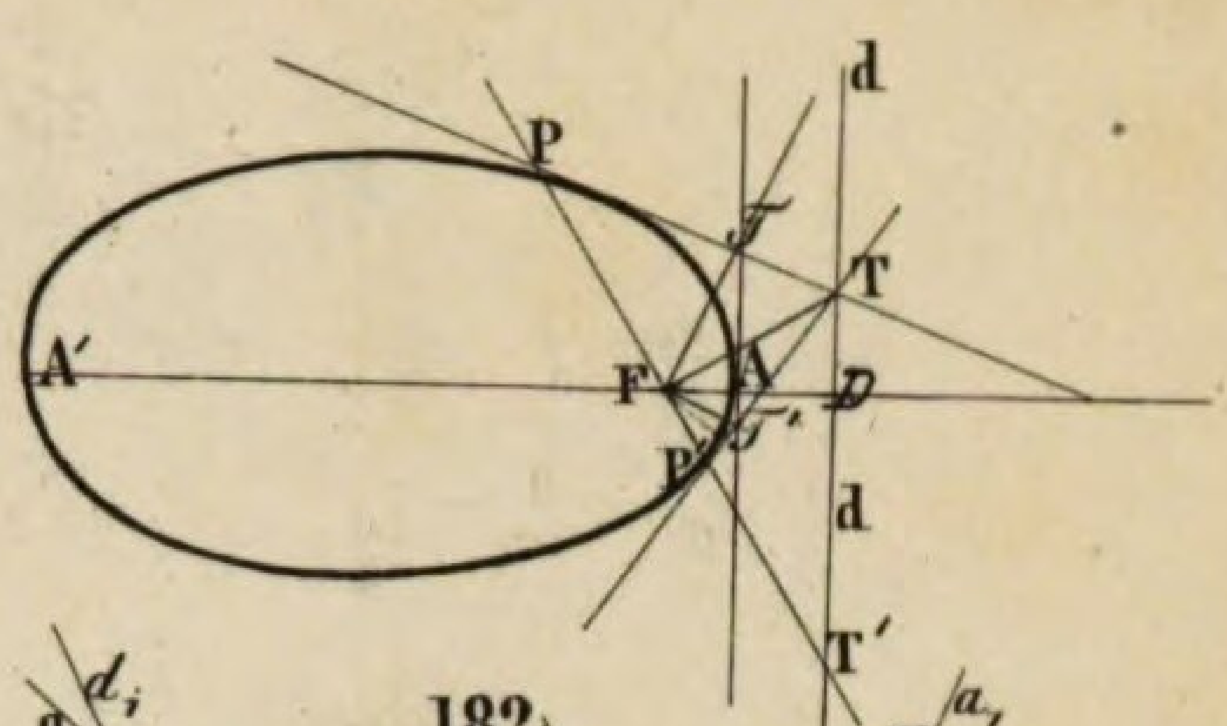
…4.

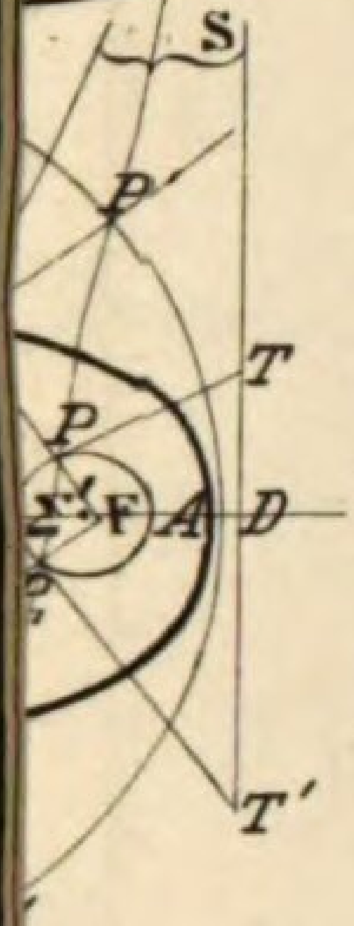


175.

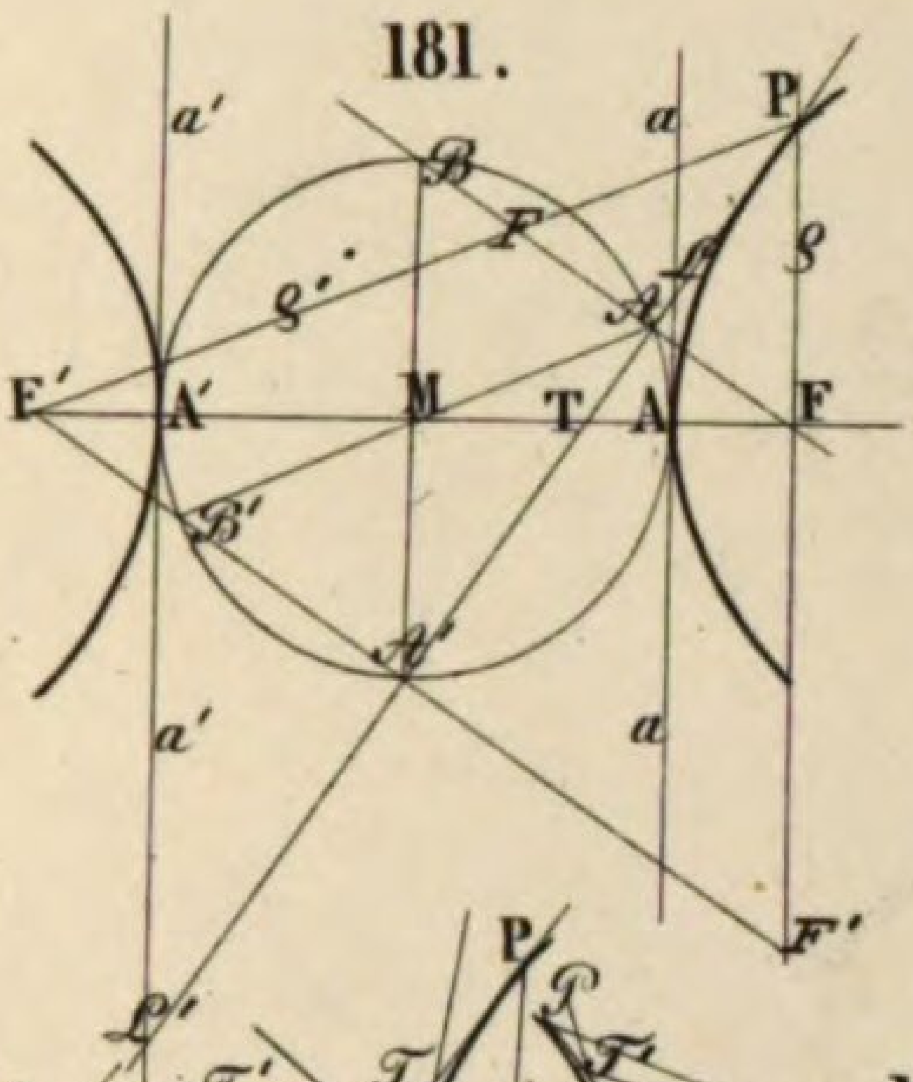


176.

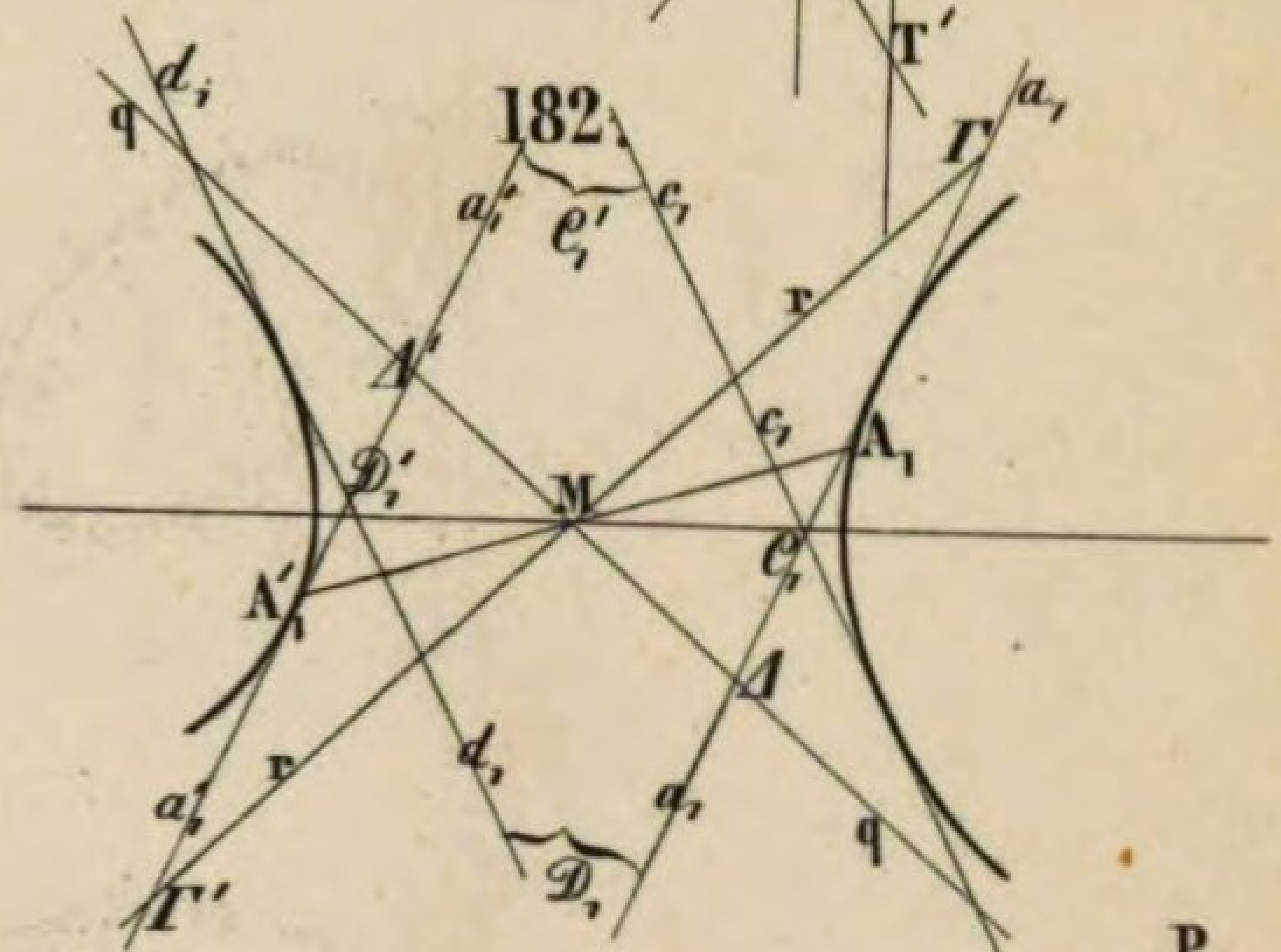




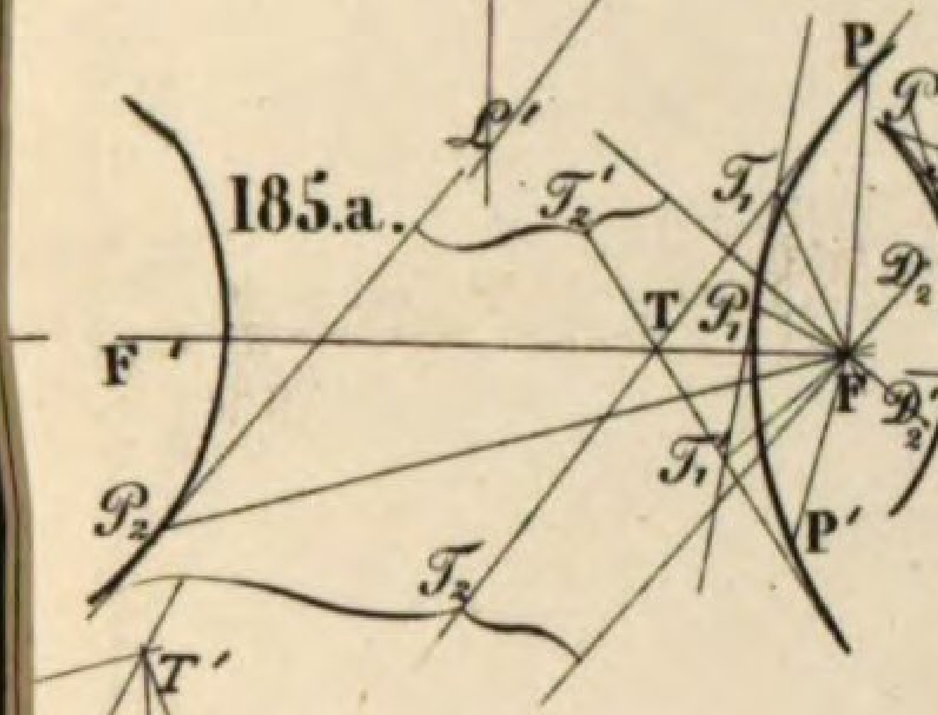
181.



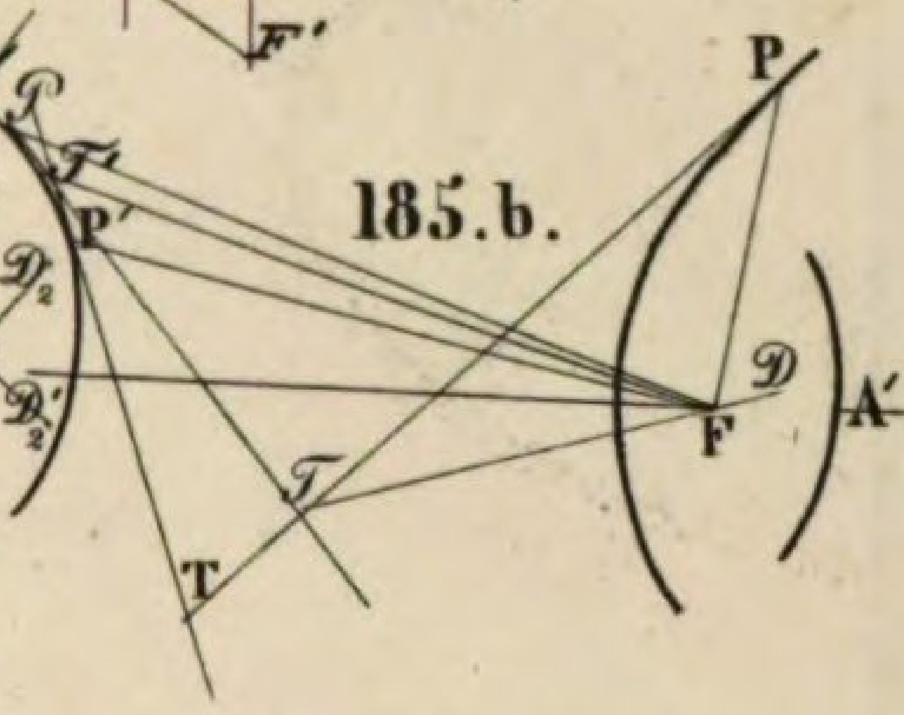
182.



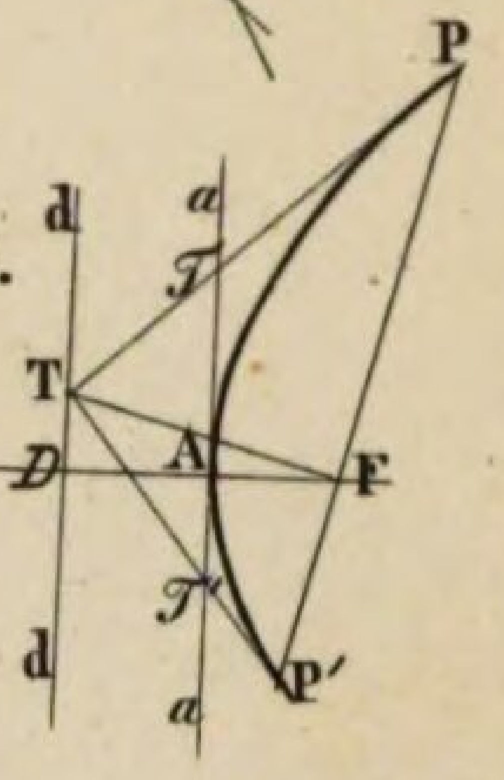
185.a.



185.b.

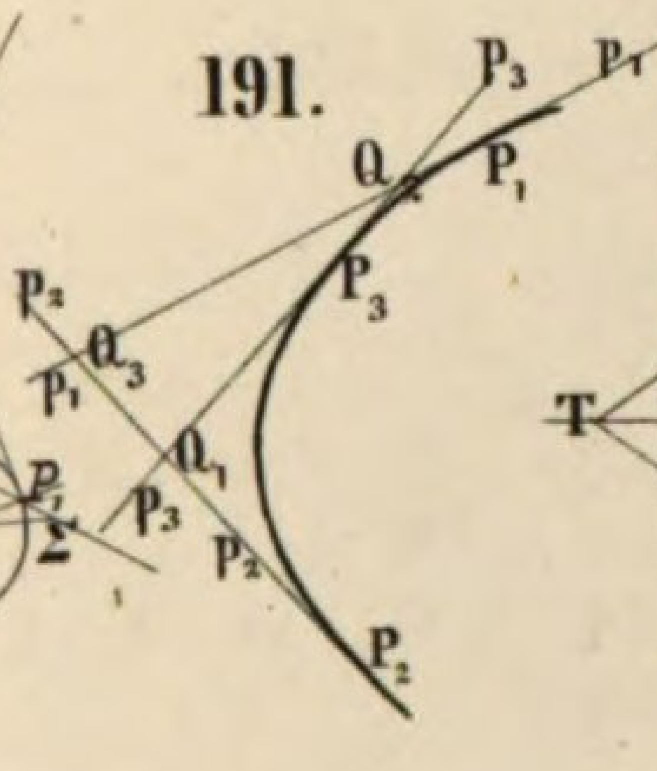


186.

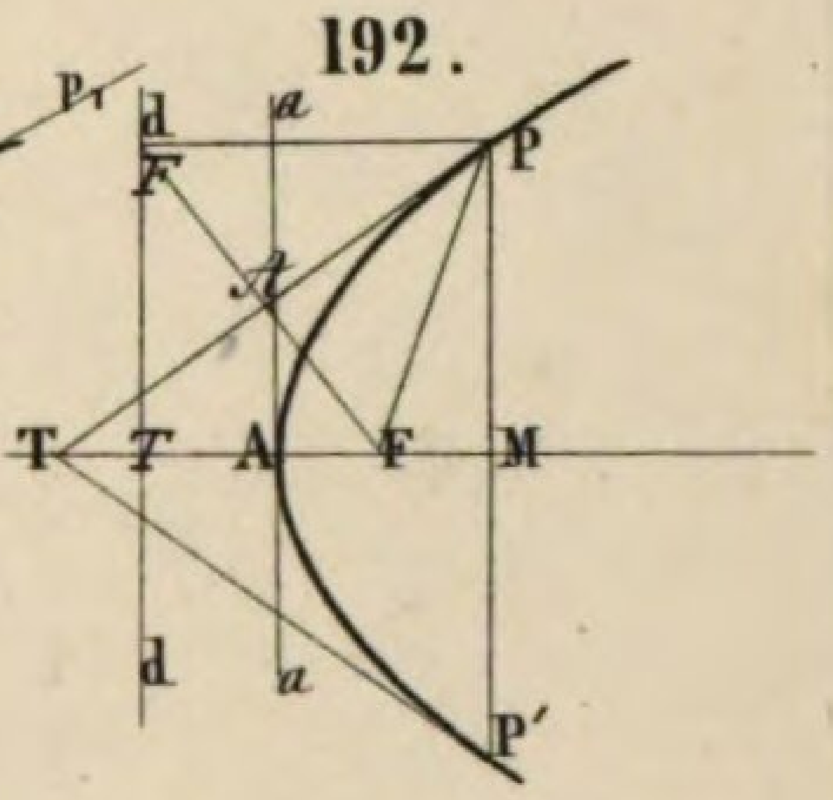




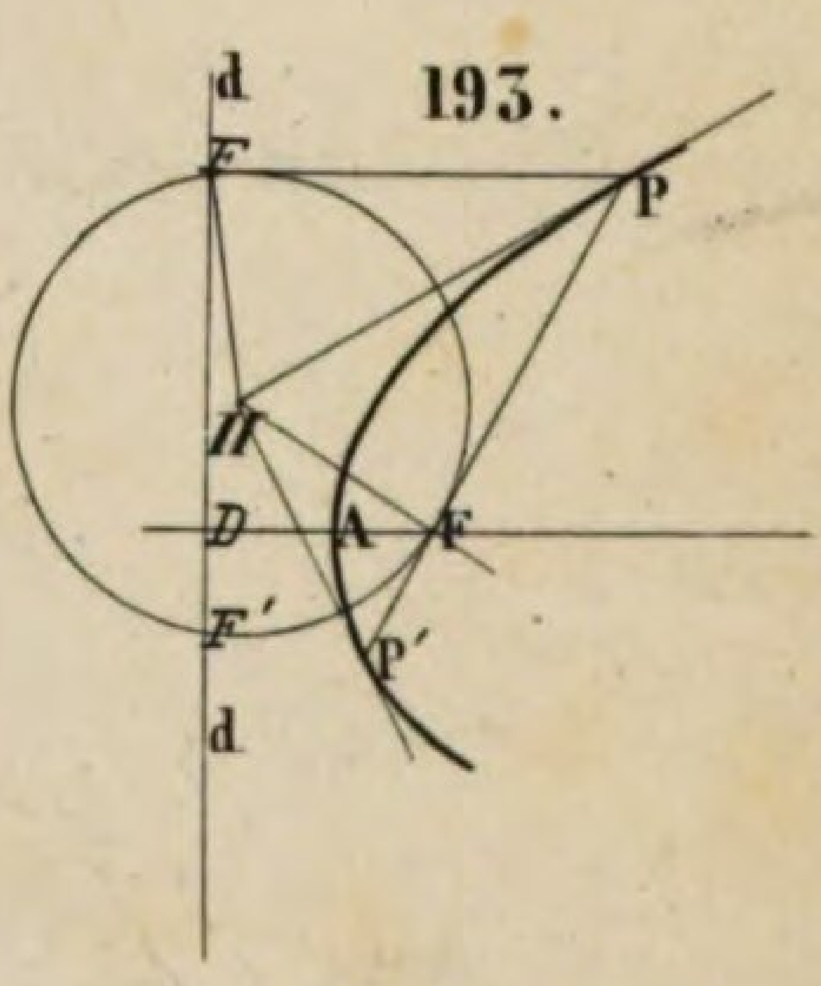
191.



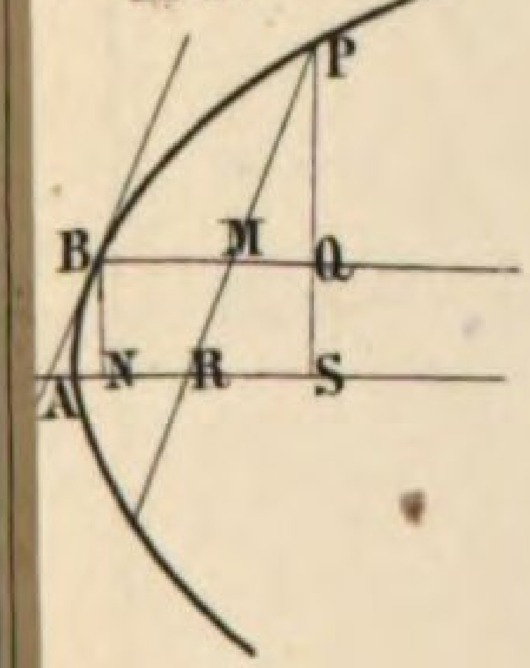
192.



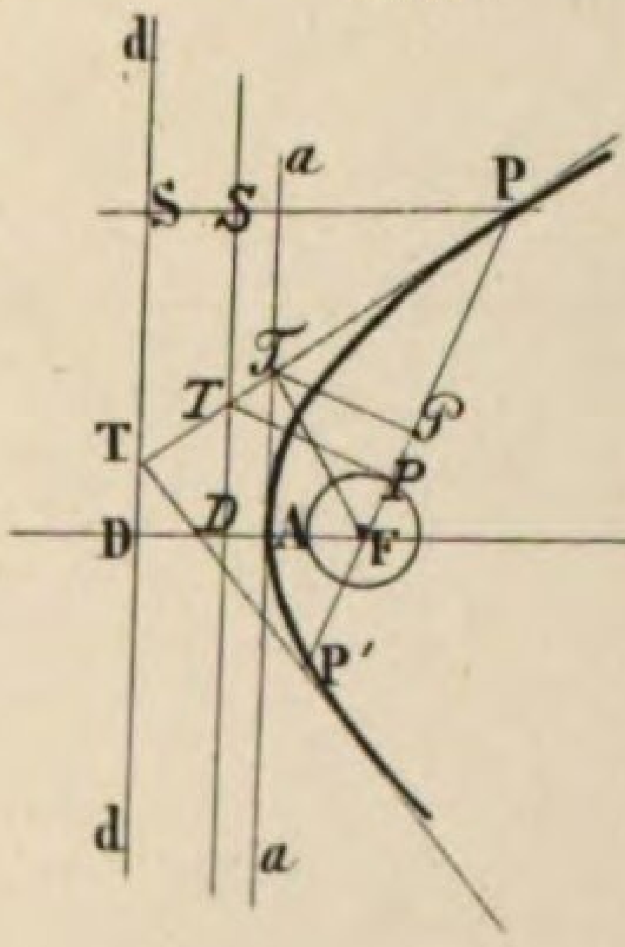
193.



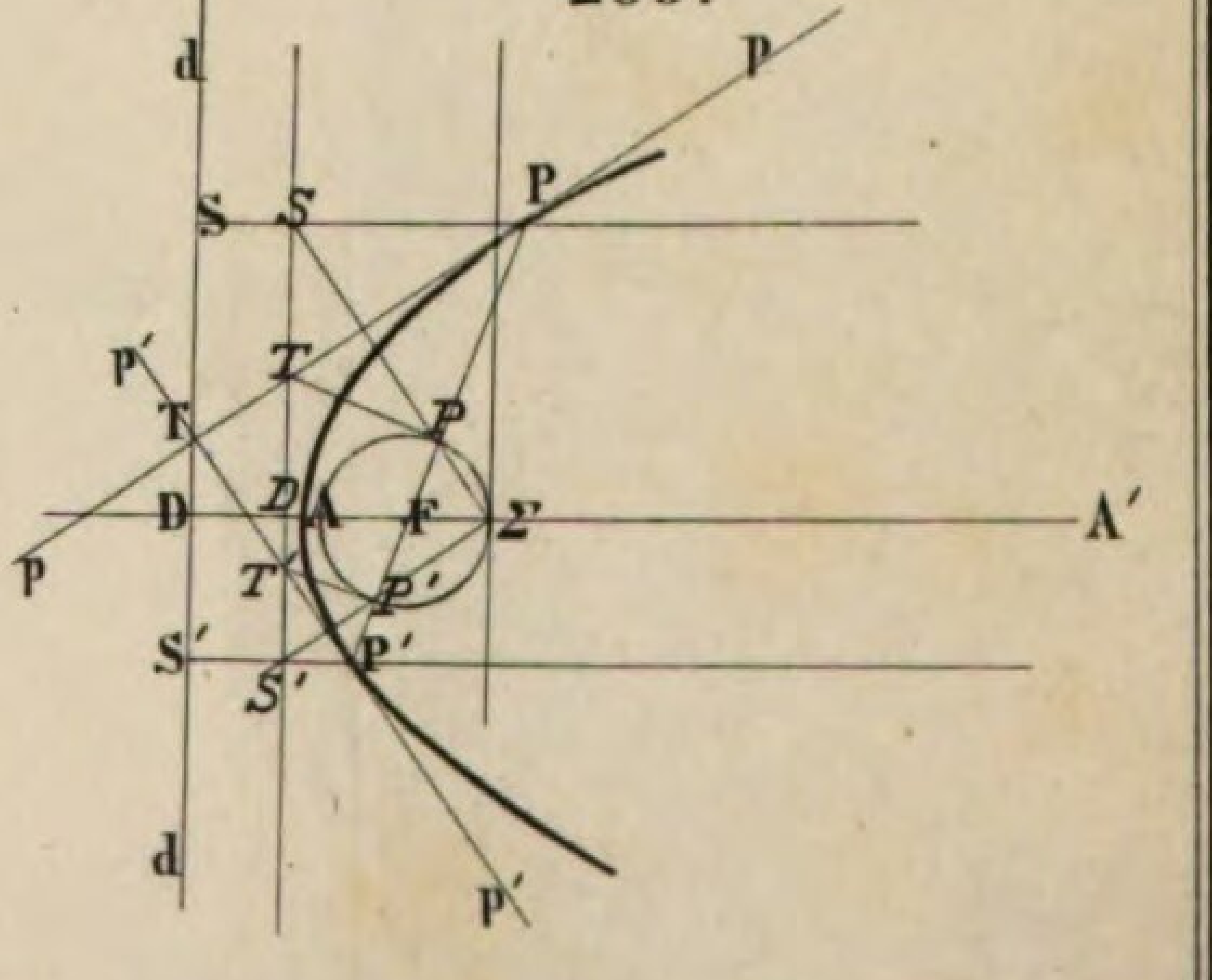
198.



199.



200.



Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.